FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

A argumentação em Matemática

Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração

Ana Maria Roque Boavida
2005

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO

A argumentação em Matemática

Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração

Dissertação apresentada na Universidade de Lisboa
para obtenção do grau de Doutor em Educação

Orientador: Prof. Doutor João Pedro da Ponte

Ana Maria Roque Boavida
2005

Resumo

A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração

Este estudo é uma investigação *com* o professor sobre o seu trabalho. Tem dois objectivos: (1) descrever e analisar o trabalho de duas professoras orientado para o envolvimento dos seus alunos em actividades de argumentação matemática; (2) compreender potencialidades e problemas emergentes do desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa centrado na reflexão sobre as práticas destas professoras. Ao primeiro objectivo associam-se questões que visam dar a conhecer desafios com que as professoras se confrontaram ao prepararem o ensino e ao criarem nas suas aulas contextos facilitadores da emergência e desenvolvimento de argumentação matemática. Do segundo objectivo decorreram questões focadas em aspectos considerados relevantes ou problemáticos no desenvolvimento do projecto e naquilo que o facilitou ou constrangeu.

A problemática da argumentação na aula de Matemática é analisada no enquadramento teórico do presente estudo a partir de contributos da área da filosofia e da educação matemática. É também abordado o tema da colaboração, discutindo-se significados atribuídos a este conceito e analisando-se possíveis modos de desenvolver uma investigação colaborativa.

Em termos metodológicos o estudo insere-se no paradigma interpretativo colaborativo que aceita a existência de diversas formas legítimas de conhecer o mundo. Este paradigma enquadra diferentes modalidades de investigação que assentam no pressuposto de que a partilha deste conhecimento num grupo regulado por normas de comunicação autêntica, contribui para entender mais profundamente este mundo. Visando aprofundar a compreensão sobre a argumentação na aula de Matemática, constituiu-se um grupo designado por *grupo de pesquisa*, cuja actividade contemplou várias fases entrelaçadas de acção e reflexão que se informaram mutuamente.

O estudo ilustra que a exploração, pelos alunos, de tarefas abertas é favorável à argumentação matemática. No entanto, os episódios de argumentação geram-se no interior das interacções da aula quando no decurso da acção o professor consegue encontrar formas de facilitar a sua emergência. Um bom conhecimento do currículo e de conexões entre os temas matemáticos nele incluídos, um investimento na promoção de interacções entre alunos e em actividades de formulação de conjecturas, sua avaliação e prova, uma cuidadosa selecção de tarefas e uma preparação cuidada e meticulosa das aulas podem dotar o professor de recursos que, em situação, lhe permitem improvisar o melhor modo de agir para favorecer e apoiar a argumentação.

Actividades propícias ao envolvimento dos alunos em argumentação matemática parecem ser a negociação dos significados de conjectura, contra-exemplo e prova; a valorização da actividade de formulação de conjecturas; a partilha, na turma, de conjecturas formuladas durante fases de trabalho em pares/grupos; a análise colectiva de enunciados de conjecturas tendo por suporte um registo escrito observável pela turma; e a avaliação colectiva da plausibilidade de conjecturas. Além disso, a compreensão do valor e necessidade da prova e a aprendizagem da produção de provas, parecem ser facilitadas pelo enquadramento da prova em actividades de argumentação desencadeadas pela exploração de tarefas abertas que apelam à formulação de conjecturas. Parece ser igualmente importante envolver frequente e sistematicamente os alunos em experiências de prova; destacar, persistentemente, que uma conjectura não provada tem um carácter provisório; acompanhar a apresentação de ideias matemáticas que podem ser provadas mas que não o são, por uma explicação que permita salientar que a prova não foi feita e porque não o foi; aproveitar as situações que surgem no decurso das interacções da aula para salientar as limitações do raciocínio indutivo; e pôr a ênfase no valor da prova enquanto meio de iluminar o porquê da validade ou não validade de uma conjectura.

Um contexto que se destaca como favorável à argumentação matemática é a exploração de situações de desacordo tendo em vista a obtenção de consensos matematicamente fundamentados pela turma. Estas situações podem ser desencadeadas pela exploração de tarefas que permitam fazer surgir vários processos de resolução e que suscitem a reflexão. A legitimação da possibilidade dos alunos exprimirem pontos de vista diferentes, tornar visíveis posições em confronto e instituir estas posições como objecto de reflexão individual e colectiva, são aspectos que facilitam a emergência e resolução de desacordos. Paralelamente, o estudo evidencia que a exploração de situações de divergência de ideias envolve riscos e que precavê-los passa por dar atenção a aspectos do domínio cognitivo e afectivo.

Um outro aspecto que se destaca como particularmente relevante para a argumentação matemática é a negociação de *normas sociais* e *normas sociomatemáticas* que colocam a ênfase na expressão audível, na escuta atenta, na partilha de ideias, na manifestação pública de desacordos e na explicação e justificação de contribuições. Atributos do processo de negociação cuja conjunção parece ser significativa para ajudar os alunos a apropriarem-se destas normas, são a *importância da sistematicidade e persistência*; a *pertinência de uma negociação contextualizada*; e a *essencialidade da coerência*. No seu conjunto, estes atributos remetem para a necessidade de no processo de negociação existir uma forte e sistemática consistência entre o que explicitamente se diz e as mensagens que implicitamente se veiculam através do modo como se age.

O envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática parece ser, além disso, facilitado pela articulação frequente entre o trabalho de pares/grupos e o trabalho colectivo. Também a existência de suspensões temporárias de curta duração durante uma discussão colectiva, destinadas a proporcionar aos alunos oportunidades de reflexão sobre ideias enunciadas, parece favorecer a argumentação. Um dos aspectos fundamentais para não se desperdiçarem oportunidades de argumentação é existir uma demarcação clara e bem vincada entre as fases destinadas a trabalho de pares/grupos e as fases de trabalho com a turma. A orquestração de discussões colectivas revelou-se uma tarefa extremamente complexa e exigente, mas fortemente favorável à argumentação matemática. *Repetir*, *reformular* ou *relatar* as contribuições dos alunos, são estratégias discursivas que foram úteis às professoras para lidar com esta complexidade. Paralelamente, a prática de orquestrar discussões colectivas e a reflexão sobre o trabalho realizado contribui para o esbatimento das dificuldades.

A análise dos desafios com que as professoras lidaram permite evidenciar a existência de seis espaços-problema que se interrelacionam: (1) ensinar o valor das conjecturas e provas em Matemática e promover e sustentar a produção de provas; (2) compreender as ideias apresentadas, instituí-las como recursos de apoio ao ensino e lidar com sentimentos que originam; (3) descentrar o discurso de si, transformar a aula numa comunidade que cuida e combater a irresponsabilidade matemática dos alunos; (4) apoiar a actividade dos alunos e favorecer a sua autonomia; (5) harmonizar e equilibrar diferentes vozes na orquestração de discussões; e (6) articular propósitos e agendas pessoais com vontades dos alunos.

Quanto ao segundo objectivo do estudo, a investigação desenvolvida permite evidenciar que um trabalho em colaboração cuja equipa inclui pessoas com formações, experiências, perspectivas e contextos de trabalho diversificados e em que a reflexão sobre a prática do professor tem um lugar privilegiado, parece ser um contexto significativamente propício ao desenvolvimento do professor. Factores que favoreceram a colaboração foram a organização do trabalho, uma clara definição de papéis e responsabilidades, a possibilidade de dialogar autenticamente, a existência de uma negociação transparente, continuada e igualitária, a existência de um período de conhecimento recíproco entre todos os elementos do grupo de pesquisa prévio à observação de aulas das professoras e o tempo longo de duração do projecto.

Palavras-chave: Argumentação em Matemática; professor; ensino da Matemática; colaboração; investigação colaborativa.

Abstract

Argumentation in Mathematics: Investigating the work of two teachers in a collaborative context

This study is an investigation *with* a teacher about his/her work, directed by two goals: (1) to describe and analyze the work of two teachers who wish to involve their students in mathematical argumentation activities; and (2) to examine the potentialities and problems arising from a collaborative research project which focuses on reflection about these teachers' practices. In the first objective, I intend to reveal the challenges faced by the teachers when planning and creating a classroom environment which facilitates the fostering and development of mathematical argumentation. The second objective deals with questions regarding aspects the teachers consider to be relevant or problematic in the development of the research project and making it easier or harder.

The review of the literature addresses mathematical argumentation in the classroom through contributions from the fields of philosophy and mathematics education. It also includes a discussion about the meaning of collaboration and the analyses of different ways to develop a collaborative research project.

Methodologically, this study is framed on the interpretative-collaborative paradigm, which assumes the existence of several legitimate forms of knowing the world. This paradigm embraces several styles of investigation that build on the assumption that the sharing of this knowledge by a group where communication is ruled by authenticity, contributes to the vaster, deeper understanding of this world. In order to understand mathematical argumentation better in the classroom, a group designated by *inquiry group*, has been formed. Its work involves several intertwined phases of action and reflection.

This study shows that the students' exploration of open tasks favours mathematical argumentation. However, the episodes of argumentation developed within classroom interactions when the teacher found ways to facilitate their emergence. Sound knowledge of the curriculum and of the connections between its mathematical subjects; an investment in the promotion of student interaction and in activities concerning the formulation, evaluation and proof of conjectures; a careful selecting of tasks; and a careful, meticulous preparation of classes, can provide the teacher with resources which allow him/her to find the best way to favour and support argumentation.

Favourable activities for involving students in mathematical argumentation appear to be: the negotiation of the meanings of conjecture, counter-example and proof; valuing the activity of conjecture formulation; the class-sharing conjectures formulated during phases of pair/group work; the collective analysis of conjectural statement, based on a written text visually available to the class; and the collective evaluation of the plausibility of conjectures. Furthermore, understanding the value and the need for proof and learning about the production of proofs seem to be facilitated by argumentative activities triggered by the exploration of open tasks that call for conjecture formulation. Additionally, math argumentation is enhanced by: involving students frequently and systematically in proof experiments; persistently clarifying that a non-proved conjecture has a temporary character; accompanying the presentation of mathematical ideas that can be proved but are not, by an explanation that stresses that proof was not shown and why it was not shown; seizing the situations that arise during class interactions to highlight the limitations of inductive reasoning; and stressing the value of proof as a means of explaining why a conjecture is, or is not, a valid statement.

One context that stands out as favouring mathematical argumentation is the exploration of classroom disagreements that attempt to achieve mathematically grounded consensus. These disagreements can be triggered by tasks that allow the emergence of several reasoning processes and give rise to reflection. Legitimizing the possibility of students expressing divergent points of

view, highlighting positions in a confrontation, and establishing these positions as an object of individual and collective reflection are aspects that facilitate the emergence of disagreements and of discussions focused on how to overcome the divergence using mathematical reasoning. At the same time, the study shows that these discussions carry risks and that preventing them implies paying attention to cognitive and affective aspects.

Another aspect that stands out as particularly relevant for the emergence and development of mathematical argumentation is the negotiation with students of *social norms* and *sociomathematical norms* that emphasize explaining and justifying, respecting the ideas of others, expressing positions audibly, listening carefully, sharing ideas, and articulating divergent viewpoints when they exist. The attributes of the negotiation process which appear to help students assimilate these norms significantly are: the *importance of being systematic and persistent*; the *pertinence of a contextualised negotiation;* and the *essentiality of coherence*. Together these attributes imply the need for the existence of a strong, systematic consistency between what is explicitly said and the messages that are implicitly conveyed through one's behaviour in the negotiation process.

Involving students in mathematical argumentation activities seems to be facilitated by the frequent articulation between pair/group work and collective work. During class-wide discussions, argumentation also appears to be favoured by the presence of temporary suspensions, aimed at providing the students with opportunities to reflect upon stated ideas. One of the aspects that may be essential to not waste argumentation opportunities is a clear, well-marked boundary between phases devoted to pair/group work and phases of whole-class work.

The orchestration of collective discussions ended up being an extremely complex, demanding task, but highly favourable for mathematical argumentation. The teachers found the discursive strategies of *repeating, reformulating* or *reporting* students' contributions useful for dealing with this complexity. At the same time, the practice of orchestrating collective discussions and the reflection about this practice contributed to the lessening of existing difficulties.

Analyses of the challenges with which the two teachers dealt, reveals the existence of six problem-spaces that are intertwined: (1) teaching the value of conjectures and proofs in mathematics and promoting and sustaining the proofing process; (2) understanding and using student ideas as resources for teaching and dealing with personal feelings; (3) sharing with students the control of classroom mathematical discourse, transforming the class into a caring community and combating students' mathematical irresponsibility; (4) supporting students' activities and favouring their autonomy; (5) harmonising and balancing different voices within collective discussions; and (6) coordinating personal aims and agendas with the students' desires.

As for the second objective of the study, the investigation shows that collaborative work by a team that includes people with different competencies, experiences, perspectives, and working contexts, and where reflection upon teacher practice has a privileged place, seems to be a relevant context for teacher development. Aspects favouring collaboration within the collaborative research project were the organisation of work, a clear definition of roles and responsibilities, the possibility of authentic dialogue, the presence of equal and continuous negotiation, the existence of a period of reciprocal acquaintance prior to the teachers' classroom observation, and the long-lasting duration of the project.

Keywords: Argumentation in Mathematics; the teacher; Mathematics teaching; collaboration; collaborative research.

Agradecimentos

À Anita e Rebeca, as professoras que tive o privilégio de conhecer e com quem trabalhei, por me abrirem as portas das suas aulas, das suas casas e das suas vidas, pela disponibilidade constante mesmo quando o trabalho foi muito, pela boa disposição e empenhamento permanentes em cada encontro e pela relação de amizade que fomos construindo.

Ao Professor Doutor João Pedro da Ponte, meu orientador, pela confiança que sempre senti depositar em mim, por me incentivar a enveredar pelos caminhos da colaboração, pelo cuidado de me dar a conhecer bibliografia relevante para o meu trabalho, pelas suas pertinentes críticas e sugestões e pelo apoio e palavras amigas que chegaram nos momentos certos.

À Escola Superior de Educação de Setúbal, que me proporcionou condições favoráveis ao desenvolvimento da investigação.

Aos meus colegas do grupo Didáctica e Formação (DIF), pelas possibilidades de aprendizagem que me proporcionam e pelo prazer de estar.

Às minhas colegas e amigas do Departamento de Matemática da ESE de Setúbal, por todo o apoio e pela generosidade de assumirem trabalho que era meu; em especial à Fátima também pela disponibilidade e cuidado na revisão de parte do texto e à Joana pelas mesmas razões e ainda pelas boas conversas quando as dúvidas "bateram à porta".

Ao Luís, por me ter facilitado enormemente a impressão deste trabalho.

Ao Mário, pela imensa disponibilidade com que me apoiou na edição final deste trabalho, pela paciência para esperar e pelas horas que "roubou" ao seu sono para me dar.

À Leonor, pela proveitosa conversa quando me preparava para iniciar o trabalho de campo e por me ter feito sorrir em alturas problemáticas através da magia da infância.

À Raquel que, apesar da distância, sempre me fez sentir a sua presença e solidariedade.

À Paula, porque lá muito, muito longe descobriu os artigos que eu quis ler, pela disponibilidade permanente e abrangente e pelo apoio cognitivo e afectivo, inesquecível e imprescindível, nos tempos conturbados do final da escrita deste trabalho.

À Fátima e à Paula, pela ajuda inestimável, pela partilha, cumplicidade, palavras de encorajamento, gestos solidários e comentários valiosos a versões preliminares de vários capítulos deste trabalho.

À Mena e ao Carlos, pela amizade e carinho sempre presentes e também pelo refúgio ao pé do mar de portas sempre abertas.

Aos meus pais e à Bela, minha irmã, que sempre acreditaram em mim.

Ao Zé, meu companheiro de vida, pela permanente ajuda em tudo aquilo que precisei e pela paciência para me escutar nos momentos difíceis desta aventura sem nunca duvidar de que seria capaz de a levar a bom porto.

Ao João, meu filho e a quem dedico este trabalho, com quem muito aprendi a argumentar, compreendendo, através das experiências únicas que vivi, que a lógica e a intuição, o sentir e o pensar, andam de mãos dadas.

ÍNDICE

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Capítulo I

-

Introdução

O estudo que apresento é uma investigação *com* o professor sobre o seu trabalho. Mais precisamente sobre o trabalho de ensino focado na interacção com os alunos e a Matemática quando é intencionalmente orientado pelo propósito de os envolver em actividades de argumentação matemática. É também um contributo para compreender potencialidades e problemas da opção metodológica de fundo tomada para investigar o trabalho de duas professoras que leccionam turmas do 3º ciclo do ensino básico: o desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa.

A expressão "argumentação matemática" é usada para designar argumentação na aula de Matemática, ou seja, conversações aí desenvolvidas cujo foco é a Matemática e que assumem a forma de raciocínios de carácter explicativo e justificativo destinados seja a diminuir riscos de erro ou incerteza na escolha de um caminho, seja a convencer um auditório a aceitar ou rejeitar certos enunciados, ideias ou posições, pela indicação de razões. Esta caracterização merece-me três reparos.

O primeiro foca-se na natureza discursiva da argumentação: "a argumentação serve-se da linguagem natural como utensílio de comunicação entre quem argumenta e o seu interlocutor" (Pedemonte, 2002, p. 29). Esta característica não exclui a referência a elementos não discursivos: por exemplo, figuras, dados numéricos ou algébricos (Douek, 2000).

O segundo reparo prende-se com o conceito de auditório que entendo, seguindo Perelman (1993), como "o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação" (p. 33). Este conceito remete para a ideia de que na argumentação se deve ter em conta um outro. No caso concreto da aula de Matemática, o auditório pode restringir-se apenas a um aluno que delibera consigo próprio, pode ser constituído pela turma, na sua globalidade, ou por alguém em particular com quem se estabelece um diálogo, ou pode ser formado pela comunidade matemática. Em qualquer dos casos, trata-se do "auditório universal" referido por Perelman, no sentido em que é "um auditório racional que pode estar de acordo ou em desacordo com quem argumenta mas que em todos os casos está apto a responder" (Pedemonte, 2002, p. 31).

O terceiro reparo visa destacar que considero a demonstração, designada no presente estudo por prova matemática ou simplesmente prova, como uma argumentação particular (Douek, 1998; Pedemonte, 2002; 2003), ou seja, a prova está sujeita a constrangimentos próprios: "No que respeita à forma do raciocínio visível no produto final, a argumentação apresenta uma gama de possibilidades mais amplas do que a prova matemática: não apenas dedução, mas também analogia, metáfora, etc." (Douek, 2000, p. 3). Por exemplo, a formulação e avaliação de conjecturas, a que está subjacente o raciocínio plausível (Pólya, 1990), incluem-se nas actividades de argumentação matemática.

Centro este capítulo na fundamentação da pertinência do estudo e na apresentação dos objectivos e questões que o orientam. Começo por me focar na importância de ensinar a argumentar em Matemática tendo por referência as actuais orientações e recomendações para o ensino e aprendizagem desta disciplina.

Apresento, em seguida, razões subjacentes à opção pelo desenvolvimento de um projecto de colaboração com professores cujo núcleo central é uma actividade reflexiva sobre aulas pensadas para, potencialmente, fazerem surgir e desenvolverem-se episódios de argumentação matemática. Finalizo referindo os objectivos e questões de investigação, que brotam da sinergia criada entre o meu interesse pelo ensino da argumentação matemática e a via escolhida para o estudar, e apresentando a estrutura organizativa do presente documento.

A importância de ensinar a argumentar em Matemática

O interesse pela argumentação no âmbito da educação matemática é bastante recente. Segundo Douek (1999) foi apenas nos anos 80 que ganharam terreno as discussões sobre o tema, no âmbito do esforço feito para "atacar" o problema da especificidade da prova matemática relativamente à argumentação e estabelecer ligações entre perspectivas epistemológicas, cognitivas e educacionais. Kilpatrick, ao apresentar uma perspectiva histórica sobre o ensino da Matemática, referiu-se ao período de 1980-2000 como "the age of argumentation"[1].

Encontram-se nas actuais orientações para o desenvolvimento do currículo de Matemática, quer a nível nacional, quer internacional, diversas recomendações que remetem para a necessidade de se dedicar atenção à argumentação na aula de Matemática e de se criarem condições para os alunos se envolverem neste tipo de actividades (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; APM, 1988; NCTM, 1991, 1994, 2000; Ponte, Boavida, Graça, & Abrantes, 1997). Nos currículos portugueses presentemente em vigor (Ministério da Educação, 1991) e também no Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais (Ministério da Educação, 2001) surgem referências, mais ou menos directas, a estas actividades, através de

[1] Kilpatrick debruçou-se sobre a história recente, considerando, para lá desta, duas outras fases que designou por *the age of discipline*: 1865-1958 e *the age of structure*: 1958-1980. Esta perspectiva histórica foi apresentada em 19 de Abril de 1999 no simpósio *Fostering Argumentation in the Mathematis Classroom: The Role of the Teacher*, realizado no encontro anual da AERA (*American Educational Research Association*) em Montreal.

indicações relativas aos objectivos visados e competências a desenvolver e a sugestões de carácter metodológico. Por exemplo, sob o título Desenvolver o Raciocínio, um dos objectivos gerais indicados nos programas de 1991 para o 2º e 3º ciclos, encontramos indicações como “fazer e validar conjecturas”, “formular argumentos válidos para justificar opiniões”, “discutir ideias” e “produzir argumentos convincentes”. Também no documento Competências Essenciais, na “competência matemática que todos [os alunos] devem desenvolver” ao longo da educação básica, inclui-se a “concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior”, a “predisposição para (...) fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica”, e a “compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração” (p. 57). Considera-se, ainda, que a comunicação matemática deve ser transversal às “experiências de aprendizagem vividas pelos alunos” (p. 70) e que, entre outros aspectos, na comunicação oral “são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo” (idem).

O destaque atribuído ao raciocínio matemático entrelaça-se com a importância de aprender Matemática com compreensão. Subjacente a esta recomendação está a ideia de que saber Matemática é, fundamentalmente, fazer Matemática, e que os alunos através das experiências de aprendizagem que lhe são proporcionadas deverão desenvolver o seu “poder matemático” (NCTM, 1991, p. 6). Em aulas em que é valorizado o raciocínio, a explicação e a justificação são aspectos chave da actividade dos alunos e, assim, “uma ênfase no raciocínio, em todos os níveis da educação matemática, atrai a atenção para a argumentação e justificação” (Yackel & Hanna, 2003, p. 228).

A comunicação matemática é entendida como uma componente intrínseca do fazer Matemática: “Fazer Matemática envolve comunicar matematicamente” (Forman, 2003, p. 337). Esta recomendação surge associada a perspectivarem-se os fenómenos de aprendizagem em enquadramentos teóricos que reconhecem o valor da linguagem natural e das interacções sociais na construção de conhecimento.

Entre outros, os trabalhos de Vygotsky e Bruner, trouxeram para primeiro plano a relevância da interacção social na aprendizagem humana. Interacção na aprendizagem significa comunicação, o discurso é o nosso principal modo de comunicação e, assim, a importância de promover conversações matemáticas parece estar fora de questão (Sfard, 2003). Neste âmbito, uma questão que se coloca é de que formas se deve revestir a comunicação na aula de Matemática. Vários educadores matemáticos respondem-lhe indicando que, em certa medida, esta se deve aproximar da existente na comunidade matemática (Lampert, 1990, 2001; O' Connor, 2001). As propostas sugeridas colocam a ênfase no processo discursivo, e não no produto deste discurso, e realçam, nomeadamente a grande importância dos alunos participarem em actividades de argumentação (Forman, 2003). Estas propostas, a par da valorização dos contextos sociais em que aprendizagens ocorrem, são, segundo Forman, Larreamendy-Joerns, Stein e Brown (1998), consistentes com actuais tendências em sociologia e filosofia da ciência. Estas tendências vão no sentido não só de iluminar o lugar central da argumentação no processo de obtenção de acordos sobre a natureza dos objectos científicos, mas também de mostrar que a ciência depende tanto da capacidade de convencer os membros da comunidade científica como do uso do método científico.

Há um outro argumento que justifica a atenção dedicada, em tempos recentes, às actividades de argumentação na aula de Matemática: a procura de caminhos facilitadores da aprendizagem da prova (Duval, 1999). Vários trabalhos revelam que esta é uma vertente do raciocínio matemático que coloca sérias dificuldades aos alunos (Balacheff, 1991a, 1991b; Brocardo, 2001; Lampert, 1988; Ponte, Matos, & Abrantes, 1998; Putnam, Lampert, & Peterson, 1990). Os alunos não compreendem a necessidade da prova, não lhe reconhecem valor, não se apercebem do poder explicativo que pode ter e, frequentemente, não conseguem encontrar sentido nos raciocínios demonstrativos, que surgem aos seus olhos como algo de estranho e obscuro. Hanna (1996) salienta que para a prova ser, antes de mais, um instrumento explicativo e para exercer o seu papel como forma última de justificação matemática, os alunos "têm que estar familiarizados com os padrões de argumentação matemática" (p. 33). E acrescenta que, embora não seja fácil ensinar-lhes a reconhecer e a produzir argumentos válidos de um ponto de vista matemático, este é "um desafio que não podemos evitar" (idem).

A importância de não deixar cair no esquecimento ou de não remeter para plano secundário a aprendizagem da prova, transparece, em particular, no último documento com orientações curriculares publicado pelo NCTM (2000). Contrariamente ao seu antecessor (NCTM, 1991) em que nenhum dos títulos das normas aí indicadas incluía a palavra "prova", no documento actual uma das normas respeitantes a processos matemáticos, ou seja, aquelas que "iluminam modos de adquirir e usar o conhecimento do conteúdo" (p. 29), é designada por *reasoning and proof*. Na síntese explicativa sobre a incidência desta norma refere-se que os programas de ensino de todos os níveis de escolaridade não superior, devem proporcionar a todos os alunos a oportunidade de "reconhecer o raciocínio e a prova como aspectos fundamentais da Matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; [e] seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova" (NCTM, 2000, p. 56).

Na minha perspectiva, há um argumento de natureza um pouco diferente dos anteriormente apresentados, que também justifica a pertinência de envolver os alunos em actividades de argumentação, muito em particular no ensino básico. Segundo Grácio (1992), a competência argumentativa pode entender-se simultaneamente como a "capacidade de dialogar, de pensar, de optar e de se comprometer" (p. 67): como capacidade de dialogar, remete para uma atitude de abertura nas relações com o outro que se torna efectiva pelo desejo de comunicar e pela disposição para ouvir; como capacidade de pensar, remete para uma atitude crítica e de atenção; como capacidade de optar e se comprometer, remete para indivíduos que procuram assumir as suas posições de forma esclarecida e, neste processo, assumem uma atitude interveniente e empenhada. O lugar que a argumentação ocupa num dado contexto reflecte o peso que a liberdade de reflexão e acção aí conquistou. E se se aceitar, seguindo Johnstone (1992), que argumentar é, também, correr riscos, e que correr riscos de um ou de outro tipo é fundamental para a estruturação e formação da pessoa, então a argumentação parece "ser constitutiva daqueles que nela participam" (p. 48). Deste modo, a educação para a argumentação é um objectivo democrático decisivo, pelo que importa pensá-la não apenas pelo ângulo intelectual, mas também pelo social e ético.

As ideias anteriormente apresentadas permitem evidenciar que a importância actualmente atribuída ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação, em particular na aula de Matemática, decorre da sinergia de vários argumentos de que destaco: (a) a valorização do raciocínio matemático nas suas múltiplas vertentes numa perspectiva que não põe a ênfase no rigor e formalismo entendidos como um fim em si mesmo, (b) a recomendação de que os alunos aprendam Matemática com compreensão, (c) o valor atribuído às linguagens naturais e à interacção social para a aprendizagem, (d) a aproximação da comunicação na aula de Matemática da existente na comunidade dos matemáticos, (e) dificuldades encontradas na aprendizagem da prova e a procura de caminhos que facilitem esta aprendizagem e (f) a relevância da escola proporcionar a todos os alunos condições necessárias para desenvolverem certas competências transversais, entre as quais está a competência argumentativa, fundamentais ao exercício pleno de uma cidadania responsável numa sociedade democrática.

Apesar do valor das actividades de argumentação matemática ser amplamente reconhecido, estas actividades têm uma expressão débil, ou mesmo inexistente, em muitas salas de aula de diversos níveis de ensino (Ponte et al., 1998; Putnam et al., 1990). O estudo PISA 2000 revela, por exemplo, que muitos jovens portugueses de 15 anos "têm uma fraca capacidade de argumentação, materializada nas justificações que apresentam" (Ramalho, 2002, p. 52). Em particular, "generalizam situações sem proceder à sua verificação; recorrem a informação do quotidiano para fundamentar as suas respostas, sem que esta informação seja pertinente para o problema em causa; [e] fundamentam as suas respostas em informações claramente excluídas pelas condições enunciadas" (idem). Frequentemente os alunos agem com uma certa "irresponsabilidade matemática" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2001), como se não fizesse parte do seu papel comprometerem-se com a coerência, avaliação ou justificação dos seus raciocínios, nem com a análise crítica e fundamentada do que ouvem dos colegas. Lidar com esta tendência de modo a alterá-la não é simples.

Não há em Portugal investigações focadas no trabalho do professor orientado para o ensino da argumentação em Matemática, embora haja estudos que, ao analisarem práticas do professor associadas à exploração e discussão de tarefas de investigação matemática, abordam aspectos deste trabalho (por exemplo, Cunha, 1998; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998; Ponte, 2003; Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999; Ponte, Segurado & Oliveira, 2003). Estes estudos referem papéis desempenhados pelos professores ao acompanharem a formulação e teste de conjecturas pelos alunos, ao moderarem discussões focadas na partilha e análise dos produtos do trabalho de grupo ou pares, ao promoverem a justificação ou prova de conjecturas e também questões e problemas com que se confrontam. Uma ideia que sobressai a partir da análise destes estudos é que, com frequência, os professores experienciam dificuldades, dilemas, tensões, desafios, situações problemáticas não antecipadas, que tornam o seu trabalho bem mais complexo e imprevisível do que seria se se limitassem a expor ou a "explicar bem" conceitos ou procedimentos matemáticos, a apresentar apenas exercícios visando a consolidação de conhecimentos ou se o controle do discurso que se desenrola na aula e o poder decisório sobre o valor matemático desse discurso estivessem inteiramente nas suas mãos. Outra ideia que sobressai são as exigências de grande flexibilidade, significativo investimento pessoal e um leque de competências profissionais mais amplo do que aquele que requer do professor o ensino dito "tradicional".

Em termos internacionais, investigações especificamente centradas no tema do presente estudo também são escassas. Há um conjunto de trabalhos focados na prova. Entre estes, Herbst (2000) refere que "a tese de Eric Knuth é um dos raros estudos que abordam a prova do ponto de vista do professor" (p. 10). Sem negar a importância deste estudo, cuja opção metodológica foi a realização de entrevistas a professores com o propósito de analisar as suas concepções sobre a natureza e papel da prova, considera que é ele insuficiente para permitir compreender o trabalho realizado pelo professor nas condições de possibilidade da sua acção. Herbst (1998, 2002) investigou, ele próprio, práticas da aula de Matemática orientadas para o envolvimento dos alunos na produção de provas numa perspectiva de análise do trabalho do professor. Apoiando-se neste estudo problematizou o papel do professor na promoção da argumentação na aula de Matemática salientando a sua complexidade (Herbst, 1999).

No âmbito dos trabalhos focados na prova, há um grupo significativo que se interessa pelas relações entre prova e argumentação mas do ponto de vista da aprendizagem e em que o professor é, no caso dos que consultei, bastante invisível. As conclusões destes trabalhos não são consensuais, embora o seu conjunto não desvalorize o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação na aula de Matemática. O debate centra-se em torno das potencialidades que este envolvimento traz para a aprendizagem da prova. Duval (1992-1993) refere que "mesmo nas suas formas mais elaboradas a argumentação não abre uma via para a demonstração" (p. 60). Balacheff (1999) considera que há uma relação complexa entre argumentação e prova e sublinha que a "argumentação constituiu-se como um obstáculo epistemológico à aprendizagem da demonstração e, mais geralmente, da prova matemática" (p. 5). Em contrapartida, a ideia de que há uma distância cognitiva entre argumentação e prova é fortemente contestada por um grupo de investigadores italianos que defendem que a exploração, pelos alunos, de problemas abertos que requeira a formulação de conjecturas e a avaliação da sua plausibilidade, pode favorecer uma significativa actividade argumentativa que, em muitos casos, se revela muito útil na construção da prova (Boero, 1999; Bussi, 2000; Pedemonte, 2002). Neste último sentido vão também estudos desenvolvidos por Douek (1998, 2000), bem como as ideias sobre a aprendizagem da generalização e prova emergentes de estudos realizados em Portugal apresentadas por Ponte, Matos e Abrantes (1998).

Há, além disso, um grupo de estudos centrados na análise de práticas de ensino orientadas para o desenvolvimento de um discurso da aula com características consistentes com as propostas pelo NCTM (1991, 1994, 2000) e para a criação de uma cultura de sala de aula regulada por normas que o favoreçam. Neste estudos encontram-se referências a papéis desempenhados pelo professor para desencadear e apoiar actividades de argumentação na aula de Matemática. Destaco, neste âmbito, os trabalhos de Chazan e Ball (1999), Cobb e Yackel (1998), Forman et al. (1998), Heaton (2000), Herbst (2003), Lampert (1990, 2001), Sherin (2002), Wood (1999), Yackel (2002a) e Yackel e Cobb (1996). Alguns destes trabalhos, de que saliento muito em particular o de Lampert (2001), ilustram que é possível criar contextos de aprendizagem com alunos do ensino básico em que a argumentação matemática está em primeiro plano e, simultaneamente, o currículo instituído não é relegado para segundo lugar. Vários desses estudos evidenciam, no entanto, que promover e incentivar a argumentação matemática cria sérias dificuldades aos professores: Herbst (2003) analisa três tensões que afectam o trabalho do professor; Sherin (2002) escreve que criar e manter ambientes de aprendizagem que apoiem o "fazer e falar acerca da Matemática (...) é um empreendimento complexo para os professores" (p. 205) e debruça-se sobre "duas tensões chave" (idem); Heaton (2000) refere surpresas e receios sentidos ao perspectivar o seu ensino de modo a, entre outros aspectos, trabalhar com os alunos no sentido de produzirem argumentos matemáticos; Chazan e Ball (1999) salientam dilemas vividos ao tentarem envolver as turmas em actividades de argumentação, assegurar a produtividade matemática das práticas argumentativas e evitar que os alunos enveredassem por caminhos passíveis de provocar frustração ou embaraço social. Os últimos dilemas que referi prendem-se com questões levantadas por vários outros autores: Em que medida é possível manter ligações entre as práticas matemáticas da aula e o modo como a Matemática avança enquanto construção humana? Qual o papel do professor na promoção e apoio ao desenvolvimento de argumentação matemática genuína na aula? De que modo pode tornar os alunos capazes de participar na argumentação matemática da aula e, ao mesmo tempo, assegurar a natureza matemática dessa argumentação?

Em síntese, procurei fundamentar a importância do envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, sublinhar que este tipo de actividades não é usual em muitas aulas de Matemática, salientar que há ainda muito para investigar quer sobre as suas potencialidades, quer sobre possíveis vias de se materializarem nas práticas lectivas e evidenciar que estas práticas colocam significativos desafios ao professor. Pretendo com o presente estudo contribuir para uma conversação sobre aspectos associados a estas questões, esperando poder iluminar algumas das complexidades do trabalho desenvolvido pelo professor ao tentar concretizar esta orientação curricular nos contextos reais em que desenvolve a sua actividade. Refiro, em seguida, o porquê da opção pelo desenvolvimento de um projecto de colaboração entrelaçando razões de ordem mais experiencial e pessoal com outras da ordem dos saberes profissionais.

Um projecto de colaboração centrado na argumentação matemática: Uma opção metodológica

Levar a cabo esta investigação é desenvolver um projecto fundado na minha história onde não é simples destrinçar onde começam e acabam os motivos de natureza mais profissional ou mais pessoal. Desde que me conheço sempre gostei de Matemática. Não se me colocou qualquer dúvida ao chegar o momento de ingressar na Faculdade: seria uma licenciatura em Matemática. O gosto pelo ensino veio mais tarde. Descobri-o por acaso, fruto de razões circunstanciais que me levaram a decidir ser essa a mais rápida via, assumida na altura como transitória, de conseguir a independência económica que desejava. Tendo feito esta descoberta, deixei de ver a minha vida profissional futura como via antes e, por opção, sou professora há perto de 25 anos.

Foi o mestrado que despertou o meu interesse pela investigação cujo foco é o professor. Na época senti-me fascinada pelo pensamento de Popper, Kuhn, Lakatos, entusiasmei-me com a procura de entendimento dos processos de produção do saber matemático, pelo papel que aí desempenha o jogo entre conjecturas, provas e refutações, pela compreensão de relações entre Filosofia da Matemática e ensino da Matemática e pela análise de relações entre perspectivas do professor sobre a natureza da Matemática e concepções sobre o seu ensino. Concluí-o sentindo que, em termos pessoais, a sua principal contribuição foi a de entreabrir portas que me poderiam levar a caminhos de aprofundamento desta problemática. Entre estes caminhos estava a curiosidade e interesse em compreender se seria possível, em que condições e através de que vias, proporcionar aos alunos de níveis elementares experiências de aprendizagem que colocassem em primeiro plano a argumentação matemática.

Com o passar do tempo, informada pela literatura e pelo conhecimento experiencial oriundo da minha vida de professora, vou constatando que as questões relacionadas com o ensino da argumentação matemática são bem mais complexas do que inicialmente tinha imaginado. Concluo que não será possível compreendê-las em profundidade sem aceder a práticas de ensino que não excluam esse tipo de actividades, sem entender o que, na perspectiva do professor, é relevante para a preparação e concretização destas práticas, sem conhecer os seus pontos de vista sobre opções que toma e porque as toma.

É neste contexto que começa a tomar forma a ideia de realizar uma investigação com professores interessados na compreensão do que está em jogo quando, intencionalmente, procuram criar nas suas aulas situações de ensino e aprendizagem orientadas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Subjacente a esta ideia estão vários pressupostos, apresentados em seguida, que no seu conjunto contribuíram para esta via se me afigurar como relevante e adequada.

Há, a meu ver, diversas formas legítimas de conhecer o mundo. A possibilidade de analisar e reflectir sobre uma realidade a partir de perspectivas, experiências e saberes diversos, em suma, de olhares múltiplos, contribui para a construção de quadros interpretativos abrangentes que permitem um entendimento mais profundo dessa mesma realidade. Distancio-me, portanto, do que Olson (1997) designa por *getting an education*, versão epistemológica sobre o conhecimento herdada do positivismo e que está subjacente à valorização da racionalidade técnica. Esta versão supõe que o conhecimento formal, teórico, não experiencial, é superior a todas as outras formas de conhecer e, por isso mesmo, quando se trata do ensino, o importante é este tipo de conhecimento, construído por alguns, nomeadamente pelos investigadores, ser "passado" a outros, por exemplo, os professores, para estes o aplicarem na sua prática.

Quando se trata de investigar fenómenos educativos complexos, como considero ser o ensinar a argumentar em Matemática, os professores estão numa situação ímpar para, através dos saberes de que são portadores e a que reconheço valor, proporcionarem informações insubstituíveis sobre os modos como lidam com as várias vertentes do seu trabalho, os sentimentos que experienciam ao realizá-lo e onde se fundam as escolhas que fazem. Nesta medida, penso que na produção de conhecimento relevante sobre o ensino, professores e investigadores, embora tendo finalidades próprias e práticas e saberes específicos, necessitam uns dos outros. Na verdade, ambos podem contribuir para o processo de produção deste conhecimento. Uma via prometedora é o envolvimento em empreendimentos conjuntos focados na promoção de um diálogo profissional autêntico. Este diálogo, que pressupõe a aceitação das vozes pessoais decorrentes de experiências vividas, a possibilidade de se partilharem, com autenticidade, diferentes significados e perspectivas e a valorização dos conhecimentos de cada um, pode ocorrer no âmbito de trabalhos colaborativos baseados na construção de relações interpessoais não hierárquicas orientadas pela procura de paridade de poder e vozes e apoiadas na negociação e no cuidado (Christiansen, Goulet, Krentz, & Maeers, 1997a).

Tinha consciência de que a argumentação matemática, por circunstâncias diversas, é uma vertente do raciocínio matemático frequentemente secundarizada e mesmo esquecida em muitas salas de aula. Não pretendia embarcar num percurso de investigação que, eventualmente, me pudesse conduzir, apenas, à constatação de que os alunos não se envolvem neste tipo de actividades ou ao entendimento daquilo que o professor "não faz". Ou seja, não me sentia confortável com a ideia de que poderia correr o risco de realizar um estudo que, de algum modo, pudesse contribuir, mesmo que só implicitamente, para reforçar a imagem do professor como profissional “deficiente” cujas práticas de ensino, devido, por exemplo, a insuficiências do seu conhecimento, competências, qualificações ou a certas concepções, não integram aspectos do ensino da Matemática que a investigação e documentos curriculares consideram ser importantes.

Conjecturei, assim, que o desenvolvimento de um projecto de colaboração em que a prática do professor e a reflexão sobre a prática fossem componentes chave, poderia permitir enquadrar as motivações que me moviam, evitar o que não desejava e, simultaneamente, lidar com questões de natureza ética que se me colocavam quando imaginava as exigências de tempo, energia, abertura e disponibilidade que a concretização deste projecto requeria dos professores com quem viesse a colaborar.

Com efeito, “o paradigma colaborativo” (Reason, 1988c, p. 18) admite a possibilidade de existência de trabalhos orientados por um amplo propósito comum no âmbito do qual podem ser definidos objectivos diferenciados (Bednarz, Desgagné, Couture, Lebuis, & Poirier, 1999; Castle, 1997; Hookey, Neal, & Donoahue, 1997; Kapuscinski, 1997; Orr, 1997; Ponte et al., 2003). Nesta medida, seria legítimo propor a professores o desenvolvimento de um projecto centrado na argumentação na aula de Matemática, mas cujo tema fosse suficientemente abrangente para possibilitar várias portas de entrada. Esta proposta permitir-me-ia investigar a problemática que me interessava, na medida em que envolveria o compromisso de trabalhar conjuntamente no sentido de imaginar e problematizar possibilidades e condições para que esta argumentação pudesse surgir e se desenvolvesse. Ao mesmo tempo, deixaria espaço para os professores, no âmbito do tema, poderem identificar questões pertinentes para si, reflectir sobre problemas que se lhe colocam e prosseguir intenções consideradas por si relevantes. Nesta medida, seriam também protagonistas no projecto e não meras fontes de fornecimento de dados que servem os propósitos do investigador e têm por finalidade responder a questões que apenas este coloca.

Compreender o trabalho do professor passa, na minha perspectiva, por ter acesso às suas práticas e aos contextos em que se desenvolvem, bem como a um tipo de reflexão que permita aceder aos seus pontos de vista. É este tipo de reflexão que permite, em particular, entender os propósitos, aspirações e desejos que o movem, as interpretações que faz da sua acção e onde se enraízam, como reconstrói esta acção visando perspectivar o futuro, questões, dúvidas ou problemas com que se debate, o que o entusiasma e o perturba, as suas incertezas e receios. Assim, pretendendo com a investigação que desejava realizar compreender o trabalho do professor no que se prende com o ensino da argumentação matemática, um projecto com as características daquele que imaginava viabilizaria aceder às suas práticas e a reflexões que sobre elas fizessem, ou seja, serviria os meus propósitos de investigação. Trar-me-ia, pois, benefícios. Além disso, acreditava que este projecto lhes possibilitaria participarem numa forma organizada e estruturada de questionamento e reflexão sobre aspectos da sua prática, valorizaria a subjectividade crítica (Reason, 1988b, 1994) que abre a porta a que as experiências subjectivas, tornadas conscientes, sejam integradas no próprio processo de investigação e permitiria a interacção entre todos os actores envolvidos enquanto via conducente a uma maior compreensão. Por tudo isto, esperava que pudessem usufruir de oportunidades de aprendizagem e enriquecimento, aspecto sublinhado por muitos investigadores ao abordarem mais-valias oriundas de trabalhos em colaboração que envolvem reflexão sobre práticas (por exemplo, Bednarz et al., 1999; Day, 1991; Jaworski, 1993, 2001; Olson, 1997; Ponte et al., 2003; Saraiva, 2001 e Serrazina, 1998).

Em suma, partia com a expectativa de que do trabalho conjunto todos pudéssemos tirar benefícios, admitindo a possibilidade destes não serem idênticos. Este aspecto parecia-me natural, uma vez que imaginava serem diferenciados os papéis que desempenharíamos, as responsabilidades que assumiríamos e os interesses e desejos que nos moviam, hipótese não excluída pelos trabalhos colaborativos (Bednarz et al., 1999; Clark et al., 1996; John-Steiner, Weber, & Minnis, 1998). E, assim, uma das questões éticas com que me confrontei ao imaginar um trabalho com professores focado num tema que me interessava — o que podem as pessoas com quem irei contactar beneficiar com a investigação? — foi ultrapassada pelas potencialidades que me parecia poderem advir para todos da natureza e características da própria metodologia adoptada no desenvolvimento da investigação.

Por último, importa sublinhar um aspecto implícito nas ideias anteriormente apresentadas, que me parece ser importante clarificar. O projecto a realizar com os professores, centrado no tema da argumentação matemática, não tinha por propósito incentivar, desencadear ou estudar o seu desenvolvimento profissional. Reconheço que podem existir contextos mais ou menos favoráveis ao desenvolvimento de cada professor, mas acredito, também, que este desenvolvimento é algo que parte de quem se desenvolve, o que pressupõe a existência de intencionalidade do sujeito no seu próprio processo de desenvolvimento (Guimarães, 2004). O que guiou as primeiras conversas com as professoras com quem trabalhei, foi analisar se estariam interessadas e disponíveis para se envolverem comigo num projecto focado na argumentação na aula de Matemática, ideia a que aderiram de imediato e com entusiasmo. Neste âmbito, o que lhes apresentei como sendo o meu interesse de investigação foi a compreensão do trabalho do professor orientado neste sentido. Foi nesta base que apoiámos o nosso acordo de colaboração e desenvolvemos o nosso trabalho que assumiu a forma de um projecto de investigação colaborativa. Quando o imaginei tinha expectativas, como anteriormente referi, de que dele poderiam advir mais-valias para os professores. Esta era, no entanto, uma consequência possível e não o elemento norteador do trabalho.

Com o início do trabalho conjunto emergiu a pertinência de dedicar uma atenção especial ao próprio processo de desenvolvimento do projecto. Quis perceber, a partir das perspectivas de todas as pessoas nele envolvidas, que aspectos podem ser particularmente relevantes ou problemáticos quando professores e o que usualmente se designa por investigadores colaboram na investigação de práticas de professores que, neste caso concreto, se centram no ensinar a argumentar em

Matemática. Foi este interesse que originou um dos objectivos do presente estudo e questões a ele associadas.

Objectivos e organização do estudo

Este estudo é orientado por dois objectivos: (a) descrever e analisar o trabalho de duas professoras orientado para o envolvimento dos seus alunos em actividades de argumentação matemática e (b) compreender potencialidades e problemas emergentes do desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa centrado na reflexão sobre as práticas destas professoras. Decorrentes destes objectivos, estabeleci as seguintes questões:

1. Qual a natureza do trabalho desenvolvido pelas professoras ao orientarem as suas práticas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática?

    - Que vertentes contempla a preparação das aulas? Que preocupações orientam este trabalho? Que aspectos sobressaem como podendo facilitar a emergência futura de actividades de argumentação matemática?

    - Em torno de que vertentes se organiza o seu trabalho nas aulas? Que aspectos influenciam e facilitam a emergência e desenvolvimento de actividades de argumentação matemática? Que dimensões se destacam pela sua relevância?

    - Que desafios enfrentam? O que os origina? Quais as suas principais incidências? Quais se destacam pela sua persistência?

2. Como vêem as professoras a sua experiência de participação no projecto? Que mais-valias lhes proporcionou esta experiência? Que aspectos do trabalho desenvolvido consideram particularmente relevantes ou problemáticos? O que facilitou ou constrangeu este trabalho?

Este documento está organizado em nove capítulos de que a introdução é o primeiro. O segundo e o terceiro constituem o enquadramento teórico. Centro-me, em primeiro lugar, na argumentação na aula de Matemática debruçando-me sobre o conceito de argumentação a partir de contributos oriundos da Filosofia e da literatura em educação matemática e sobre perspectivas relacionadas com o trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos neste tipo de actividades. No terceiro capítulo abordo a problemática da colaboração e investigação colaborativa, procurando analisar diferentes significados e modalidades de desenvolvimento, bem como clarificar a perspectiva adoptada para o projecto a propor aos professores.

O quarto capítulo é dedicado à metodologia de investigação. Refiro as opções metodológicas e sua fundamentação, de que modo materializei a perspectiva sobre colaboração numa proposta de trabalho a negociar com as professoras e porque designo o projecto desenvolvido como sendo de investigação colaborativa. Indico, também, os critérios adoptados para contactar com possíveis membros da equipa, os métodos de recolha de informação e procedimentos relativos à constituição do *corpus* e análise de dados.

No capítulo V descrevo e analiso o trabalho desenvolvido ao longo do projecto apoiando-me nas minhas reflexões e nas perspectivas de Anita e Rebeca, as professoras com quem trabalhei, sobre a experiência vivida. Este trabalho decorreu entre Novembro de 2001 e início de Agosto de 2003; organizou-se em duas fases, correspondendo o período de trabalho mais intenso aos primeiros quinze meses. Os alunos das duas turmas envolvidas no projecto frequentavam o 8º de escolaridade quando o iniciámos.

Os três capítulos seguintes — VI, VII e VIII — focam-se na análise do trabalho de Anita e Rebeca orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Este trabalho é, no entanto, olhado a partir de diferentes pontos de observação. Utilizando uma metáfora, no caso dos capítulos VI e VII, observei ao "microscópio" um pequeno conjunto das aulas que cada uma das professoras leccionou no âmbito das actividades do projecto, descrevendo-as e analisando-as em detalhe (quatro aulas). Esta análise é antecedida por uma breve apresentação destinada a dar a conhecer aspectos de quem são como pessoas e professoras, das suas escolas e turmas. Em qualquer dos casos, entre a primeira destas aulas e as restantes três, há um espaço temporal amplo: cerca de sete meses, no caso de Rebeca, e dez no de Anita. Para elaborar o capítulo VIII distanciei o meu ponto de observação. Usei um "macroscópio" para poder abarcar a globalidade das aulas de qualquer uma das professoras e as reflexões apresentadas a seu propósito e procurei analisar holística e diacronicamente o seu trabalho relacionando-o com as actividades do projecto. Consciente de que a "investigação, tal como a diplomacia, é a arte do possível" (Patton, 2002, p. 12), tentei, assim, compatibilizar um olhar "micro", possibilitador da emergência de detalhes relevantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática mas limitador de uma visão de conjunto, com um olhar "macro" que permite esta visão mas pode deixar escapar aspectos importantes. Termino apresentando no capítulo IX as conclusões do estudo.

Capítulo II

-

A argumentação na aula de Matemática

Em filosofias tradicionais da Matemática, o ideal matemático é o de um universo apodíctico no qual a validade dos enunciados deriva de fundamentos absolutos e auto-evidentes através de encadeamentos de raciocínios dedutivos. Nesta concepção, persegue-se a busca de uma linguagem artificial que permita afastar ambiguidades e aquilo que se prova é considerado necessário e irrefutável. A validade e o carácter de necessidade é garantido pelo formalismo da linguagem. Em tempos recentes, tem-se, no entanto, assistido a um forte questionamento desta concepção sobre a natureza da Matemática. Assinala-se o seu carácter redutor, destaca-se a necessidade de analisar em profundidade as práticas matemáticas reais, tanto actuais como passadas, e sublinha-se a importância de encontrar abordagens filosóficas que enquadrem e descrevam estas práticas de modo a serem consideradas as múltiplas vertentes da actividade matemática, em lugar de uma filosofia que prescreva o que devem ser. Para designar, globalmente, estas abordagens Tymoczko (1986) usa o termo "quasi-empiricismo" e Hersh (1997), defendendo que "a Matemática deve ser entendida como uma actividade humana, um fenómeno social, parte da cultura humana, desenvolvida historicamente e apenas inteligível num contexto social" (p. xi), refere-se a esta perspectiva como "humanista". Ambas as perpectivas, significativamente influenciadas pelo pensamento de Lakatos (1984), têm subjacente uma epistemologia falibilista.

Uma abordagem filosófica quasi-empiricista ou humanista traz para primeiro plano aspectos negligenciados pelas "escolas de pensamento absolutistas" (Ernest, 1991) preocupadas em garantir, de uma vez por todas, a certeza matemática. Entre estes aspectos estão a formulação de conjecturas, a apresentação de explicações ou justificações matemáticas que não satisfazem os cânones de rigor impostos à prova e práticas argumentativas envolvidas, em particular, no estabelecimento de conjecturas razoáveis e nos processos de comunicação entre os matemáticos.

René Thom (1973) afirmava que toda a pedagogia da Matemática tem subjacente, se bem que nem sempre de uma forma muito articulada e coerente, uma filosofia da Matemática. Aceitando esta perspectiva, a valorização da argumentação na aula de Matemática não será independente destas novas abordagens à filosofia da Matemática surgidas no século XX, embora elas não sejam o único factor de influência.

No entanto, apesar da frequente utilização da palavra "argumentação" em educação matemática e do valor que lhe é atribuído, a noção de argumentação não tem sido amplamente discutida, contrariamente ao que acontece, por exemplo, com os conceitos de prova ou demonstração (Pedemonte, 2002). De que se fala, quando se fala em argumentação? E o que há de particular na argumentação em Matemática ou na aula de Matemática? Dedico a primeira parte deste capítulo a uma reflexão sobre estas questões tendo por referência o pensamento de alguns filósofos que se debruçaram sobre o tema e literatura do âmbito da educação matemática. A segunda parte foca-se em aspectos relativos ao ensino orientado para a construção de uma cultura de argumentação.

À volta dos significados de argumentação e de argumentação em Matemática

A argumentação presente na vida quotidiana, quer esta assuma a forma oral, escrita ou visual, é considerada por Oléron (1996) como um percurso "através do qual uma pessoa — ou um grupo — tenta conduzir um auditório a adoptar uma posição recorrendo a apresentações ou asserções — argumentos — que visam mostrar a sua validade ou fundamento" (p. 4). Esta definição permite destacar três características fundamentais da argumentação. Em primeiro lugar, é um fenómeno social, na medida em que mobiliza diversas pessoas. Em segundo lugar é um percurso através do qual se procura influenciar alguém. Em terceiro lugar, ao fazer intervir justificações e elementos de prova a favor da tese defendida, é um processo que comporta elementos racionais pelo que tem ligações com o raciocínio e a lógica.

Mobilizando raciocínios, linguagem, símbolos, imagens, a argumentação põe em jogo relações entre pessoas, mobiliza intenções, estratégias, processos de persuasão, e situa-se num contexto social, científico, económico, político, ideológico. Pode, assim, ser analisada através de múltiplas disciplinas, o que não facilita a obtenção de um ponto de vista claro e coerente sobre o seu significado e natureza. De facto, ao debruçarmo-nos sobre a argumentação, podemos interessar-nos pela sua articulação com a lógica, pela sua inserção na linguagem e nas actividades linguísticas, pelo desenvolvimento da capacidade de argumentar nas crianças e adolescentes, pelo seu papel e importância na produção de conhecimento científico, etc.

Não existindo um quadro de referência unanimemente aceite que permita fixar um conceito de argumentação e variando o uso do termo consoante as disciplinas que o solicitam (Plantin, 1990), opto por ter por fio condutor o pensamento de Perelman e Toulmin, articulando-o com considerações relativas à argumentação na aula de Matemática. Para analisar o pensamento destes filósofos apoio-me em obras da sua autoria bem como da de outros autores que se debruçaram sobre os seus trabalhos sobre argumentação (Carrilho, 1992; Coelho, 1999; Grácio, 1992, 1993a, 1993b; Oléron, 1996; Plantin, 1990). O valor dos trabalhos de Perelman e Toulmin é fortemente reconhecido em diversos países, entre os quais Portugal, e ambos os filósofos são referidos por vários investigadores que estudaram questões associadas à argumentação na aula de Matemática (Balacheff, 1999; Boero, 1999; Duval, 1999; Krummheuer, 1995; Pedemonte, 2002).

Toulmin e Perelman, em colaboração com Olbrechts-Tyteca, publicaram no mesmo ano, 1958, duas obras respectivamente intituladas *The uses of argument* e *Traité de l'argumentation: La nouvelle rhétorique*, "que alterariam de modo profundo a compreensão do trabalho argumentativo"[2] (Carrilho, 1992, pp. 21-2). Apesar das diferenças no pensamento destes filósofos, ambos criticam fortemente a limitação da lógica à lógica formal ocorrida sob a influência da lógica matemática e de perspectivas filosóficas logicistas e formalistas e procuram autonomizar o estudo da argumentação de modo a poder contemplar os raciocínios em que a forma não se pode separar do conteúdo.

Estruturo esta secção em três partes principais. Em primeiro lugar, abordo, brevemente, a origem da teoria da argumentação. Em segundo lugar, foco-me em aspectos do pensamento de Perelman e, por último, centro-me no pensamento de Toulmin. Termino cada uma destas duas últimas partes apoiando-me em contributos destes dois filósofos para equacionar aspectos da argumentação em Matemática.

Origem da teoria da argumentação

De acordo Oléron (1996), foi "Aristóteles o primeiro autor que expôs uma concepção sistemática da argumentação" (p. 5) considerando-a, na sua obra *Tópicos*, essencialmente sob o ângulo do raciocínio e reservando para a *Retórica* os aspectos relativos à persuasão de um auditório. Assim, através destas duas obras, a argumentação em Aristóteles aparece, na perspectiva deste autor, "como a

[2] No presente trabalho apoiar-me-ei em traduções destas obras intituladas, respectivamente, *Les usages de l'argumentation* (Toulmin, 1993) e *Tratado da argumentação: A nova retórica* (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999). Abreviadamente, refiro esta última através da expressão *"Tratado da argumentação"*.

associação ou a coordenação de um procedimento racional e de um percurso social" (idem).

Para Coelho (1999), os dois modos básicos de raciocinar propostos por Aristóteles foram a demonstração analítica e a argumentação dialéctica. Segundo este autor a demonstração analítica, para Aristóteles, funda-se em proposições evidentes — proposições que garantem, por si mesmas, a própria certeza — e conduz o pensamento a conclusões verdadeiras, pelo que é sobre o estudo dos silogismos analíticos que se alicerça toda a lógica formal. É nos *Analíticos* que Aristóteles estuda as formas de inferência válida, que permitem inferir, a partir de determinadas premissas, hipóteses, uma conclusão que daí resulta necessariamente, pelo nexo intrínseco que se gera entre os juízos envolvidos (Perelman, 1993). Esta inferência caracteriza-se por ser válida independentemente do conteúdo das proposições em jogo e por "estabelecer uma relação entre a *verdade* das premissas e da conclusão" (idem, pp. 21-2, destaque no original). Uma vez que a verdade é "uma propriedade das proposições, independente da opinião dos homens, os raciocínios analíticos são demonstrativos e impessoais" (idem, p. 22). Foi o interesse de Aristóteles pelos raciocínios analíticos que, segundo Perelman, lhe valeu "ser considerado, na história da filosofia, como o pai da lógica formal" (idem, p. 21).

Contrariamente aos raciocínios analíticos, a argumentação dialéctica expressa-se através de argumentos sobre enunciados prováveis dos quais se poderiam extrair conclusões apenas verosímeis (Coelho, 1999). Segundo Perelman (1993), para Aristóteles é dialéctico um raciocínio cujas premissas de partida são constituídas por opiniões geralmente aceites. A expressão "geralmente aceite" "tem um aspecto qualitativo, o que o aproxima mais do termo 'razoável' do que do termo 'provável'" (p. 22) e não se deve ser interpretada "como uma probabilidade calculável (idem).

Assim, os raciocínios dialécticos, partindo do que é aceite, não são inferências válidas, constringentes e impessoais, mas consistem antes em argumentações visando a aceitação ou a rejeição de teses em debate; incluem argumentos mais ou menos fortes, mais ou menos convincentes e que nunca são puramente formais. O raciocínio dialéctico difere, pois, do analítico por não partir de premissas verdadeiras e imediatas, mas antes de premissas geralmente aceites, por chegar, portanto, não a proposições necessárias mas a proposições verosímeis (Grácio, 1993b). É o estudo dos raciocínios dialécticos que faz de Aristóteles "igualmente o pai da teoria da argumentação" (Perelman, 1993, p. 21).

A demonstração analítica e a argumentação dialéctica constituem duas maneiras diferentes de raciocinar o que não significa que no pensamento de Aristóteles haja uma hierarquia entre elas: "não se excluem mutuamente, não se sobrepõem, não se substituem uma à outra" (Coelho, 1999, p. xii). Mais tarde, primeiro pelas mãos do cristianismo e depois do racionalismo, perdeu-se, segundo Coelho, esta equiparação entre a importância dos raciocínios analítico e dialéctico. Privilegiou-se, na perspectiva deste autor, o raciocínio analítico e a dialéctica, que ao longo dos tempos nem sequer conservou o seu sentido original, foi frequentemente relegada para o plano dos sofismas e passou a ser identificada com as técnicas de persuasão sem compromisso ético, com os discursos vazios feitos por oradores hábeis em convencer um auditório quaisquer que fossem as teses defendidas. Assim, o raciocínio dialéctico, tal como foi concebido por Aristóletes, foi "vítima de uma grande injustiça" (idem, p. xiii):

> O raciocínio dialéctico, já nos *Tópicos*, é distinguido com clareza do chamado silogismo erístico, alicerçado em premissas apenas *aparentemente* prováveis. Quer dizer, ao tomar como objecto de sua preocupação filosófica o estudo da maneira específica de raciocinar por argumentos, Aristóteles não pretendeu que qualquer encadeamento entre proposições, que desrespeitasse os postulados da demonstração analítica, pudesse, tão-somente pela força da retórica de quem o sustentava, alcançar o estatuto de argumentação dialéctica. (Coelho, 1999, p. xiii, destaque no original).

Do legado aristotélico, a filosofia, na perspectiva de Coelho (1999), reteve durante vinte e três séculos, fundamentalmente, o modo analítico de raciocinar, não havendo grandes preocupações em resgatar a dialéctica como uma arte do diálogo e da controvérsia, como "um saber necessário, sério, pertinente, sujeito a regras próprias e, portanto, controlável" (p. xiv). Criticando fortemente o racionalismo herdado de Descartes e as fortes limitações que este impôs à concepção de actividade racional, Perelman propôs-se reabilitar a retórica e o raciocínio dialéctico de Aristóteles não se limitando, contudo, a transpor acriticamente para os tempos de hoje o seu pensamento (Coelho, 1999). É neste contexto, que demarca a teoria da argumentação da teoria da demonstração, defendendo que sob influência de Kant e dos lógicos matemáticos, a lógica moderna, tal como se desenvolveu desde os meados do século XIX, foi identificada com “a lógica formal, isto é, com os raciocínios analíticos de Aristóteles, e negligenciou completamente os raciocínios dialécticos, considerados como estranhos à lógica” (Perelman, 1993, p. 23). Segundo este filósofo, esta opção constitui um erro pois “se é inegável que a lógica formal constitui uma disciplina separada que se presta, como as matemáticas, a operações e ao cálculo, é também inegável que raciocinamos, mesmo quando não calculamos” (idem, p. 24). Em discussões públicas ou deliberações pessoais, quando se apresentam argumentos a favor ou contra uma tese ou se critica ou refuta uma crítica, na sua perspectiva, “não se demonstra, como em Matemática, mas argumenta-se” (idem). Para a lógica poder enquadrar o estudo do raciocínio sob todas as suas formas, Perelman sublinha, assim, a importância de “completar a teoria da demonstração, desenvolvida pela lógica formal, com uma teoria da argumentação estudando os raciocínios dialécticos de Aristóteles” (idem).

Racionalidade, adesão e justificação: O contributo de Perelman

Em termos globais, a questão de fundo da vasta e variada obra de Perelman é a questão da racionalidade: “Como compreender a actividade racional? Como conceber a nossa faculdade de raciocinar e de provar? Em que consiste a competência racional e quais os domínios que podem ser abrangidos por ela? Como conceber a razão?” (Grácio, 1993a, p. 5). De acordo com Perelman e Olbrechts-

Tyteca (1999), ao fazer da evidência[3] a marca da razão, Descartes não considerou racionais senão as demonstrações que a partir de ideias claras e distintas, estendiam, através de provas necessariamente verdadeiras, a evidência dos axiomas aos teoremas. Esta tendência acentuou-se ainda mais quando sob a influência de lógicos-matemáticos, a lógica foi limitada à lógica formal, ou seja, ao estudo dos meios de demonstração utilizados nas ciências matemáticas. Como resultado "os raciocínios alheios ao campo puramente formal escapam à lógica e, com isso, também à razão" (idem, pp. 2-3). Ora, segundo Perelman (1993), a razão está num discurso partilhado e é "graças à intervenção sempre renovada dos outros que melhor se pode distinguir, até nova ordem, o subjectivo do objectivo" (p. 54). Assim, muito do seu trabalho encerra uma forte crítica à lógica formal e foi dedicado a autonomizar o registo argumentativo face a esta lógica.

Neste âmbito, Perelman contrapõe às perspectivas absolutistas, segundo as quais o fundamento *tudo* deve fundar de uma forma radical, a ideia de fundamento como fundamento *suficiente*, ou seja, fundamento "que funciona para uma situação determinada, que não é de momento contestado, mas que de forma alguma é incontestável" (Grácio, 1993b, p. 43). Assim sendo, fundamentar "é justificar as transformações que se operam relativamente a um quadro de referências anterior e não estabelecer, de uma vez por todas e a partir do zero, o critério a partir do qual nada mais necessitaria de justificação" (idem, p. 44).

Nas obras de Perelman é, frequentemente, afirmado que racionar e provar não é apenas calcular, nem caminhar simplesmente de axiomas e regras de um sistema para teoremas (Grácio, 1993b). Ao procurarmos mostrar a conformidade e coerência entre convicções que temos e as opções a que elas conduzem, ao esforçamo-nos por apresentar razões que justificam asserções ou posicionamentos, ao tentarmos convencer-nos a nós próprios ou a outros do valor que sustenta a sua

[3] Para Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999) "é *a ideia de evidência* como característica da razão que cumpre criticar se quisermos deixar espaço para uma teoria da argumentação que admita o uso da razão para dirigir a nossa acção e para influenciar os outros. A evidência é concebida, ao mesmo tempo, como a força à qual toda a mente normal tem de ceder e como sinal de verdade daquilo que se impõe por ser evidente" (p. 4, destaque no original).

razoabilidade, também raciocinamos. Grácio apresenta a seguinte síntese sobre a racionalidade defendida por Perelman:

> Mas o que caracteriza esta racionalidade não escorada pelo critério de evidência? Vimos já: é uma racionalidade que implica continuidade, atenção aos precedentes, justificação do novo a partir de uma referência ao pré-existente; uma racionalidade dialéctica em que a razão e a vontade não estão separadas, mas articuladas numa conjunção de exigências que são as do razoável; uma racionalidade ligada, não à ideia de verdade, mas às ideias de adesão e de justificação; não às ideias extremas de necessidade ou arbitrariedade, mas à ideia de razão em situação, exigindo essa situação que a ordem da razão seja, antes de mais, uma ordem adaptativa. (Grácio, 1993b, p. 82)

Perelman, apoiando-se, em particular, no pensamento de Popper, defende que se suprimirmos a crença na existência de verdades eternas e na ideia de que o erro apenas deriva da intervenção humana e se, em lugar disso, situarmos o pensamento científico num contexto histórico e cultural, a admissão de uma hipótese apenas pode ser apoiada por "boas razões, reconhecidas como tal por outros homens, membros da mesma comunidade científica" (Perelman, 1993, p. 170). Assim, o "estatuto do conhecimento deixa de ser impessoal, pois todo o conhecimento científico se torna um pensamento humano, falível, situado e sujeito à controvérsia. Toda a ideia nova deverá ser sustentada por argumentos provenientes do método próprio da disciplina, apreciados em função desta" (idem). Deste modo, a racionalidade, o saber e a acção são, para Perelman, essencialmente falíveis. No entanto, a falibilidade não é equivalente a arbitrariedade, nem deve ser entendida em oposição à ideia de infalibilidade que, durante muitos séculos, esteve associada à razão cartesiana e, muito em especial, ao conhecimento matemático. Falibilidade é

> a própria expressão da nossa condição humana, de uma natureza que não se autoproduz, que não se faz integralmente a si mesma, mas que é sempre condicionada, na sua criatividade, pelo passado, pela tradição e pelos sentidos que historicamente moldam e são moldados pelos contextos e quadros de referência a partir dos quais a vida humana se organiza. (Grácio, 1993b, p. 23)

A finalidade da teoria da argumentação "é o estudo das técnicas discursivas que permitem provocar ou aumentar a adesão dos espíritos às teses que se lhes apresentam ao assentimento" (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 4). Esta teoria, designada por Perelman (1993) por "nova retórica (ou uma nova dialéctica)" (p. 24), defende que todo o discurso que tenda a influenciar uma ou várias pessoas, a dirigir uma acção e "que não aspira a uma validade impessoal é do domínio da retórica" (idem, p. 172). Neste sentido, esta teoria engloba, "como caso particular, a dialéctica da antiguidade, técnica da controvérsia" (idem) e "cobre o imenso campo do pensamento não formalizado" (idem, p. 173). Nas palavras de Perelman (1987), "existe argumentação desde que o discurso não seja redutível a um cálculo" (p. 237). Neste contexto, é dado um papel de relevo à justificação considerada de modo muito diferente da noção de demonstração (Grácio, 1993b).

A opção pela aproximação do *Tratado da argumentação* à retórica em vez de à dialéctica, concebida pelo próprio Aristóteles como a arte de raciocinar a partir de opiniões geralmente aceites, prende-se, segundo os seus autores, com várias razões de que destacam duas. Por um lado, evitar o risco de confusão que a palavra dialéctica poderia trazer, uma vez que desde "Hegel e por influência de doutrinas nele inspiradas ela assumiu um sentido muito distante do seu sentido primitivo, geralmente aceite na terminologia filosófica contemporânea" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 5). Por outro lado, e esta é a razão que consideram mais importante, porque na Antiguidade, embora o raciocínio dialéctico fosse visto como paralelo ao analítico, não foi aproveitada a ideia de que a dialéctica diz respeito a premissas a que se adere com uma intensidade variável: as opiniões de que falava Aristóteles. A importância da adesão das pessoas a quem se dirige um discurso, às teses que se lhe apresentam foi, antes, destacada por todas as teorias antigas da retórica. Assim, a aproximação da teoria da argumentação à retórica tem também por objectivo destacar que "é em função de um auditório que toda a argumentação se desenvolve" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 6). A *adesão* e o *acordo* são vistos por Grácio (1993b), como corolários da noção de auditório proposta por Perelman.

O *Tratado da argumentação* incide sobre as provas que Aristóteles designa por dialécticas. Da retórica tradicional os autores retêm a ideia de auditório, embora destaquem que são ultrapassados alguns dos limites desta retórica e deixados de lado aspectos considerados importantes na Antiguidade. Por exemplo, um dos aspectos que diferencia a nova retórica da retórica da antiguidade é, segundo Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999), ela não "limitar o estudo da argumentação àquela que é adaptada a um público de ignorantes" (p. 7). Contrariamente, a retórica tradicional apresentava-se como "o estudo de uma técnica para o uso do vulgo, impaciente para chegar rapidamente a conclusões" (idem). Mais concretamente, a teoria da argumentação concebida por Perelman

> diz respeito aos discursos dirigidos *a todas as espécies de auditórios*, trate-se de uma turba reunida na praça pública ou de uma reunião de especialistas, quer nos dirijamos a um único indivíduo ou a toda a humanidade; ela examinará mesmo os argumentos que dirigimos a nós mesmos aquando de uma deliberação íntima. (Perelman, 1993, p. 24, destaque no original)

Uma vez que o objecto da teoria da argumentação, é o estudo do discurso não demonstrativo, ou seja, a análise dos raciocínios que não se limitam a inferências formalmente correctas, a cálculos mais ou menos mecanizados, esta teoria "cobre todo o campo do discurso que visa convencer ou persuadir, *seja qual for o auditório a que se dirige e a matéria a que se refere*" (Perelman, 1993, p. 24, destaque no original). Poder-se-á, na perspectiva de Perelman, "completar, se parecer útil, o estudo geral da argumentação com metodologias especializadas segundo o tipo de auditório e o género de disciplina" (idem, p. 25). É, assim, excluído do campo da argumentação aquilo que não é mediado pela linguagem natural e pelo raciocínio, isto é, tudo aquilo que não se insere no domínio do discurso.

Como anteriormente referi, a origem da elaboração de uma teoria da argumentação situa-se, para Perelman, na recusa de reduzir a lógica à lógica formal. Surge com o objectivo de procurar para a razão um campo entre o "tudo é permitido" e a identificação da lógica formal com a própria racionalidade. Trata-se, como refere Meyer (1999), de procurar uma racionalidade que já não pode evitar os debates e deve, portanto, tratá-los e analisar os argumentos que governam as decisões. Trata-se de nos abrirmos ao múltiplo e ao não coercivo, de aceitarmos o pluralismo tanto nos valores como nas opiniões. Neste âmbito, uma vertente significativa do trabalho de Perelman incidiu sobre a diferenciação entre argumentação e demonstração.

Argumentação versus demonstração

Ainda que a ideia de uma lógica formal seja conhecida desde Aristóteles, a partir dos meados do século XIX e sob a influência de lógicos matemáticos, generaliza-se, segundo Perelman (1992), a ideia de que a lógica e a lógica formal são sinónimos, eliminando-se toda a concepção de uma lógica informal. Esta tendência de identificação da lógica formal com a lógica moderna ocorre num contexto em que esta é caracterizada "por três princípios metodológicos: o uso de uma língua artificial, o formalismo e o objectivismo" (idem, p. 11). É o recurso a uma linguagem artificial que permite eliminar os equívocos, as dificuldades e as controvérsias, dificilmente elimináveis quando se trata de linguagens naturais. Além disso, pressupõe-se que a lógica moderna

> não se ocupe senão das propriedades objectivas: verdade, falsidade, probabilidade, necessidade, etc, independentes das atitudes dos homens, dos que eles pensam ou crêem. O mesmo se passará com os axiomas do sistema, enumerados à partida, bem como as regras de substituição e dedução que indicam quais as operações permitidas, conformes às regras, e que permitirão distinguir uma dedução correcta de uma dedução incorrecta. (Perelman, 1992, p. 12)

Na lógica moderna os sistemas formais, segundo Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999), já não estão relacionados "com uma evidência racional qualquer" (p. 15). O lógico tem liberdade para elaborar a linguagem artificial do sistema que constrói, para determinar os símbolos e combinações de símbolos que poderão ser utilizados, para decidir quais são os axiomas deste sistema e para dizer quais as regras de transformação que permitem deduzir das expressões válidas, outras expressões igualmente válidas no interior do sistema: "a única obrigação que se impõe ao construtor de sistemas axiomáticos formalizados e que torna as demonstrações coercivas, é a de escolher signos e regras que evitem dúvidas e ambiguidades" (idem). Daqui resulta que seja possível, "sem hesitar e mesmo mecanicamente" (idem) estabelecer se uma sequência de símbolos é admitida no sistema, se tem uma forma igual a outra sequência de símbolos e se é considerada válida. Quaisquer considerações relativas à origem dos axiomas ou das regras de dedução, bem como ao papel que se presume que o sistema axiomático represente na elaboração do pensamento, são alheias, na perspectiva destes autores, à lógica assim concebida, na medida em que saem do âmbito do formalismo em questão:

> A busca da univocidade indiscutível chegou a levar os lógicos formalistas a construírem sistemas nos quais não há a preocupação com o sentido das expressões: ficam contentes se os signos introduzidos e as transformações que lhes dizem respeito ficam fora de discussão. Deixam a interpretação dos elementos do sistema axiomático para os que o aplicarão e terão de se preocupar com a adequação ao objectivo pretendido. (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 16)

Enquanto a lógica formal é a lógica da demonstração, a lógica informal, aquela que justifica a acção, que permite resolver uma controvérsia, tomar uma decisão razoável, é a lógica da argumentação (Perelman, 1992). Apoiando-se sobre factos, princípios, opiniões, lugares, valores admitidos pelo auditório, a lógica informal não pode aspirar à objectividade da lógica formal. Assim, não se preocupa com a verdade abstracta, categórica ou hipotética, mas com a adesão. Toda a argumentação *"visa a adesão dos espíritos e, por isso mesmo, pressupõe a existência de um contacto intelectual*" (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 16, destaque no original). Deste modo, quando se trata de argumentar, de influenciar através de um discurso a intensidade da adesão de um auditório a certas teses, já não é possível considerar irrelevantes as condições psíquicas e sociais sem as quais a argumentação ficaria sem objecto e sem efeito: "uma argumentação é necessariamente situada" (Perelman, 1987, p. 234).

Tendo por referência as ideias apresentadas por Perelman (1987, 1992, 1993), Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999) e Grácio (1993b), apresento, em seguida, uma síntese dos principais aspectos através dos quais Perelman diferencia argumentação de demonstração.

Em primeiro lugar, na argumentação pretende-se transferir para as conclusões a *adesão* concedida às premissas, contrariamente ao que acontece na demonstração em que a finalidade é provar a verdade da conclusão a partir das verdades das premissas. Na argumentação, se o orador não se quiser arriscar a fracassar tem que se assegurar que parte de premissas que beneficiam de uma adesão suficiente: "aquele que na sua argumentação não se preocupa com a adesão do auditório às premissas do seu discurso comete a mais grave das faltas: a petição de princípio" (Perelman, 1993, p. 41).

Em segundo lugar, o contacto entre o orador e o auditório não se estabelece sem a existência de um meio de comunicação. Na argumentação, esta comunicação desenrola-se na linguagem natural que pode ser adaptada consoante as necessidades. A ambiguidade não se encontra excluída à partida, podendo o grau de precisão ser variável segundo o género de discurso. O mesmo não acontece com a demonstração em que a linguagem é "artificial, tal como a linguagem simbólica da lógica ou da aritmética, da qual toda a ambiguidade deve ser previamente eliminada (...) a verdade ou a falsidade de uma proposição devem resultar unicamente da sua forma" (Perelman, 1987, p. 236). Para poder transformar-se uma argumentação numa demonstração é, assim, "necessário precisar os termos utilizados, eliminar toda a ambiguidade, retirar ao raciocínio qualquer possibilidade de múltiplas interpretações" (Perelman, 1993, p. 73).

Em terceiro lugar, enquanto que "a demonstração é independente de qualquer sujeito, até mesmo do orador, uma vez que um cálculo pode ser efectuado por uma máquina" (Perelman, 1987, p. 235), uma argumentação, não pode ser concebida de uma maneira impessoal. Pelo contrário, para que seja efectiva é essencial que esteja adaptada ao auditório a quem se dirige. É necessário que quem argumenta reconheça, naqueles que se propõe influenciar com o seu discurso, as capacidades e as qualidades de um ser com o qual a comunicação é possível e procure ganhar a sua adesão intelectual. Além disso, é fundamental que estes lhe prestem alguma atenção, que estejam dispostos a escutar: "o discurso argumentativo não é um monólogo onde não existe qualquer preocupação em relação aos outros (...) A argumentação é essencialmente comunicação, diálogo e discussão" (Perelman, 1987, p. 235).

Em quarto lugar, uma demonstração ou é correcta ou incorrecta, constringente no primeiro caso e sem valor no segundo. Uma demonstração correcta é aquela que está em conformidade com as regras explicitadas em sistemas formalizados e nela os axiomas não estão em discussão: "aquele que quisesse justificar a escolha dos axiomas deveria, como já Aristóteles notou, nos seus *Tópicos*, recorrer à argumentação (Perelman, 1993, p. 29). "Efectuando-se toda a demonstração no seio de um sistema cuja coerência se prova ou pressupõe e cujos axiomas são tidos como verdadeiros, a verdade da conclusão demonstrada, ou pelo menos a sua probabilidade calculável, impõe-se sem discussão" (idem, p. 67). Diferentemente, na argumentação não se trata de mostrar que a verdade passa das premissas para a conclusão, mas que se pode fazer admitir o carácter razoável de uma decisão a partir daquilo que o auditório já aceita, das teses a que adere com uma intensidade suficiente (Perelman, 1992). Neste âmbito, o estatuto dos elementos que intervêm numa argumentação não pode ser rígido como acontece num sistema formal. Este estatuto "é função da adesão efectiva ou presumida de um auditório" (Perelman, 1993, p. 67). Deste modo, "os argumentos que se apresentam em apoio de uma tese não a implicam de forma necessária" (idem, p. 68); não são correctos ou incorrectos no absoluto, mas antes mais ou menos fortes, mais ou menos pertinentes, mais ou menos convincentes.

Em quinto lugar, enquanto que numa demonstração a ordem pela qual são apresentados os axiomas e as diversas etapas não é importante desde que se possa percorrer o encadeamento através da aplicação das regras de inferência adoptadas, na argumentação, a ordem pela qual se apresentam os argumentos é da maior importância para os efeitos por ela produzidos: "a ordem de apresentação dos argumentos modifica as condições da sua aceitação" (Perelman, 1993, p. 159).

Por último, no que se prende com a questão da amplitude da argumentação, nesta "nunca se sabe, antecipadamente, e ao certo, qual o limite para a acumulação útil de argumentos" (Grácio, 1993b, p. 76), contrariamente à demonstração em que uma só prova basta para estabelecer a verdade de uma conclusão. A apresentação de demonstrações diferentes pode justificar-se por questões de simplicidade ou elegância, mas não de necessidade.

Resumo na tabela 1 as principais diferenças entre argumentação e demonstração segundo a perspectiva perelmaniana, organizando-as em torno de seis itens.

Tabela 1: Perelman — Demonstração *Versus* Argumentação

Itens considerados	Demonstração	Argumentação
Finalidade	Preocupa-se com a verdade abstracta, categórica ou hipotética; procura-se provar a verdade da conclusão a partir da verdade das premissas.	Não se preocupa com a verdade abstracta, categórica ou hipotética, mas com a adesão; procura-se transferir para a conclusão a adesão concedida às premissas.
Linguagem	Artificial; é exigida uma definição precisa dos termos com que se opera e uma eliminação prévia de toda a ambiguidade.	Comum ou adaptada às necessidades de uma ou de outra disciplina; a ambiguidade não se encontra previamente excluída.
Relação com os sujeitos	É independente de qualquer sujeito, podendo mesmo ser efectuada por uma máquina. A avaliação das conclusões que o orador apresenta é independente da ideia que o auditório tem deste.	Não pode ser concebida de uma maneira impessoal. Há uma interacção constante entre quem argumenta e o auditório. É necessariamente situada e, essencialmente, comunicação, diálogo, discussão.
Valor	Correcta, logo constringente, forçosa, necessária, ou incorrecta, logo sem valor. A demonstração correcta é a que está em conformidade com as regras explicitadas em sistemas formalizados. Raciocina-se sempre no interior de um dado sistema supostamente admitido. Os axiomas não estão em discussão; não há qualquer preocupação em saber se são ou não aceites pelo auditório.	Pode ter mais ou menos força, ser mais ou menos plausível, mas não é correcta ou incorrecta. O ponto de partida são factos, princípios, opiniões, lugares, valores admitidos pelo auditório. Tudo pode ser sempre recolocado em questão; as premissas são frágeis.
Amplitude	A demonstração de uma proposição dispensa e torna supérfluas outras demonstrações.	Nunca se sabe ao certo e antecipadamente qual o limite para a acumulação útil de argumentos.
Ordem	Não é importante a ordem pela qual são apresentados os axiomas e etapas desde que o encadeamento possa ser percorrido utilizando as regras de inferência adoptadas.	A ordem pela qual se apresentam e dispõem os argumentos é da máxima importância para os efeitos produzidos pela argumentação.

Na argumentação, os meios de prova utilizados "não são demonstrações, mas justificações. Eles não visam a imposição de uma certeza indubitável, mas a obtenção de adesão"[4] (Grácio 1993b, p. 78). Deste modo, a prova é organizada como um conjunto de processos que tendem a apoiar a plausibilidade de uma tese, o que não significa a impossibilidade de outras teses eventuais. A prova não é, "apenas, o exercício de uma razão pura e calculadora que, com a sua operacionalidade imutável e na sua funcionalidade impessoal e an-histórica, opera" (idem, p. 79). O acto de provar remete, antes de mais, para as condições concretas de utilização da linguagem natural, com as possibilidades que lhes estão associadas de conferir a uma mesma expressão sentidos múltiplos por vezes inteiramente novos, e de recorrer a metáforas e interpretações controversas. Trata-se assim, de uma prova onde a necessidade de interpretar se apresenta como uma regra e que se realiza "nas e para as situações concretas a partir das quais se elabora e relativamente às quais se apresenta como uma justificação razoável de uma opção" (idem, p. 79).

Tendo em conta as ideias anteriormente apresentadas, constata-se que a demonstração considerada por Perelman é a demonstração formal de que a Matemática e, sobretudo, a Lógica fornecem exemplos. É esta noção de demonstração, em que as operações lógicas são independentes do conteúdo sobre o qual incide o raciocínio, que lhe permite distingui-la da de argumentação e foi, precisamente, o desenvolvimento da lógica formalizada, que lhe possibilitou separar argumentação de demonstração. No discurso argumentativo o meio de comunicação usado é a linguagem natural adaptada, se necessário, às necessidades de disciplinas particulares e a lógica que lhe está subjacente é a informal que Perelman contrapõe à lógica formal. Argumentar pressupõe diálogo, discussão, escuta e a sua finalidade é obter daquele(s) a quem se dirige quem argumenta, a adesão a determinadas teses, pelo que não pode ser concebida de uma maneira impessoal e não situada. Estas características trazem para primeiro plano a noção de auditório sem o qual não é possível existir argumentação.

[4] Embora no original esta afirmação seja feita em relação à argumentação retórica, a nota de rodapé 86 incluída na p. 135 indica que a palavra argumentação é uma forma abreviada de designar a argumentação retórica enquanto que a demonstração é usada para designar a argumentação lógica.

A noção de auditório

A argumentação, visando obter a adesão daqueles a quem se dirige, é, por inteiro, relativa ao auditório que procura influenciar: "*é em função de um auditório que qualquer argumentação se desenvolve*" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 6, destaque no original). No âmbito da teoria da argumentação, uma das grandes originalidades de Perelman "foi, justamente a de trazer a questão da *adesão* para primeiro plano" (Grácio, 1993a, p. 8, destaque no original). A centralidade reconhecida à noção de auditório conduz a que a atenção recaia não sobre o valor formal dos argumentos, mas antes sobre os esquemas argumentativos utilizados e sobre o espaço da sua receptividade:

> Sendo assim, a razão não é apenas uma faculdade que, para ser racional, deve engendrar provas necessárias que ninguém pode contestar. A actividade racional não é apenas cálculo (e a isto se reduz, em última análise, a lógica formal), antes se encontra ligada à arte da persuasão, às técnicas discursivas que visam obter a adesão de um auditório. (Grácio, 1993a, p. 8)

No entanto, como definir auditório? Poder-se-á considerar que é constituído por aquele(s) que é/são directamente interpelado(s) pelo orador? Ou pelas pessoas que este vê à sua frente quando toma a palavra? A estas questões Perelman responde que nem sempre assim acontece. Por exemplo, num Parlamento os deputados podem procurar não só convencer quem directamente assiste ao seu discurso, mas a população do país ou podem renunciar, de antemão, a convencer os membros da oposição que assistem à sua apresentação, pelo que estes não farão parte do seu auditório.

Se "se quer definir o auditório de forma útil para o desenvolvimento de uma teoria da argumentação, deve-se concebê-lo como *o conjunto daqueles que o orador quer influenciar pela sua argumentação*" (Perelman, 1993, p. 33, destaque no original). Este conjunto pode ser singular no sentido em que o auditório pode ser formado por uma pessoa que delibera apenas consigo própria. Pode também ser constituído por alguém com quem se estabelece um diálogo. Podem, além disso, existir auditórios particulares, alguns dos quais altamente qualificados, como acontece, por exemplo, com os membros de uma academia. O discurso argumentativo pode ainda ser dirigido à globalidade da espécie humana em que quem argumenta apela directamente à razão. Trata-se, neste último caso, do que Perelman designa por *auditório universal*:

> Que conjunto é este? É muito variável, e pode ir do próprio orador, no caso de uma deliberação íntima, quando se trata de tomar uma decisão numa situação delicada, até à humanidade inteira ou, pelo menos, aos membros que são competentes e razoáveis e que eu qualifico como auditório universal, passando por uma variedade infinita de auditórios particulares. (Perelman, 1993, pp. 33-4)

A noção de auditório universal gerou uma grande diversidade de interpretações e, segundo Grácio (1993b), o próprio Perelman considerou ter sido o aspecto da teoria da argumentação que mais mal-entendidos e problemas de compreensão provocou. Na obra publicada em 1958 refere-se que este auditório é definido por cada pessoa a partir do que sabe dos outros, de modo a ultrapassar as oposições de que tem consciência. Assim, cada cultura, cada indivíduo, tem a sua própria concepção do auditório universal. O estudo destas variações, segundo Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999), seria, aliás, um meio "de conhecer o que os homens consideraram, no decorrer da história, *real, verdadeiro e objectivamente válido*" (p. 37, destaque no original). O auditório universal pode revestir-se, para estes autores, de formas muito diversas: podem ser consideradas encarnações do auditório universal o sujeito que delibera consigo mesmo ou o interlocutor de um diálogo heurístico entendido como uma discussão em que se busca honestamente e sem preconceitos a melhor solução para um problema; pode, também, ser assimilado a certos auditórios especializados como é o caso do auditório de um cientista que se dirige aos seus pares, pessoas consideradas especialmente competentes numa certa área. O cientista, ao supor que indivíduos com o mesmo tipo de formação, competências e saberes adoptariam as mesmas conclusões, está a conferir a este auditório limitado um estatuto que vai para além do de um auditório concreto particular.

Procurando clarificar o significado de auditório universal e a função que lhe é atribuída por Perelman, Grácio (1993b) salienta que importa ter em conta que esta noção é uma "construção ideal elaborada em função de um discurso que aspira ao consenso de todos os homens racionais sobre o que, nesse discurso, é dito" (p. 91). Esta construção não é, contudo, rígida nem puramente abstracta pois, segundo este autor, varia consoante as épocas, as crenças de cada momento histórico, as concepções de razão e depende delas. A especificidade do auditório universal está em que ele aspira à universalidade, isto é, "a servir de critério, num dado momento, ao que possa ser considerado, por todos os homens sensatos, como racional e que, como tal, suscite, sem controvérsia, a adesão e o assentimento de todos os homens de razão" (Grácio, 1993b, p. 92)[5]

Assim, o auditório universal deve "incarnar a razão" (Grácio, 1993b, p. 93) e desempenha um papel importante enquanto "norma de argumentação objectiva" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 34). Esta razão é uma razão histórica que tem em conta "o social, os contextos, os condicionalismos, a liberdade dos indivíduos, a situação concreta a partir da qual se raciocina" (Grácio, 1993b, p. 92) sendo assim diferente da razão caracterizada pela evidência cartesiana. Considerando deste modo o auditório universal, compreende-se que as teses que lhe são atribuídas "possam variar no tempo, que elas não sejam impessoais, mas dependam daquele que as enuncia, do meio e da cultura que as formaram" (idem, p. 93). Uma questão que, neste âmbito, pode colocar-se é donde provém a força normativa do auditório universal. Naturalmente, só poderá vir de um ou mais auditórios particulares, o que conduz à *interdependência de auditórios*:

> Acreditamos, pois, que os auditórios não são independentes; que são auditórios concretos particulares que podem impor uma concepção de auditório universal que lhes é própria; mas, em contrapartida, é o auditório universal não definido

---

[5] Grácio (1993b) chama a atenção para que nesta concepção perelmniana de razão como auditório universal, não é posta em causa a pretensão à universalidade, pois uma argumentação racional deve ser universalmente reconhecida. No entanto, este reconhecimento não é nem uma evidência *a priori* nem uma *imposição* da própria razão. É antes um reconhecimento que precisa de ser promovido através da persuasão convincente que deverá levar a que haja uma adesão às teses propostas. "É um reconhecimento visado através de um acordo prévio, a partir de um fundo comum ou senso comum, dirigido a um auditório que há que convencer e que não é nem puramente abstracto nem atemporal (...) É um reconhecimento que se alcança mostrando que as teses apresentadas são as mais plausíveis e as que melhor podem servir numa dada situação (p. 92). Neste âmbito, o estatuto do objectivo e do universalmente válido, "nunca se encontra ao abrigo de uma controvérsia, de uma eventual crítica, da qual se tivesse que apreciar o bem fundado" (Perelman, 1987, p. 241).

> que é invocado para julgar a concepção de auditório universal própria de determinado auditório concreto, para examinar, a um só tempo, o modo como é composto, quais os indivíduos que, conforme o critério adoptado, o integram e qual a legitimidade desse critério. Pode-se dizer que os auditórios se julgam uns aos outros. (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 39)

Se o conhecimento prévio de quem se pretende influenciar com uma dada argumentação é uma condição para a sua eficácia, importa encontrar meios de nos assegurarmos da sua adesão às premissas que constituem o ponto de partida da argumentação. Se o auditório é constituído por um só indivíduo ou por um pequeno número de indivíduos, um dos meios que poderá ser utilizado é, a exemplo do que acontece nos diálogos platónicos, a técnica socrática das questões e respostas. Esta técnica não é, no entanto, sempre possível ou apropriada. Neste caso, quem argumenta terá que limitar-se a supor quais as teses a que inicialmente o auditório adere.

Considerando que em cada disciplina são admitidos teses e métodos que não podem ser arbitrariamente contestados e que só excepcionalmente são postos em causa, caso a argumentação diga respeito a uma dada disciplina, a suposição das ideias a que o auditório adere será tanto mais segura quanto maior o conhecimento das proposições admitidas pelos estudiosos desta disciplina: " Um cientista que se dirige aos seus colegas pode supor que eles aderem àquilo que faz parte do *corpus* reconhecido da sua disciplina" (Perelman, 1993, p. 50). Será importante conhecer, por exemplo, o conjunto de crenças, aspirações e regras sobre o qual existe um acordo e em relação ao qual todo o recém-chegado tem que ser iniciado (Perelman, 1987).

Uma argumentação, na sua elaboração mais completa, forma um discurso que se pode dirigir simultânea ou sucessivamente a diversos auditórios. Por sua vez, os argumentos que se avançam para apoiar uma tese, interagindo permanentemente entre si e com o auditório podem tornar-se, para este, objecto de uma nova argumentação. O auditório é, assim, determinante na actividade argumentativa. É a natureza do auditório, ao qual se podem submeter com sucesso os argumentos, que determina, em larga medida, quer o aspecto que assumirão as argumentações como o carácter, quer o alcance que lhes será atribuído (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999). O valor e a qualidade de uma argumentação não pode, pois, medir-se apenas pelo efeito obtido, pois depende também da qualidade do auditório que se consegue ganhar através do discurso.

Tipos de argumentos

É o tipo de auditório que o orador pretende influenciar com a sua argumentação que deve levar à escolha de bons pontos de partida e ao uso de técnicas argumentativas eficazes. Relativamente aos pontos de partida, Carrilho (1992) refere que o *Tratado da argumentação* "destaca três níveis: o das premissas da argumentação, o da escolha dos dados pertinentes e a sua apresentação discursiva" (p. 29). Quanto às técnicas argumentativas, Perelman (1993), a partir da observação empírica e análise de diversos tipos de discursos, indica que os argumentos se apresentam quer sob forma de uma *ligação,* em que se procura transferir para a conclusão a adesão concedida às premissas, quer sob a forma de uma *dissociação* que "visa separar elementos que a linguagem, ou uma tradição reconhecida, tinham anteriormente ligado entre si" (p. 68).

Os argumentos de ligação são agrupados em três categorias: *argumentos quase lógicos*, *argumentos baseados na estrutura do real* e *argumentos que fundam a estrutura do real*. A dissociação de noções que, segundo Perelman (1993), pouco chamou a atenção dos teóricos da retórica antiga, é essencial quando "perante as dificuldades com que se depara o pensamento comum, não nos limitamos, na prática, a escamotear a dificuldade, fingindo não a ver, mas nos esforçamos por resolvê-la de forma teoricamente satisfatória, restabelecendo uma visão coerente do real" (p. 139). Tendo em conta que o presente estudo é, antes de mais, motivado por preocupações relacionadas com o ensinar a argumentar em Matemática, refiro, em seguida, apenas alguns dos principais aspectos relacionados com técnicas argumentativas em que os argumentos se apresentam sob forma de *ligação*[6]

Argumentos quase lógicos. Argumentos quase lógicos são os que, pela sua estrutura, lembram os raciocínios formais de natureza lógica ou matemática. Estes raciocínios parecem resultar de um esforço de precisão e formalização desses argumentos (Perelman, 1987). Diferem entre si pelo facto dos argumentos quase lógicos pressuporem "sempre uma adesão a teses de natureza não formal, as únicas que permitem a aplicação do argumento" (Perelman, 1993, p. 69). Assim, o que caracteriza a argumentação quase lógica é o seu carácter não formal e o esforço mental que é necessário para que ela possa ser reduzida a um raciocínio formal (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999).

Atendendo à reconhecida validade dos raciocínios formais, os argumentos quase lógicos, segundo Perelman, tiram a força persuasiva da sua aproximação a eles. Isto não significa, contudo, que atribua uma primazia ao raciocínio formal considerando a argumentação como uma forma aproximada e imperfeita daquele. Antes pelo contrário: "o raciocínio formal resulta de um processo de simplificação que apenas é possível em condições particulares, no interior de sistemas isolados e circunscritos" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 219). Na sua perspectiva, embora actualmente a primeira reacção face a argumentos quase lógicos seja assinalar a sua fraqueza através da comparação com modos mais formais de raciocínio, "na antiguidade, quando o pensamento científico de feição matemática se encontrava menos desenvolvido, o recurso a argumentos quase lógicos era mais frequente" (Perelman, 1993, p. 73).

Entre os argumentos quase lógicos estão, por exemplo, os que apelam para estruturas lógicas — contradição, identidade, transitividade — e os que apelam para

---

[6] Perelman considera que a dissociação de noções é uma técnica argumentativa que "se impõe sobretudo àquele que analisa o pensamento filosófico, isto é, o pensamento que se pretende sistemático" (p. 139). Segundo este autor "É por as dissociações serem centrais em todo o pensamento filosófico original, que os pares criados por esta técnica serão designados por pares filosóficos, opostos aos pares antitéticos, como o bem e o mal, e os pares classificatórios, como "animais-vegetais" ou "norte-sul" (1993, pp. 70, 71). O par *aparência-realidade* encontra-se, directa ou indirectamente, em todas as dissociações (idem, p. 139).

relações matemáticas: relação da parte com o todo, do menor para o maior e relação de frequência (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999).

Considerando, por exemplo, a frase "negócios são negócios". Do ponto de vista formal poder-se-á pensar que estamos perante uma tautologia resultante da aplicação do princípio da identidade. No entanto, este enunciado poder-se-á tornar contestável se forem atribuídos dois significados diferentes à palavra negócios. Do mesmo modo, perante um enunciado em que parece haver uma contradição (por exemplo, este adulto é uma criança) poder-se-á encontrar uma interpretação que a faz desaparece.

Enquanto que a linguagem formal pressupõe a univocidade dos símbolos utilizados, o que é primordial na interpretação dos enunciados da linguagem natural é a pressuposição que afirma o carácter coerente e interessante da comunicação. Daí ser quase impossível empurrar para o absurdo quem utiliza esta linguagem, pois este pode ser quase sempre evitado a partir da reinterpretação dos termos usados. Numa linguagem formal é a contradição que leva ao absurdo. Aquilo que lhe corresponde, na argumentação, é a incompatibilidade que, normalmente, é apresentada para ser superada. Esta superação pode passar, por exemplo, pela antecipação das incompatibilidades e sua resolução ou pela atitude de limitar o alcance de uma decisão (Perelman, 1987).

Sendo a incompatibilidade o argumento quase lógico correspondente à contradição formal, "o parceiro quase lógico da identidade formal é a identificação total ou parcial" (Perelman, 1987, p. 248). Enquanto a identidade formal, quer se funde na evidência ou numa convenção, é constringente e, por isso, "escapa à controvérsia e logo à argumentação" (Perelman, 1993, p. 79), a identificação, na medida em que resulta de uma definição ou de uma análise que poderão ser apresentadas como normativas para um auditório, pode ser discutida.

A transitividade, embora possa servir de base a um raciocínio demonstrativo, não pode ser rigorosamente aplicada nos casos em que o carácter transitivo da relação poderá ser desejável, mas não estabelecido. Um exemplo que ilustra o uso argumentativo da transitividade é "os amigos dos meus amigos, meus amigos são" (Perelman, 1987, p. 249).

Entre os argumentos que apelam a relações matemáticas estão, por exemplo, os argumentos por divisão em que se tira uma conclusão sobre o todo depois de se ter raciocinado sobre cada uma das suas partes. Estes argumentos, para lá de requererem uma enumeração exaustiva das partes em que o todo se divide, necessitam, "por assim dizer, de uma estrutura espacializada do real, da qual estariam excluídas as imbricações, as interacções, a fluidez, características das situações concretas" (Perelman, 1993, p. 69). A utilização deste tipo de argumentos passa, "necessariamente, [por] reduzir a realidade a um esquema do tipo lógico ou matemático sobre o qual se raciocina, transpondo, no entanto, a conclusão para a realidade concreta" (idem).

De acordo com Perelman, um mesmo argumento pode ser compreendido e analisado de modos diversos por diferentes ouvintes e dizer que uma argumentação é quase lógica não exclui a possibilidade de ela utilizar outros tipos de argumentos. Além disso, as estruturas lógicas podem ser consideradas matemáticas e reciprocamente.

Argumentos baseados na estrutura do real. Enquanto os argumentos quase lógicos aspiram a uma certa validade derivada de uma relação mais ou menos estreita entre eles e certas estruturas lógicas ou relações matemáticas, os argumentos fundados sobre a estrutura do real "baseiam-se em ligações que existem entre elementos do real" (Perelman, 1993, p. 69). O que interessa nestes argumentos é que haja acordos, quanto a estas ligações, que impedem que sejam postas em causa. É a partir destes acordos que se desenvolverá a argumentação.

As ligações de sucessão e de coexistência constituem "duas formas diferentes de estruturar o real" (Perelman, 1993, p. 97). Assim, a maior parte dos argumentos baseados na estrutura do real invocam tanto ligações de sucessão, que aliam um fenómeno às suas consequências e causas, como ligações de coexistência, "que unem uma pessoa a seus actos, um grupo aos indivíduos que dele fazem parte e, em geral, uma essência a suas manifestações" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 299).

Nas ligações de sucessão, a argumentação, ao ter por ponto de partida a afirmação de um vínculo causal entre fenómenos de um mesmo nível, pode "dirigir-se para a procura das causas, para a determinação dos seus efeitos e para a apreciação de um facto pelas suas consequências" (Perelman, 1993, p. 97). Esta argumentação serve para "justificar, para explicar, por vezes para orientar, as investigações" (idem. p. 98). Por exemplo, num jogo de sorte, se alguém ganha um número excessivo de vezes, poder-se-á tornar suspeito de ter feito batota, o que tornaria o fenómeno mais compreensível. Um outro exemplo de uma ligação de sucessão prende-se com o argumento da direcção que "consiste na apresentação de um acto não como um fim, mas como um marco, uma etapa numa certa direcção" (Perelman, 1987, p. 253). Este argumento poderá ser aconselhável quando entre as teses defendidas pelo orador e as admitidas pelo auditório, se verifica uma distância demasiado grande para poder ser percorrida de uma só vez. Nesse caso é aconselhável dividir essa distância em pequenas etapas e ir chegando ao resultado gradualmente: em vez de ir directamente de A para D, primeiro procura levar-se o interlocutor de A para B, em seguida para C e finalmente para D. A estrutura do real condiciona a escolha destas etapas mas jamais a impõe (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999).

Uma argumentação baseada em ligações de coexistência apoia-se em realidades de nível desigual, "das quais uma é apresentada como a expressão ou manifestação da outra" (Perelman, 1993, pp. 104-5). Um protótipo deste tipo de argumentação é fornecido pela relação entre a pessoa e os seus actos. Um tipo de argumento situado no âmbito das ligações de coexistência é o argumento de autoridade que "utiliza actos ou juízos de uma pessoa ou de um grupo de pessoas como meio de prova a favor de uma tese" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 348). Um uso curioso deste argumento é aquele em que uma autoridade qualificada é incapaz de compreender uma afirmação, concluindo, a partir daí, que esta é incompreensível para todos.

Segundo Perelman (1993), "quando se dispõe de um meio para provar uma verdade, ou estabelecer um facto de uma forma incontestada, a qualidade daquele que os afirma em nada modifica o estatuto da afirmação" (p. 110). Assim sendo, o argumento de autoridade "só tem interesse na ausência de prova demonstrativa. Ele virá em apoio de outros argumentos e aquele que o utiliza não deixará de enfatizar o valor da autoridade que está de acordo com a sua tese" (idem, p. 109). Esta perspectiva não significa que deva ser negligenciado o valor dos argumentos de autoridade: "o argumento de autoridade é de extrema importância e, embora sempre seja permitido, numa argumentação particular, contestar-lhe o valor, não se pode, sem mais, descartá-lo como irrelevante, salvo em casos especiais" (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999, p. 348).

Argumentos que fundam a estrutura do real. Estes argumentos permitem estabelecer um precedente, um modelo ou uma regra geral a partir de um caso conhecido. Na generalidade, os argumentos que fundam a estrutura do real generalizam o que é aceite a partir de um caso particular ou transpõem para um outro domínio o que é admitido num domínio determinado. Exemplos destes argumentos são os raciocínios pelo exemplo, modelo, analogia e metáfora.

"Argumentar pelo exemplo é pressupor a existência de certas regularidades cujos exemplos fornecerão uma concretização" (Perelman, 1993, p. 119). A argumentação pelo exemplo não considera aquilo que é evocado como sendo único. Pelo contrário, procura, a partir do caso particular, a lei ou estrutura que este revela. Pode acontecer, no entanto, que a argumentação pelo exemplo faça passar deste para uma conclusão igualmente particular, sem que seja enunciada nenhuma regra. É o que Perelman e Olbrechts-Tyteca (1999) designam por "*argumentação do particular ao particular* " (p. 401, destaque no original).

Embora a descrição de um só exemplo possa suscitar algumas dúvidas quanto ao seu alcance, quando se evocam diversos exemplos da mesma natureza, a interpretação que conduz à generalização impõe-se com muita força, embora isto não signifique que seja indiscutível o grau de generalização, ou seja, a regra obtida a partir da análise destes exemplos. Assim, para Perelman (1993), o recurso ao exemplo para fundar uma lei, não é mais do que uma técnica argumentativa. No entanto, o mesmo já não se passa "com o caso invalidante que, a menos que seja desqualificado, obriga a rejeitar ou pelo menos a modificar a regra à qual se opõe" (p. 120). Segundo Perelman, é esta a razão pela qual Popper concede a este uso do caso particular um lugar central na sua metodologia das ciências.

Enquanto a argumentação pelo exemplo serve para fundar uma previsão ou uma regra, o caso particular desempenha um papel completamente diferente quando esta regra já está admitida: aqui ele serve, essencialmente, para a confirmar e ilustrar dando-lhe, assim, uma presença que permite reforçar a adesão que lhe é concedida. Assim, a ilustração de uma regra por um caso particular deve "impressionar sobretudo a imaginação" (Perelman, 1993, p. 121). Esta ideia tem ressonâncias com o pensamento de Aristóteles que distinguiu dois empregos do exemplo, consoante se disponha, ou não, de um princípio de ordem geral: o uso do exemplo como elemento de indução ou a sua utilização como testemunho (Perelman e Olbrechts-Tyteca, 1999).

A analogia e a metáfora, ao desempenharem "um papel eminente na estruturação e valorização do real" (Perelman, 1987, p. 260), inserem-se, tal como anteriormente referi, na categoria dos argumentos que fundam a estrutura do real. O recurso à analogia constitui "uma das características da comunicação e do raciocínio não-formais" (Perelman, 1993, p. 127) e para que ela conserve a sua especificidade é necessário interpretá-la "em função do seu sentido etimológico de *proporção*" (idem, destaque no original). Difere, no entanto, da "proporção puramente matemática na medida em que não estabelece a *igualdade* de duas relações, mas afirma uma *similitude* de correspondências" (idem). Ou seja, enquanto que em álgebra se estabelecermos que a/b = c/d, poderemos afirmar, sem dúvida, que c/d = a/b e efectuar com os termos *a*, *b*, *c* e *d* operações matemáticas que originarão equações equivalentes a *ad-cb*=0, "na analogia afirma-se que *a* está para *b* assim como *c* está para *d*. Já não se trata de uma divisão mas de uma relação qualquer que é assimilada a uma outra relação"(idem, p. 128).

O que está em causa na analogia é uma assimilação entre os pares *a-b* e *c-d*, respectivamente, designados por tema e foro da analogia, "com a finalidade de esclarecer, estruturar e avaliar o tema graças ao que se sabe do foro que se conhece melhor" (Perelman, 1993, p. 128. Para a analogia cumprir o papel de esclarecer o tema pelo foro, é necessário que os seus domínios não sejam homogéneos, como acontece no caso de uma proporção matemática. Toda a analogia põe em evidência certas relações deixando outras na sombra. Deste modo, admitir uma analogia é "circunscrever a uma certa escolha aspectos que importa pôr em evidência na descrição de um fenómeno" (idem, p. 132).

Apoiando-se no pensamento de Aristóteles, Perelman (1993) considera a metáfora "como uma figura que consiste em dar a um objecto um nome que convém a outro" (p. 132), podendo esta transferência operar-se de modos diversos. Limitando-se a um destes modos, indica que

> a metáfora não é senão uma analogia condensada, graças à fusão do tema e do foro. A partir da analogia *A* está para *B* assim como *C* está para *D*, a metáfora assumiria uma das formas *"A de D"*, *"C de B"*, *"A é C"*. A partir da analogia "a velhice está para a vida assim como a noite para o dia", derivar-se-ão as metáforas "a velhice do dia", "o anoitecer da vida" ou "a velhice é uma noite". As metáforas da forma *"A é C"* são as mais falaciosas por se ser tentado a ver nelas uma identificação (...). (Perelman, 1993, p. 133)

Certas metáforas, à força de serem repetidas, podem entrar no uso corrente da linguagem, havendo a tendência para nos esquecermos que se trata de metáforas. No caso da Matemática é o que acontece, por exemplo, com a expressão "o pé da perpendicular". Neste caso dir-se-á, metaforicamente, que as metáforas estão mortas ou adormecidas. Pode mesmo acontecer que, numa certa língua, a expressão metafórica seja a única maneira de designar um objecto como acontece, no caso da língua portuguesa, com a expressão "o braço da poltrona". Nestes casos a expressão metafórica "é qualificada como *catacrese*" (Perelman, 1993, p. 134).

O uso de catacreses é, segundo Perelman, muito eficaz na argumentação, uma vez que ao retirarmos conclusões de expressões de uso corrente podemos nem sequer nos aperceber do carácter analógico subjacente. Deste modo, a consequência parece decorrer da própria natureza das coisas. Para este filósofo, um exemplo desta situação é a exploração que Descartes fez da catacrese "encadeamento de ideias" para insistir no facto de que numa dedução rigorosa não se deve nunca saltar um único passo, pois, caso contrário, desaparece a certeza da conclusão. No entanto, se assimilarmos o raciocínio "não a uma cadeia, mas a um tecido cuja trama é constituída por argumentos entrelaçados, imediatamente se vê que a sua solidez é de longe superior a cada um dos fios" (Perelman, 1993, p. 134). Assim, já não poderá afirmar-se que o raciocínio "é análogo a uma cadeia que não é mais sólida do que o mais fraco dos elos" (idem).

Actualmente há posições muito diversas sobre a natureza da metáfora e o seu papel no pensamento e no discurso humanos. No entanto, prevalece a certeza de que todo o pensamento criativo, incluindo o pensamento científico, não pode passar sem metáforas, sejam elas vivas ou mortas, acordadas ou adormecidas. Em particular, no campo educativo tem vindo a ser cada vez mais reconhecido o seu valor na compreensão e significação de conceitos, nomeadamente de conceitos matemáticos (por exemplo, Carreira (1998a, 1998b)). Com efeito, as metáforas ao tornarem próximos espaços de significação que, de início, parecem distantes têm a potencialidade de suscitar e facilitar o entendimento de conceitos abstractos em termos de conceitos familiares e mais directamente ligados a experiências concretas.

Selecção e organização dos argumentos

Um discurso argumentativo não é constituído por uma acumulação desordenada de argumentos em número indefinido. Pelo contrário, requer uma organização de argumentos seleccionados que serão apresentados segundo uma ordem que lhe dará a maior força. Esta organização realiza-se em função de considerações relativas à amplitude da argumentação, bem como à escolha dos argumentos e da ordem pela qual serão apresentados.

A amplitude é um dos problemas característicos da argumentação que não se coloca quando se trata de uma demonstração uma vez que, se ela é correcta, o seu valor de verdade é independente da sua extensão. O mesmo não se passa num discurso argumentativo em que, pelo menos teoricamente, poderia parecer que quantos mais argumentos se juntassem mais eficaz ele seria para persuadir um auditório. Contudo, na prática, tal não acontece havendo, segundo Perelman, limites psicológicos, sociais e económicos que apontam para a necessidade de estabelecer fronteiras para a amplitude de uma argumentação. Por exemplo, se se trata de um discurso oral, importa ter em conta que são limitadas a capacidade e a vontade de um auditório prestar atenção a algo. Se se participa num debate há que criar condições para que todos possam expressar os seus pontos de vista.

Como o número de argumentos é, *a priori*, indefinido, torna-se inevitável proceder a uma escolha orientada em que o orador se deixará guiar "por duas noções específicas da argumentação, a saber: a pertinência e a força dos argumentos" (Perelman, 1987, p. 260). Estas duas noções são, tal como a amplitude, estranhas à noção de demonstração, uma vez que aqui todos os meios de prova têm a mesma força e a partir do momento em que são admitidos e servem para demonstrar uma conclusão são, por esse mesmo facto, pertinentes. Contrariamente, na argumentação, como o que está em jogo é obter a adesão do auditório a certas teses, a pertinência apenas pode ser definida por relação a auditórios que estabelecem acordos sobre uma metodologia, que aceitam certos meios de prova e que desvalorizam outros qualificando-os como irrelevantes. A análise da pertinência de uma argumentação faz-se em relação aos conteúdos da afirmação e do argumento que a justifica (Duval, 1992-1993).

A força de um argumento depende "da adesão dos auditores às premissas da argumentação, da pertinência desta, da relação de proximidade ou distância que ela pode ter com a tese defendida, das objecções que se lhe poderiam opor, da maneira como se poderiam refutar" (Perelman, 1993, p. 152). Ou seja, depende, por um lado, de que nenhum outro argumento se lhe possa opor e, por outro lado, do valor epistémico que ele tem ao olhar daquele a quem se dirige: "deve ter um valor epistémico positivo (evidente, necessário, autêntico...) e não negativo ou neutro (absurdo, possível, plausível...). Um argumento que resista a objecções e que tenha um valor epistémico positivo é um argumento forte" (Duval, 1992-3, p. 39).

Tanto a pertinência como a força dos argumentos apreciam-se, assim, quer pelas suas qualidades próprias, quer em função da sua refutação possível. Segundo Perelman (1987), é na controvérsia, na possibilidade de apresentar, ou não, argumentos em sentidos opostos, que se joga a *eficácia* e mesmo a *validade* de uma argumentação, duas qualidades ligadas à força dos argumentos e difíceis de separar. A noção de eficácia é relativa ao auditório particular a quem a argumentação é apresentada, pelo que ela não pode ser apreciada independentemente desse auditório. Contrariamente, "a validade é relativa a um auditório competente, quase sempre o auditório universal" (Perelman, 1993, p. 152). Assim, a força dos argumentos é "função do auditório, das suas convicções, das suas tradições, dos métodos de raciocínio que lhe são próprios" (idem, p. 153).

É normal que para apreciar a força dos argumentos se apele "à regra da justiça formal que considera como justo e razoável tratar da mesma maneira situações essencialmente semelhantes" (Perelman, 1993, p. 153). Ou seja, se um argumento foi considerado forte numa situação que pode servir de precedente, será, até prova em contrário, considerado igualmente forte numa situação semelhante à primeira. Em particular, em cada disciplina serão a sua metodologia e a sua história que permitirão determinar, no seu contexto, a força e a pertinência de cada argumentação particular:

> A metodologia dá-nos a conhecer os meios de prova aceitáveis no contexto de cada disciplina. A história de uma disciplina dá-nos a conhecer não só as teses e as teorias admitidas, os instrumentos a utilizar para a determinação de factos, mas também as técnicas de raciocínio reconhecidas, o género de argumentos aos quais se reconhece a pertinência (Perelman, 1993, p. 153).

Quanto à ordem pela qual os argumentos devem ser apresentados, Perelman considera que quando esta é livremente decidida pelo orador, este pode escolher entre três ordens tradicionalmente consideradas: a ordem da força decrescente, em que inicialmente se apresentam argumentos mais fortes deixando para o final os mais fracos, a ordem da força crescente, em que ocorre o inverso, e a ordem nestoriana, preconizada pela maior parte dos retóricos antigos, em que se inicia e termina a argumentação com argumentos mais fortes sendo os restantes colocados no meio destes (Perelman, 1987, 1993; Perelman e Olbrecht-Tyteca, 1999).

Esta classificação tem o inconveniente, segundo Perelman, de considerar a força dos argumentos como uma grandeza imutável, pressupondo que estes têm, pela sua própria natureza, uma força que é fixada de uma vez por todas, independentemente do auditório e do modo como se articulam entre si para constituir o discurso. No entanto, este não é o caso. Em si mesmo, um argumento não é forte nem fraco no sentido absoluto e para qualquer auditório. A sua força depende da maneira como é recebido não se devendo perder de vista que o auditório, em função da eficácia do discurso, muda com o desenrolar deste.

O valor de um argumento depende da qualidade e competência daqueles cuja adesão é procurada e importa ter em conta que ele terá um peso diferente consoante estes conheçam ou ignorem certos factos ou uma determinada interpretação destes. Por exemplo, um argumento que é fraco e não eficaz porque não é compreendido e está mal adaptado a um auditório, pode tornar-se relevante se este for melhor informado e o entender. De forma semelhante, um argumento que persuade um auditório pouco esclarecido pode não ter efeito num auditório mais crítico. Uma vez que a finalidade do discurso argumentativo é a de obter a adesão do auditório, "a ordem dos argumentos será adaptada a esta finalidade. Cada argumento deverá surgir no momento em que maior efeito exerça. Mas como aquilo que persuade um auditório pode não convencer um outro, este esforço de adaptação é permanente" (Perelman, 1993, p. 161).

Tudo o que anteriormente foi dito pressupõe, contrariamente ao que acontece com a demonstração, que a forma dos argumentos está subordinada ao seu conteúdo. Assim, os debates argumentativos estão relacionados, em todos os campos, com o uso efectivo do raciocínio informal. Em campos específicos, estes debates realizam-se entre os que estão, mais ou menos, familiarizados com as teses e métodos que são correntemente aceites e considerados válidos em cada campo. É neste conhecimento específico e nesta familiaridade que se enraízam as bases da argumentação.

Pensando a argumentação em Matemática com o contributo de Perelman

As oposições entre demonstração e argumentação apresentadas por Perelman parecem, simultaneamente, fundamentadas mas também bastante insatisfatórias. Com efeito, a sua interpretação de demonstração enquadra-se em escolas de pensamento absolutistas (Ernest, 1991) sobre a Matemática e, em particular, no logicismo e formalismo. No entanto, é uma abstracção aquilo que faz considerar a demonstração e as disciplinas que a utilizam de uma forma privilegiada independentemente dos homens que as produzem e sem os quais não existiriam. Nos meios científicos, há controvérsias e os cientistas recorrem frequentemente à argumentação, em particular, para justificar as suas teses, as suas interpretações e os seus resultados. Os matemáticos e os lógicos não escapam a esta regra: argumentam para justificar a introdução de novos conceitos, de novos símbolos, de demonstrações mais elegantes ou menos complicadas, para defender ou contestar esta ou aquela teoria, para aceitar ou rejeitar o que é enunciado como validando uma certa conjectura.

Mesmo que uma demonstração matemática, uma vez escrita e publicada, possa parecer que existe por si própria, importa não esquecer que ela resulta de uma actividade em que a invenção e a decisão têm um importante lugar que não se pode esperar de uma máquina. Aliás, uma das razões que a motiva é o desejo de convencer a comunidade matemática do valor da conclusão proposta. A necessidade de influenciar e obter a adesão daqueles a quem é apresentada, não está, de modo algum, ausente:

> Por um lado, temos a Matemática, com demonstrações estabelecidas por "consenso dos qualificados". Demonstrações reais não são testáveis por máquinas, ou por matemáticos que não estejam inteirados do modo de pensar do campo apropriado da Matemática. Mesmo os leitores qualificados podem divergir quanto a se uma demonstração real (que seja na realidade apresentada oralmente ou por escrito) está completa e correcta. Estas dúvidas são resolvidas por comunicação e explicação (...) Na prática matemática distinguimos entre

> uma demonstração informal completa e uma demonstração informal incompleta. Numa demonstração informal incompleta, alguns passos não convencem. Enquanto demonstrações *formais*, *ambas* são incompletas. (Hersh, 1997, pp. 214-5, destaque no original)

As distinções feitas no âmbito da educação matemática entre argumentação e demonstração vão num sentido diferente do apresentado por Perelman. Em particular, não é eliminada a possibilidade de se recorrer à linguagem natural também no âmbito da demonstração. Segundo Duval (1992-1993), é precisamente esta possibilidade que torna difícil distinguir as duas noções. Este autor diferencia argumentação de demonstração através da fonte de valor epistémico dos argumentos. No caso das demonstrações este valor está apenas ligado ao lugar que uma dada proposição ocupa na organização teórica do campo de conhecimentos: "não se discute um teorema (salvo se não se souber que é um teorema ou se não se tiver compreendido que é um teorema)" (p. 46). Nas argumentações, pelo contrário, o valor epistémico dos argumentos é um valor que resulta directamente da compreensão do seu conteúdo. Eles são, portanto, sempre passíveis de revisão ou contestáveis.

Neste âmbito, Duval diferencia *argumentações retóricas* de *argumentações heurísticas*. As argumentações retóricas são desenvolvidas para alguém se convencer a si próprio ou convencer um interlocutor. A argumentação heurística é conduzida para se progredir num problema e, segundo este autor, é esta argumentação que se desenvolve no campo da Matemática. Os objectivos destes dois tipos de argumentação não são incompatíveis, podendo mesmo dizer-se que toda a argumentação procura atingi-los simultaneamente, embora um possa prevalecer sobre o outro. No entanto, há, a seu ver, uma diferença fundamental entre eles: a existência, ou não, de uma organização teórica do campo de conhecimentos e de representações em que se desenrola a argumentação. No caso das argumentações retóricas esta organização teórica não existe, o que conduz a que as proposições não tenham valor epistémico associado ao seu lugar nesta organização. O mesmo não acontece nas argumentações heurísticas em que a organização teórica existe. Por exemplo, "em Matemática podemos argumentar apoiando-nos num corpo de definições e teoremas bem estabelecidos. Além disso o uso de definições ou de teoremas implica a sua utilização correcta" (Duval, 1992-3, p. 52). Assim, uma argumentação heurística deve, segundo este autor, "comportar 'sub-programas' de raciocínio válido mesmo se não soubermos ainda como ligar estes diferentes sub-programas para atingir uma árvore dedutiva completa que corresponda à demonstração" (idem). Deste modo, defende que há uma grande distância entre as argumentações retóricas e as heurísticas, uma vez que estas últimas requerem que se seja capaz de compreender ou produzir uma relação de justificação entre duas proposições que seja de natureza dedutiva e não somente de natureza semântica.

Há educadores matemáticos que têm perspectivas diferentes das de Duval relativamente à argumentação e, em particular, às suas relações com a demonstração. O discurso argumentativo não é, segundo Boero (1999) e Douek (1998, 1999, 2000), necessariamente dedutivo, embora seja um discurso conectado logicamente que pode englobar a referência a argumentos visuais, gestuais ou indutivos. Douek (1998) salienta que se se seguir a análise de Duval sobre argumentação parece não ser reconhecida a existência de um *corpus* de referência para a argumentação, enquanto que para a prova ele existiria sistematicamente. Discordando desta ideia, defende que nenhuma argumentação, mesmo a do dia-a-dia, seja ela individual ou colectiva, poderá existir sem um *corpus* de referência para apoiar os passos do raciocínio:

> O *corpus* de referência na argumentação do dia-a-dia é determinado social e historicamente, e é largamente implícito. A demonstração matemática também necessita de "*corpus* de referência". Poderemos pensar que este "*corpus* de referência" é completamente explícito e que não é socialmente determinado, mas veremos que isto não é verdade. (Douek, 1998, p. 5)

O *corpus* de referência em Matemática, para Douek (1998), depende muito significativamente de quem o usa e dos seus ouvintes ou leitores e é geralmente mais amplo do que as referências explícitas. Por exemplo, poderá esperar-se que em certos níveis de ensino sejam apresentadas referências detalhadas para justificar passos de uma prova que serão dispensáveis em níveis de ensino superiores por serem considerados evidentes. Além disso, pode conceber-se que uma argumentação envolvendo dobragens de uma figura geométrica valida uma afirmação relativa à existência de eixos de simetria nessa figura, se se estiver a trabalhar com alunos dos primeiros anos de escolaridade. No entanto, as dobragens deixarão de ter valor de prova no final do ensino secundário.

Pedemonte (2002), distanciando-se também de Duval que considera ter "uma visão 'formalista' da demonstração" (p. 19), usa a finalidade da argumentação e da demonstração como um dos aspectos que lhe permite diferenciar estas noções. Salienta que, em ambos os casos, se está na presença de justificações racionais. No entanto, "a demonstração quer validar, a argumentação quer convencer; mas validar é mais que convencer. A demonstração quer justificar no interior de um domínio teórico" (p. 45). Segundo esta autora, a argumentação em Matemática é a expressão de um raciocínio possível, uma tentativa de justificar um enunciado ou conjunto de enunciados a partir daquilo que se crê como verdadeiro, um processo em que as inferências se apoiam principalmente sobre os conteúdos embora, na sua perspectiva, se possa mostrar que também nas demonstrações, contrariamente ao que defende Duval, as proposições não se afastam do conteúdo. Considera que na argumentação em Matemática não basta persuadir, ou seja, obter a adesão sem apelar necessariamente à razão, mas sim convencer, um conceito mais amplo que implica o recurso à racionalidade. Neste âmbito, salienta que o interlocutor, seja a comunidade matemática, a turma ou aquele que argumenta, deve ser entendido no sentido de "um interlocutor universal e não particular" (p. 31) e aproxima a argumentação em Matemática da dialéctica de Aristóteles:

> A dialéctica, que não conduz necessariamente a verdadeiras conclusões mas que parte de princípios verdadeiros para aquele que argumenta, corresponderia à argumentação em Matemática. Quando a Matemática está em construção, quando se está a procurar ver se um enunciado é verdadeiro, quando se procura a solução para um problema, a argumentação utilizada é a dialéctica. Não é analítica porque as premissas não são necessariamente verdadeiras. Também não é retórica porque aquele que argumenta em Matemática crê que os princípios de que parte são verdadeiros. (Pedemonte, 2002, p. 26)

Pedemonte, tal como Douek e Boero, defendem que há uma proximidade muito maior entre a actividade de argumentar e a actividade de demonstrar do que aquela que é referida por Duval, embora a argumentação e a demonstração enquanto produtos destas actividades, possam ter diferenças significativas. Para qualquer dos autores é fundamental proporcionar aos alunos oportunidades que lhes permitam formular conjecturas e analisar se serão verdadeiras ou não. Este processo poderá servir de enquadramento inspirador para identificarem argumentos a encadear dedutivamente na produção de demonstrações e, por esta via, facilitará a aprendizagem da demonstração e o reconhecimento da sua importância e necessidade. Com efeito, embora a validade de um enunciado seja assegurado por uma demonstração, este facto nem sempre é evidente para os alunos que frequentemente não se apercebem desta validade. Assim, "a argumentação, mais próxima da linguagem do aluno, pode ajudá-lo a ver a verdade do enunciado. E esta visão que a argumentação traz é, no fundo, um preliminar à entrada numa prática da demonstração" (Pedemonte, 2002, pp. 19-20).

Embora se possa criticar com base no desenvolvimento da ciência contemporânea, nas actuais direcções em que se desloca a filosofia da Matemática e no pensamento de educadores matemáticos, os critérios usados por Perelman para demarcar argumentação e demonstração, isso não significa, a meu ver, que se deva desvalorizar a teoria da argumentação que desenvolveu ou considerar-se não fecunda para ajudar a perspectivar a argumentação na aula de Matemática. Aliás, quando se considera a noção de auditório universal — em que encarnações possíveis são a comunidade científica de uma dada disciplina ou interlocutores de um diálogo heurístico honesta e seriamente empenhados na resolução de um problema — há ideias por si apresentadas relativamente à argumentação que não entram em conflito com a perspectiva de Lakatos sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático, nem com balanços apresentados por abordagens filosóficas quasi-empiricistas sobre os processos de produção de provas matemáticas. Como defende Carrilho (1992), "se a ciência se revela fundamentalmente argumentativa, isso não afecta negativamente uma teoria da argumentação que defende a pluralidade argumentativa e a atenção à diversidade dos auditórios" (p. 29).

Neste âmbito, as considerações de Perelman sobre a noção de auditório, com a pluralidade de formas que pode assumir, parecem ser prometedoras para equacionar a questão da argumentação em Matemática. Com efeito, a aceitação de uma racionalidade argumentativa remeterá, necessariamente, para um auditório do qual dependem os critérios de aceitabilidade da argumentação (Pedemonte, 2002).

Thurston (1995), um matemático contemporâneo, chama, precisamente, a atenção para a influência do auditório nas provas matemáticas. Ao reflectir sobre algumas experiências pessoais que envolveram a formulação e prova de teoremas, salienta que estas experiências tornaram "dramaticamente claro quanto as provas dependem de um auditório" (p. 36). Nas suas palavras, "provamos coisas num contexto social e dirigimo-las a um certo auditório" (idem). Pode haver partes de uma prova que, no abstracto, não levem mais do que alguns minutos a apresentar, mas cuja comunicação poderá exigir tempos muito variados e mais longos consoante o auditório a que ela é dirigida.

Analisando o desenvolvimento da compreensão da argumentação matemática por alunos do ensino elementar, Yackel e Cobb (1994) referem que, no âmago das actuais iniciativas de renovação curricular em Matemática, se espera que os alunos encontrem sentido nas ideias e procedimentos matemáticos, que expliquem a outros o seu pensamento e métodos de resolução e que indiquem as razões que lhes estão subjacentes, de modo a que os outros os compreendam. Neste sentido, "os argumentos que apresentam são como provas que explicam" (p. 2). Subjacente à noção de prova que explica, uma das actuais recomendações para o ensino da prova matemática (Hanna, 1996, 2000; Hanna & Niels Jahnke, 1996), está, na perspectiva de Yackel e Cobb, a ideia de que há algo a ser explicado — conceitos matemáticos a ser clarificados, relacionados com outros conceitos, etc. — e, simultaneamente, que há um auditório a quem a explicação se destina.

Perelman defende a ideia de que o valor de uma argumentação não pode ser avaliado apenas a partir do efeito obtido, pois depende também da qualidade do auditório que lhe adere. Neste âmbito, o professor tem um papel fundamental no desenrolar dos percursos argumentativos de modo a ajudar os alunos a apropriarem-se dos saberes matemáticos reconhecidos. Chazan e Ball (1999) relatam uma experiência em que os alunos de uma das suas turmas chegaram a uma conclusão consensual entre si que violava a representação ordenada de fracções na recta numérica. Foi a introdução da voz da professora na discussão que lhes possibilitou questionar o valor dos argumentos apresentados e conduziu a uma alteração da conclusão. Esta voz transformou o auditório apenas constituído pelos alunos noutro mais crítico e informado, o que contribuiu não só para perderem força e pertinência os argumentos anteriormente apresentados, mas também para surgirem outros matematicamente mais relevantes.

Argumentos de autoridade, enquadrados por Perelman nos baseados na estrutura do real, são frequentes nas aulas de Matemática, embora numas mais do que noutras. Podem assumir diversas formas. Por exemplo, um aluno pode fundamentar a correcção de uma ideia apoiando-se no estatuto de bom aluno do colega que a apresentou. O professor pode, por alguma razão, considerar, também, adequado não justificar certos procedimentos matemáticos indicados, embora seja possível fazê-lo, e solicitar aos alunos apenas que os usem. Numa argumentação, segundo Perelman, argumentos de autoridade podem ser questionados mas não descartados como irrelevantes. Importa, assim, dedicar-lhes uma atenção particular e, face a cada situação concreta, imaginar modos de agir que não boicotem a assunção, pelos alunos, da responsabilidade de fundarem os seus raciocínios em argumentos matemáticos.

Percursos argumentativos e pluralidade de campos de argumentação: O contributo de Toulmin

Referi anteriormente que Toulmin, tal como Perelman, procurou autonomizar o estudo da argumentação em relação ao campo da lógica perspectivada como ciência formal isenta de preocupações práticas imediatas. Diferentemente, contudo, Toulmin (1993) com a obra *The uses of argument* publicada em 1958, aspirava a reformar o campo da lógica de modo a torná-la uma "disciplina epistemologicamente *mais ampla*, empiricamente mais *fundamentada* e historicamente mais *informada*" (Carrilho, 1992, p. 25, destaque no original). O ponto essencial da sua crítica é que a validade formal não garante, por si só, o valor e o interesse de um raciocínio. Como dirá, em 1983, "querer abordar o raciocínio prosseguido nas disciplinas científicas, apenas com a ajuda dos silogismos, é condenar-se a não dizer nada de interessante sobre a 'substância' do debate" (referido por Plantin, 1990, p. 24).

Toulmin (1993) procura caracterizar o que pode designar-se "por 'processo racional', os procedimentos e categorias que podemos utilizar para defender e regular todo o tipo de afirmação" (p. 9). Põe, assim, em primeiro plano "a função crítica da razão" (idem, p. 10), propõe-se "analisar os percursos pelos quais se chega a uma conclusão racional" (Plantin, 1990, p. 24) e restitui à lógica a função de "se ocupar da justeza das afirmações que fazemos — a solidez dos motivos que trazemos em seu apoio, o rigor com que as estabelecemos — (...) do tipo de causa que nos serve para defender as nossas afirmações" (Toumin, 1993, p. 9).

The uses of argument, tendo como objectivo "levantar certos problemas, e não de os resolver; de atrair a atenção para um campo de investigação, em vez de o examinar exaustivamente; de suscitar a discussão mais do que servir de tratado sistemático" (Toulmin, 1993, p. 1), contribuiu para aprofundar a compreensão do trabalho argumentativo e para renovar, no século XX, o valor da argumentação.

Há dois aspectos fundamentais no trabalho de Toulmin: um que se traduz pela procura e definição de um *esquema/modelo* de qualquer argumento usado em qualquer situação ou ciência; outro que mostra que a argumentação, embora estruturalmente invariante, é modelada pelas características do domínio em que se exerce e onde se pretende fazer valer (Carrilho, 1992). A própria utilização do plural na palavra "*uses*" que aparece no título de *The Uses of Argument* permite destacar, precisamente, a valorização, por Toulmin, da pluralidade dos domínios de argumentação. O conceito de *campo de argumentação* traduz, precisamente, esta ideia.

A validade de uma argumentação depende destes dois aspectos, embora o segundo seja predominante pois, em última análise, é dele que depende a pertinência da argumentação. Surge, assim, uma nova compreensão da argumentação que integra os seus elementos contextuais o que possibilita não só pôr em causa a pretensão à universalidade de um tipo de racionalidade considerada superior a outras, mas também reconhecer e valorizar a emergência de racionalidades locais. A pluralidade de campos de argumentação, opõe-se, pois, à exclusividade da acepção lógica de argumento definido em termos de implicação e de prova, que constituiu, durante muito tempo, "o paradigma para a compreensão do conceito de argumentação" (Carrilho, 1992, p. 22). Deste modo, segundo Toulmin, a racionalidade não deve ser avaliada por critérios formais, mas antes "pela capacidade justificativa, isto é argumentativa, que se revela na tentativa de encontrar respostas para os problemas que nos vários domínios se colocam" (Carrilho, idem). Esta ideia pressupõe um desvio fundamental do universal para o particular, isto é, do *cânon* geral para as normas de argumentação existentes num determinado *campo*.

Campos de argumentação

Seja qual for a natureza de uma asserção, "é possível questioná-la, exigir que nos forneçam motivos (fundamentos, dados, factos, provas, considerações, características) de que deve depender o valor da asserção. Ou seja, pode exigir-se uma argumentação" (Toulmin, 1993, p. 14). Os argumentos podem, no entanto, ser expostos por diversas razões o que conduz a que nem todos tenham por objectivo servir de justificação para uma afirmação categórica. Toulmin (1993) interessa-se "pelos argumentos justificativos destinados a sustentar asserções, pelas estruturas através das quais poderão ser apresentados, pelo valor que podem pretender e pelos diferentes modos pelos quais se pode classificá-los, avaliá-los e criticá-los" (p. 14). Na sua perspectiva, a função primeira dos argumentos é a função justificativa: "as outras funções que lhe atribuímos, são de certo modo secundárias e parasitas do seu papel justificativo que lhe é primordial" (idem).

As conclusões a que se chega e as asserções que se formulam, de acordo com Toulmin, variam sensivelmente em função do problema em análise. Saber, por exemplo, quando terá lugar o próximo eclipse da Lua ou qual é a natureza exacta da relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo rectângulo, pode conduzir à necessidade de produzir dados, factos ou outras razões que se pensa serem pertinentes e que justificam a asserção inicial. O tipo de factos a que se faz referência, bem como o tipo de raciocínio que se produz, dependerão, de novo, da natureza da questão tratada. No caso dos exemplos apresentados, este raciocínio pode prender-se, em particular, com as posições actuais e recentes da Terra, Lua e Sol e com os axiomas de Euclides e teoremas demonstrados na geometria euclidiana.

"A formulação das nossas asserções e o enunciado dos factos destinados a apoiá-las correspondem, em termos filosóficos, a 'tipos lógicos' muito variados — relações de acontecimentos passados e presentes, predições, veredictos de culpabilidade, elogios estéticos, axiomas geométricos, etc." (Toulmin, 1993, p. 16). Consequentemente, os argumentos que apresentamos e as suas diferentes etapas, serão também muito diversificados. Por exemplo, o percurso argumentativo que tendo por base informações respeitantes à forma física de um jogador de ténis conduz a declarar que merece ser seleccionado para um campeonato, é uma coisa; o percurso que conduz a conclusões sobre a validade de uma dada teoria científica tendo por base cálculos e experiências é outra coisa diferente. E os exemplos poderiam multiplicar-se.

Como os argumentos justificativos podem apresentar uma grande diversidade, uma das primeiras questões que se coloca é saber em que medida estes argumentos apenas podem tomar uma única e mesma forma e até que ponto pode ser-lhes aplicado um mesmo procedimento de avaliação que recorra aos mesmos critérios. É para analisar estas questões que Toulmin introduz a ideia de *campo de argumentação*:

> Dir-se-á que dois argumentos pertencem ao mesmo campo quando os dados e as conclusões que constituem cada um destes dois argumentos são respectivamente

> do mesmo tipo lógico. Dir-se-á que eles participam de campos diferentes quando os fundamentos ou as conclusões não são do mesmo tipo lógico. Assim, as provas que figuram nos *Elementos* de Euclides pertencem a um campo, ao passo que os cálculos subjacentes a uma edição do *Almanaque náutico* dependem de um outro. O argumento "Harry não tem cabelos pretos, pois sei perfeitamente que eles são ruivos" pertence a um terceiro campo bastante particular (...); o argumento "Como Peterson é sueco, não é verosímil que seja católico" liga-se a um quarto campo; o argumento "A minha teoria não pode explicar inteiramente este fenómeno, visto que os desvios entre as vossas observações e as minhas previsões são estatisticamente significativas" depende de um outro ainda; (...). (Toulmin, 1993, p. 17)

A introdução da noção de campo de argumentação conduz Toulmin a questionar-se sobre o que é que na forma e no valor dos argumentos é independente do campo ou, pelo contrário, depende dele, sobre o que é que nos modos de avaliação dos argumentos, nos critérios subjacentes a esta avaliação e na forma como qualificamos as conclusões, varia em função do campo ou não. Não se trata de saber se os critérios de avaliação dos argumentos são comparáveis do ponto de vista do rigor, mas antes em que medida é que existem critérios comuns que possam servir para avaliar argumentos de campos diferentes. A questão do rigor pode, na sua perspectiva, colocar-se no interior de um mesmo campo, mas não tem sentido, por exemplo, comparar o rigor matemático de Gauss com o rigor jurídico de um alto magistrado judicial.

Para analisar as questões anteriormente indicadas, este filósofo começa por se debruçar sobre as *fases gerais* de um argumento. Numa primeira fase importa, na sua perspectiva, colocar um problema, o que pode ser feito através do enunciado de uma questão. Passa-se, em seguida, para uma outra fase em que se torna necessário admitir que existe um certo número de sugestões, "soluções" potenciais que importa considerar: "qualificar uma dada sugestão como uma possibilidade é conceder-lhe o direito de ser examinada" (Toulmin, 1993, p. 21). Depois desta fase surge uma terceira em que se confrontam as "soluções" potenciais com as informações que se possuem questionando-se a relação entre elas. Este confronto pode originar várias situações: a descoberta de uma solução particular que se impõe, sem equívoco, sobre todas as outras (situação que apela à noção de necessidade enquanto modalidade de uma solução); o afastamento de sugestões inicialmente consideradas como possibilidades (o que apela a outras modalidades como, por exemplo, a impossibilidade); a classificação das soluções possíveis segundo a sua adequação e credibilidade relativas ou a escolha, entre as opções aceitáveis, da conclusão mais provável; a introdução de *"nuances"* que, na ausência de certeza, matizam a conclusão (por exemplo, a presença de condições de excepção ou a introdução de palavras que caracterizem a força das conclusões como é o caso de "verosímil" ou "presumivelmente").

Na argumentação, as referidas fases são válidas, segundo Toulmin, numa grande variedade de campos, sendo fortemente provável que se encontrem presentes em vários processos racionais, quer o raciocínio diga respeito a uma questão de Matemática, Física, Ética, Direito ou a um problema da vida quotidiana. E na medida em que a forma do argumento apresentado reflecte estas semelhanças de procedimento, a forma dos argumentos de diferentes campos será também ela semelhante. Ao debruçar-se sobre as principais fases em torno das quais se articula de forma natural um argumento, Toulmin destaca, no entanto, que não correspondem, necessariamente, às do processo que permite, de facto, chegar à conclusão que se procura justificar. A sua opção é focar-se, não no modo como se obtêm as conclusões, mas antes no "seu estabelecimento posterior com a ajuda de uma argumentação justificativa" (Toulmin, 1993, p. 21).

Toulmin distingue no funcionamento de uma modalidade[7] duas componentes que regem a sua utilização: a força e os critérios. Por força da modalidade entende "as consequências práticas do seu uso" (1993, p. 36). Esta força pode contrastar-se com os critérios, normas, motivos e razões por referência aos quais decidimos que, num certo contexto, é oportuno empregar uma modalidade particular. Enquanto a força marca o envolvimento do locutor naquilo que enuncia, a componente criterial depende do domínio considerado. Por exemplo os critérios de impossibilidade não são os mesmos em Matemática, Linguística ou nos domínios moral ou jurídico. O

[7] Toulmin, em *The uses of argument*, não define explicitamente a noção de modalidade. No entanto a análise do texto indicia que as modalidades se referem a categorias relacionadas com a força das conclusões. Por exemplo, necessidade, possibilidade, impossibilidade, probabilidade, etc.

que interessa a Toulmin é esta componente criterial, dependente do contexto, que reenvia globalmente para os procedimentos de justificação e para os tipos de argumentações capazes de sustentar as afirmações.

Tomando como exemplo a modalidade "não poder". A sua força "compreende a imposição geral implícita de que uma coisa ou outra deve ser excluída de tal maneira e por tal razão" (Toulmin, 1993, p. 36). Em qualquer campo, as conclusões não possíveis são as que somos obrigados a eliminar. No entanto, os critérios que usamos para as eliminar variam de um campo para outro. Do mesmo modo, "para uma sugestão ser uma possibilidade num contexto qualquer, ela deve possuir as qualidades requeridas a fim de ser realmente tida em consideração nesse contexto" (idem, p. 44). Neste sentido, o termo "possível" é independente do campo.

Assim, pode afirmar-se que a força de uma conclusão é idêntica seja qual for o campo visado. Contrariamente, os critérios de possibilidade ou de impossibilidade e as normas através das quais julgamos estas modalidades não são invariantes. Dependem, antes, do campo de argumentação em que nos situarmos. As características que fazem de algo uma possibilidade, de um certo ponto de vista, poderão não ter pertinência alguma de um outro ponto de vista; as qualidades exigidas a raciocínios num dado campo podem estar, naturalmente, ausentes em raciocínios perfeitamente meritórios de outros campos. Deste modo, "todos os cânones de crítica e de avaliação dos argumentos são, na prática, dependentes do campo, enquanto que, no que respeita à sua força, nenhum dos nossos termos de avaliação varia em função do campo" (Toulmin, 1993, p. 45). A questão de saber se uma argumentação será sólida pode ser colocada em campos diferentes com a mesma força e as mesmas implicações, embora sejam diferentes as normas de avaliação que utilizamos em cada campo.

A noção de campo de argumentação permite, assim, destacar que não é indiferente debruçarmo-nos sobre os processos de argumentação matemática, científica, jurídica ou literária. Como o próprio Toulmin indica, importa reconhecer que a validade de uma argumentação é uma noção interna e não externa ao campo, pelo que interrogarmo-nos sobre a validade, necessidade, rigor ou impossibilidade de certos argumentos ou conclusões passa por colocar questões que se inscrevem nos limites de um dado campo, passa por ver e descrever a argumentação própria deste campo tal como ela é e reconhecer o seu modo de funcionamento. Neste âmbito, se se pretende compreender os processos de raciocínio e a lógica de uma disciplina, convém prestar atenção, segundo Toulmin, tanto ao seu estado actual, como ao seu desenvolvimento histórico. Nas suas palavras,

> homens como Kepler, Newton, Lavoisier, Drawin e Freud transformaram não somente as nossas crenças, mas também as nossas maneiras de argumentar e as nossas normas de pertinência e de prova: consequentemente enriqueceram tanto a lógica das ciências naturais como o seu conteúdo. Grotius e Bentham, Euclides e Gauss realizaram esta mesma dupla façanha noutros domínios. (Toulmin, 1993, p. 319)

Em suma, as ideias anteriormente apresentadas permitem sublinhar que a argumentação pode desenvolver-se em domínios muito diversos e que aquilo que é apropriado num domínio pode não o ser noutro. Nenhuma argumentação será, pois, possível sem a situarmos num campo particular cujos saberes e normas apoiam e permitem avaliar os passos de um raciocínio. É nesse campo que se enraízam as justificações que sustentam o discurso argumentativo. Assim, argumentar em Matemática, embora possa partilhar aspectos com argumentações desenvolvidas noutras áreas de conhecimento, terá particularidades próprias associadas às especificidades desta área e do que caracteriza os processos de produção do saber matemático.

Argumentos analíticos e argumentos substanciais

A pluralidade de percursos argumentativos e a relatividade da noção de argumentação não foi tida em conta na lógica formal na medida em que esta só considerava um tipo de argumentos: aqueles que, em virtude apenas da sua *forma,* podem ser considerados válidos ou não válidos. Estes argumentos, que Toulmin denomina por *analíticos*, distinguem-se do que designa por argumentos *substancia*is que devem "ter em conta a realidade para que se possa extrair a sua conclusão" (Toulmin, 1993, p. 139). Nos argumentos substanciais a conclusão não pode ser vista como um simples rearranjo do que é dito nos dados e justificações do argumento e, por isso, embora possa ser transparente a legitimidade da passagem à conclusão, estes argumentos jamais serão tautológicos contrariamente aos analíticos, em princípio[8] tautológicos. Nestes últimos "o fundamento que autoriza a garantia inclui, explícita ou implicitamente, a informação transportada na própria conclusão" (Toulmin, 1993, p. 154). Segundo Toulmin, Kant poderia ter designado os argumentos substanciais que não se regem pela validade formal e, por isso, não obedecem à necessidade interna dessa forma, por argumentos sintéticos.

Argumentações analíticas são, assim, aquelas cujas conclusões não contêm nada que não esteja já potencialmente nas premissas. Estas argumentações explicam certos aspectos do significado das premissas por meio da dedução. Em contrapartida,

> os argumentos substanciais *expandem* o significado de tais proposições na medida em que relacionam com elas um caso específico por actualização, modificação, aplicação ou as três coisas. Assim, a argumentação substancial é informativa no sentido em que o significado das premissas aumenta ou muda pela aplicação a elas de um novo caso (...) ou seja, um aspecto latente das premissas é visivelmente elaborado. (Krummheuer, 1998, p. 224, destaque no original).

Para Toulmin (1993), "se o objecto de um argumento é estabelecer conclusões de que não estamos inteiramente certos ligando-as a informações mais seguras, torna-se duvidoso que um autêntico argumento prático possa ser verdadeiramente analítico" (p. 156). Na sua perspectiva, apenas os argumentos matemáticos parecem estar ao abrigo dos argumentos substanciais e, mesmo assim, nem todos. Refere, por exemplo, que aqueles que se inscrevem na Matemática pura são analíticos. O que o matemático lhes exige é que evitem contradições e respondam às normas de coerência e de prova em todas as suas relações internas. No entanto, logo que os

[8] Toulmin refere que não se pode desde logo caracterizar os argumentos analíticos como argumentos em que o enunciado *dados*, *fundamento* e logo *conclusão* é uma tautologia. Pelo menos em certos casos este critério não satisfaz, como acontece, por exemplo, com os quasi-silogismos em que os quantificadores universais "todo" e "nenhum" são substituídos pelos termos mais restritivos "quase todo" e "quase nenhum" (ver, por exemplo, Toulmin, 1993, pp. 161 e p. 164). Os termos *dados*, *garantia*, *fundamento* e *conclusão* são algumas das designações dos elementos estruturais que considera existirem numa argumentação e cujo significado será discutido na secção intitulada *Modelo de análise da microestrutura de um argumento.*

cálculos são usados ao serviço da argumentação prática, as exigências modificam-se. E assim, os argumentos utilizados em Matemática aplicada, embora formalmente idênticos aos empregues em Matemática pura, são substanciais e não analíticos. Um argumento em Matemática pura poderá ser, segundo Toulmin, de "uma elegância sedutora enquanto argumento modelo susceptível de ser analisado pelos lógicos formais, mas dificilmente se poderia encontrar argumento menos representativo" (idem, p. 156).

Se nos situarmos na perspectiva de Perelman e tivermos em conta que, para este filósofo, a argumentação está relacionada, não com a auto-evidência e a necessidade lógica das conclusões, mas antes com a arte de convencer e com o campo do credível, do plausível e do provável, pode afirmar-se que na base de uma teoria da argumentação estão, como refere Krummheuer (1995, 1998), argumentações substanciais. Usualmente este tipo de argumentação "não tem a severidade lógica de uma dedução formal" (idem, 1998, p. 225). Este facto não deve, contudo, ser considerado como uma fraqueza, mas antes como um sinal de que há campos de problemas que não são acessíveis à lógica formal. Como o próprio Toulmin destaca com muita ênfase, a argumentação analítica não deve ser considerada como o tipo ideal de argumentação e a argumentação substancial não deve ser vista como contendo "buracos" lógicos que devem ser remediados e que a transformam num parente pobre da primeira. Assim sendo, a argumentação substancial tem o direito de existir por si própria, pois é através dela que uma asserção ou decisão é gradualmente apoiada não de uma forma arbitrária mas sim convincente através, por exemplo, da apresentação de relações, explicações ou justificações.

Modelo de análise da microestrutura de um argumento

Um dos aspectos significativos do trabalho de Toulmin é, como anteriormente referi, a elaboração de um modelo de análise da microestrutura de um argumento com uma estrutura ternária. Metaforicamente, este filósofo compara um argumento a um organismo. Tal como este, também um argumento tem, simultaneamente, “uma estrutura grosseira, anatómica e uma estrutura mais fina, por assim dizer mais fisiológica” (Toulmin, 1993, p. 115). As fases gerais de um argumento, que marcam o seu progresso desde a fase inicial do enunciado de um problema até à apresentação final de uma conclusão, passando pela formulação, análise e eventual eliminação de soluções potenciais, representam as suas “unidades anatómicas fundamentais” (idem). No entanto, segundo Toulmin, podemos reconhecer em cada uma dessas fases e, mais particularmente, no interior de cada parágrafo quando nos situamos ao nível das frases individuais, uma estrutura mais fina que importa analisar se queremos compreender, verdadeiramente, a natureza dos processos argumentativos.

É esta estrutura mais fina que Toulmin procura identificar e caracterizar. Inspira-se na teoria do Direito, pois considera que a forma clássica de análise da microestrutura dos argumentos herdada de Aristóteles — premissa menor, premissa maior, logo conclusão — não é suficientemente complexa e transparente para reflectir todas as distinções que se nos impõem na prática quotidiana de avaliação da argumentação. Para o efeito constrói um “modelo dialéctico” (Plantin, 1990, p. 26), descrito em seguida, que é, antes de mais, um percurso justificativo que integra componentes variadas e que se desenvolve segundo um certo número de etapas articuladas entre si.

Quem emite uma asserção, segundo Toulmin, expõe-se a vê-la contestada. Nesse caso, para a defender, deve invocar factos que a apoiam, ou seja, deve apresentar *dados* que justificam o enunciado original. Consequentemente, este filósofo começa por distinguir num argumento a *tese* ou *conclusão*, de que procuramos estabelecer o valor, dos factos que invocamos para apoiar esta tese: os *dados*. Os dados de uma argumentação são, assim, uma criação factual em que a conclusão se pode enraizar e que não são, necessariamente, dados empíricos. Consideram-se dados as afirmações que não são postas em causa. Se não existir acordo sobre a sua validade será necessária uma nova argumentação que proporcione evidência aceitável o que não conduz, por si só, a uma nova categoria, mas constitui antes uma aplicação recursiva do esquema geral da argumentação.

Pode acontecer que haja acordo em relação aos dados mas que este não seja suficiente para se considerar que eles apoiam a conclusão. Ou seja, podem surgir questões respeitantes à natureza e validade da passagem efectuada entre dados e conclusão. Evocando o exemplo apresentado por Toulmin, se se souber que há uma pessoa, Harry, que nasceu nas Bermudas e se se concluir que ela tem nacionalidade britânica, poder-se-á perguntar porque é que o facto de Harry ter nascido naquele local permite pensar que ele tem esta nacionalidade.

Neste caso, não basta apresentar dados suplementares pois a questão manter-se-á. Importa, sim, mostrar que partindo dos dados, a passagem que conduz à conclusão é oportuna e legítima. Há, assim, necessidade de apresentar proposições de um tipo bastante diferente, como sejam "regras, princípios, enunciados, etc. que autorizam uma inferência" (Toulmin, 1993, p. 120). Estas proposições, que funcionam como pontes sobre as quais se pode dar o passo inferencial, são denominadas por *garantias*. As garantias funcionam, assim, como licenças de inferência e correspondem "às normas ou cânones práticos da argumentação" (idem, p. 121) de um dado campo. A sua tarefa "consiste simplesmente em indicar explicitamente a legitimidade da passagem em questão e de a re-enviar à classe de passagens mais importante cuja legitimidade é pressuposta" (idem, p. 122). Em discussões nas aulas de Matemática, as garantias podem ser, por exemplo, "fórmulas ou algoritmos que nos permitem encontrar valores ou variáveis desconhecidos a partir de valores de variáveis conhecidos" (Forman, Larreamendy - Joerns, Stein, & Brown, 1998, p. 10).

Com as noções *dados* (D), *conclusão* (C) e *garantia* (G), Toulmin (1993) considera que estão reunidos "os termos necessários à composição de um primeiro esqueleto de análise de argumentos" (p. 122). Neste "esqueleto" liga por uma seta os dados à conclusão que eles apoiam, surgindo a garantia que autoriza a passagem de uns a outros directamente sob a seta. Importa destacar que a passagem dos dados à conclusão "não é sempre válida, como aconteceria na lógica formal, e, sobretudo, não é independente do contexto em que surge" (Carrilho, 1992, p. 25). Esquematicamente:

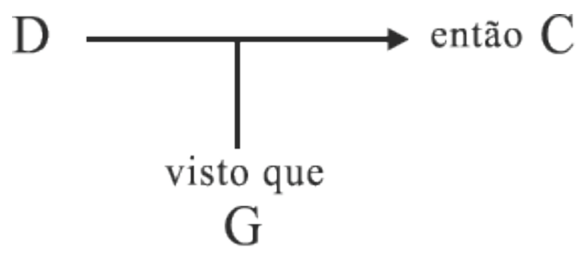


Figura 1: Representação da forma mínima de argumentação, segundo Toulmin

O esquema "dados — garantia — conclusão" representa o "coração da argumentação" (Plantin, 1990, p. 30) e, formalmente, "esta é a forma mínima de argumentação" (Krummheuer, 1995, p. 243). No entanto, estes elementos podem não ser suficientes para analisar um discurso argumentativo, pois nem sempre as garantias e os dados permitem inferir a conclusão com a mesma força:

> Há diversas espécies de garantias, susceptíveis de conferir uma força variável às conclusões que elas justificam. Certas garantias autorizam-nos a aceitar uma conclusão sem equívoco, supondo-se que os dados apropriados estão reunidos — estas garantias habilitam-nos em casos propícios a qualificar a nossa conclusão por meio do advérbio "necessariamente"; outras autorizam-nos a passar dos dados às conclusões quer provisoriamente, quer enunciando, condições, excepções ou reservas — casos em que podem intervir outros qualificadores modais como "provavelmente" ou "é verosímil que". (Toulmin, 1993, p. 123)

Assim, o esquema da argumentação é enriquecido com uma referência explícita ao grau de força que os dados conferem à conclusão em virtude da garantia. Pode ainda acontecer que haja circunstâncias particulares que suspendam a aplicação da garantia ao domínio dos dados. No exemplo sobre Harry anteriormente apresentado, ele deixaria de ter a nacionalidade britânica se os seus pais fossem estrangeiros ou se tivesse optado por outra nacionalidade. No modelo que apresenta, Toulmin introduz indicadores de força, que designa por *qualificadores modais* (Q), e *condições de excepção ou refutação* (R). Enquanto que o qualificador indica a força que a garantia concede à passagem dos dados à conclusão, as condições de refutação assinalam as circunstâncias em que seria necessário anular a autoridade geral da garantia.

Finalmente, pode ainda acontecer que seja questionada a validade da garantia enquanto "licença" de inferência que autoriza a passagem dos dados à conclusão, ou seja, pode questionar-se se a garantia é, ela mesma, aceitável. Por exemplo, pode colocar-se a questão de saber porque é que é válido que um homem nascido nas Bermudas seja um sujeito britânico. Neste caso há, segundo Toulmin, a necessidade de invocar, por exemplo, as datas de promulgação das leis e outras disposições legais que regem a nacionalidade de pessoas nascidas em colónias britânicas. Assim, por vezes, torna-se necessário ancorar a garantia com um certo número de elementos justificativos que a apoiam. Toulmin designa estes elementos justificativos por *fundamento* (F) da garantia. O fundamento fortalece a aceitabilidade da garantia; indica porque é que ela deve ser aceite como tendo autoridade. No esquema o fundamento é representado sob o enunciado da garantia que apoia. No seu conjunto, o modelo proposto por Toulmin para analisar a microestrutura de um argumento assume o seguinte aspecto:

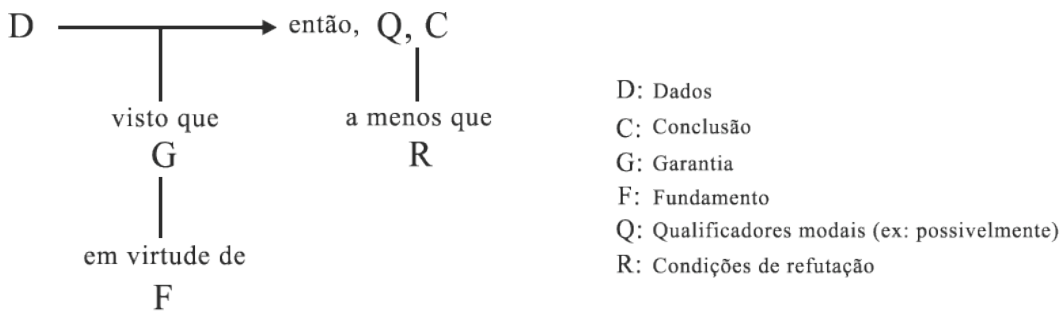


Figura 2: Modelo de análise da microestrutura de um argumento, segundo Toulmin

O fundamento diferencia-se das garantias na medida em que os enunciados destas são hipotéticos, semelhantes a pontes/passagens, enquanto que o seu fundamento pode exprimir-se sob a forma de enunciados factuais, categóricos. Por exemplo, "a baleia é um mamífero" é uma garantia a que se poderia apelar no decurso de um raciocínio prático. Esta garantia justifica-se pela referência a um sistema taxionómico que permite classificar a baleia como um mamífero. Embora não seja necessário o modelo de argumentação apresentado variar significativamente de um campo de argumentação para outro, Toulmin chama, recorrentemente, a atenção para que o tipo de fundamento requerido pelas garantias, tal como estas, dependem claramente do campo em que o discurso argumentativo se desenvolve. Para ilustrar o que pode ser o fundamento de uma garantia na aula de Matemática, Forman et al. (1998) apresentam o seguindo caso:

> Por exemplo, um aluno pode defender que a área de um rectângulo particular é 20 cm^2. Se a sua pretensão for questionada pode referir-se às dimensões do rectângulo (4 cm e 5 cm) como dados. Se estes dados não forem postos em causa, pode apresentar como garantia o algoritmo para calcular a área como sendo o comprimento multiplicado pela largura (ou como alternativa pode fazer uma partição do rectângulo em dois rectângulos mais pequenos, digamos, 4 por 4 cm e de 1 por 4 cm e adicionar as suas áreas individuais). O seu fundamento para estas garantias será presumivelmente que comprimento vezes largura é o algoritmo correcto para o cálculo da área (ou que a soma das áreas dos rectângulos parcelares tem que ser igual à área do rectângulo total). O questionamento à sua pretensão deve focar-se na garantia e/ou fundamento apresentados para a apoiar (supondo que os dados não estão em causa). (Forman et al., 1998, p. 532)

Contrariamente aos dados, garantia e conclusão, que aparecem em qualquer argumento, os qualificadores, as condições de excepção ou refutação e o fundamento podem, ou não, aparecer. O fundamento das garantias que evocamos não deve, pelo menos de início, ser expresso de maneira explícita. Podem aceitar-se garantias sem pôr em causa o seu fundamento. Aliás, segundo Toulmin (1993), “se exigíssemos que fossem justificadas todas as garantias não esquecendo de contestar uma só, a argumentação dificilmente poderia começar” (p. 130).

A distinção entre dados e garantias não é absoluta. Por exemplo, testes gramaticais não podem servir, unicamente, de base a esta distinção, pois uma mesma frase tanto pode ser enunciada para comunicar uma afirmação como para autorizar uma passagem num raciocínio e, em certos contextos, pode mesmo desempenhar esta dupla função. A dificuldade da distinção entre dados e garantias é acrescida porque os dados mencionados dependem das garantias que estão a ser escolhidas. Além disso, as pessoas ao interagirem, não estruturarem as suas contribuições de acordo com as categorias do esquema proposto por Toulmin. Na distinção entre dados e garantias, importa, no entanto, ter presente que enquanto os dados “fortalecem a base” (Toulmin, 1993, p. 120) sobre a qual o argumento específico é construído, contrariamente, as garantias são gerais e atestam a "solidez de todos os argumentos do tipo apropriado" (p. 122).

Toulmin parece entender a argumentação como um tipo de actividade que decorre de uma acção cujo valor ou validade é questionado o que requer a apresentação de elementos justificativos. Neste contexto, o modelo que propõe constitui um modo útil de mostrar como se articulam os elementos essenciais de uma argumentação e, em particular, como é que argumentações secundárias se podem inserir numa argumentação principal. Por exemplo, se uma garantia é contestada nada impede de considerar o seu estabelecimento como uma argumentação secundária ou preparatória. De igual modo, se os dados forem postos em causa pode atribuir-se-lhe o estatuto de uma conclusão potencial. Assim, este modelo, em princípio, pode captar as estratégias usadas numa argumentação particular, o que poderá facilitar avaliá-las através dos cânones do campo onde a argumentação se inscreve e contribuir para trazer à tona as suas fraquezas ou potencialidades.

Pensando a argumentação em Matemática com o contributo de Toulmin

Ao apresentar em 1958 *The uses of argument*, Toulmin esperava reformar o campo da lógica. No entanto, não foi o que aconteceu. Comentando o acolhimento da obra, este filósofo indica que não encontrou grande eco por parte dos lógicos e filósofos que, em certa medida, constituiriam o seu público mais natural. Este facto, segundo Plantin (1990), não é de estranhar. Na sua perspectiva, para os lógicos seguidores de Fregue e Russel, o pensamento de Toulmin poderia significar um retrocesso para concepções pré-científicas da lógica propriamente dita, uma vez que esta não poderia ser concebida senão no âmbito da Matemática. Segundo Carrilho (1992), os efeitos do pensamento de Toulmin manifestaram-se mais eficazes e criativos no exterior do campo da lógica, "designadamente no desenvolvimento de estudos sobre a pluralidade das práticas argumentativas e a sua irredutibilidade a uma abordagem lógica" (p. 26).

Presentemente, uma das áreas em que se observa uma influência significativa do pensamento de Toulmin é a da educação matemática, concretamente, em trabalhos focados na argumentação e na prova matemática ou em relações entre argumentação e prova. Por exemplo, Toulmin é um dos três autores a que Balacheff (1999), depois de ter constatado a variedade de estudos sobre argumentação e a importância de ter em conta a diversidade existente nas problemáticas sobre este tema, recorre para perspectivar as relações entre argumentação e demonstração na aula de Matemática. Segundo Balacheff, se nos colocarmos na perspectiva deste filósofo, parece ser possível encarar uma continuidade entre estas actividades e até mesmo considerar a demonstração como um caso particular de argumentação. Esta continuidade, segundo Balacheff, parece, no entanto, duvidosa no âmbito do quadro proposto por Perelman. Usando o modelo de Toulmin como instrumento metodológico para comparar, do ponto de vista didáctico e cognitivo, as relações entre argumentação e demonstração na aprendizagem da Matemática, Pedemonte (2002) refere que uma das conclusões do seu estudo empírico foi, precisamente, a existência desta continuidade. Considera, assim, a argumentação em Matemática como um caso particular da demonstração. Por seu turno, Krummheuer (1995, 1998) apoia-se em Toulmin para justificar que os conceitos de argumento e argumentação não devem ser exclusivamente conectados com a lógica formal ou ser vistos apenas como uma questão de lógica, pois se as derivações lógicas formais das conclusões fossem a única forma de argumentação, o domínio da comunicação racional seria, na sua perspectiva, extremamente restrito e a argumentação como um modo possível de comunicar baseada na racionalidade seria bastante irrelevante. Entre outros autores que recorrem a Toulmin nos seus trabalhos estão Duval (1999), Forman et al. (1998), Knipping (2003, 2004), Stephan e Rasmussen (2002), Yackel (1997, 2001, 2002a) e Yackel e Cobb (1994).

O modelo de análise da microestrutura de um argumento é uma das ideias de Toulmin mais amplamente usada ou referida no âmbito da educação matemática. Este modelo foi concebido para analisar funções de elocuções particulares que se encontram, como este filósofo refere, ao nível das frases individuais. Na sua obra

The uses of argument não se encontram referências à utilização do modelo em situações educativas ou noutras que envolvam discursos colectivamente produzidos. No entanto, como bem salienta Krummheuer (1995), a argumentação na aula não aparece sob a forma de um monólogo, mas antes como uma interacção directa face a face que, devido à natureza emergente da interacção social, envolve usualmente vários protagonistas. Estamos, assim, na presença de uma "*argumentação colectiva*" (Krummheuer, 1995, p. 232) que nem sempre se desenvolve de maneira harmoniosa pois podem ocorrer desacordos que conduzem a correcções, modificações ou desvios. O conjunto de asserções que no final obtém consenso é, segundo Krummheuer, modelado passo a passo superando controvérsias. A reconstituição do produto da actividade argumentativa requer que se evoque o processo de interacção.

Este autor considera que embora as abordagens mais recentes à teoria da argumentação ponham a ênfase nos aspectos da comunicação, frequentemente, ao entenderem a argumentação como um tipo de actividade metacognitiva isolada, subestimam os aspectos argumentativos das actividades do dia-a-dia. Na sua perspectiva, contudo, uma acção e a racionalidade dessa acção são aspectos que não podem ser examinados separadamente. Defende, assim, a importância de alargar esta noção de argumentação de modo a serem integradas ideias das teorias interaccionistas e etnometodológicas. Salienta, também, que embora frequentemente a argumentação seja entendida como uma actividade metacognitiva subsequente a uma acção cuja validade é questionada ou desafiada, parece ser mais apropriado usar o conceito de argumentação para descrever certos aspectos da acção usual. Fundamenta esta ideia apoiando-se, em particular, numa aula de Matemática dos primeiros anos de escolaridade observada no âmbito de um projecto. Segundo Krummheuer, os alunos ao tentarem resolver um problema desenvolvendo, para o efeito, um método compreensível de raciocínio, o processo, em si, já continha um factor argumentativo: "muito frequentemente, esta resolução é já uma argumentação e não precisa de ser assegurada por um procedimento metacognitivo separado e adicional" (p. 232).

Num artigo intitulado “The Etnography of Argumentation”, Krummheuer (1995) propõe-se analisar a “génese social da argumentação” (p. 229) considerando a argumentação principalmente como um fenómeno social que ocorre quando “indivíduos que cooperam tentam ajustar as suas intenções e interpretações apresentando verbalmente as razões das suas acções” (idem). Neste contexto, analisa vários episódios de argumentação colectiva ocorridos numa das aulas da turma envolvida no referido projecto, apoiando-se, em particular, no interaccionismo e no modelo de análise da microestrutura de um argumento proposto por Toulmin. A elaboração, por Krummheuer, do trabalho deste filósofo é relevante, em especial, porque se foca no caso específico da argumentação em Matemática e, além disso, amplia a noção de argumentação do individual para o colectivo. Vários educadores matemáticos que usam o modelo de Toulmin para analisar aspectos da actividade argumentativa desenvolvida na aula, recorrem, também, aos contributos de Krummheuer (Forman et al. 1998, Whitenack & Knipping, 2002; Yackel 2002a).

A observação da análise de um dos episódios apresentada por Krummheuer, permite destacar que a utilização do modelo de Toulmin requer uma análise muito fina do discurso e, eventualmente, de elementos não discursivos. Ilumina, também, potencialidades deste modelo na identificação da natureza dos contributos apresentados pelos alunos numa situação de argumentação colectiva. Permite, ainda, evidenciar que usar o modelo para analisar este tipo de argumentações é um processo mais complexo do que seria se se tratasse apenas de analisar passos argumentativos de um só aluno que não interagisse com ninguém durante o percurso argumentativo. Assim, apresento, em seguida, um episódio e a representação gráfica da sua análise elaborada por Krummheuer a partir do referido modelo. Empiricamente, este autor delimitou o conceito de argumentação às interacções da aula relacionadas com a explicação intencional do raciocínio subjacente a uma resolução de um problema durante ou após o seu desenvolvimento.

O episódio localiza-se numa aula em que foi introduzida a multiplicação. Imediatamente antes dele, dois alunos, Jack e Jamie, descobriram um processo de calcular o produto de 2 por 4 concluindo que era 8. Estava-se numa fase de trabalho em grupo e a tarefa que os alunos tinham em mãos e para a qual não conheciam nenhum procedimento de resolução, era:

$$4 \times 4 = \_\_\_\_\_\_$$

Episódio:

1. Jack: Quanto é 8 mais 8?
2. Jamie: 16. São 4 conjunto de quatros, 8 (pausa) 16.
3. Investigador: Porque é que disseste quanto é que é 8 e 8, Jack?
4. Jamie: Porque 4 conjuntos, umm 4, 2 conjuntos fazem 8.
5. Investigador: Sim.
6. Jack: *(levanta dedos de uma mão)* Tem mais 2 conjuntos. Como 2 e 2 são 4.
7. Investigador: Ok, Ok, muito bem.

(Krummheuer, 1995, p. 240)

Os alunos, segundo Krummheuer, parecem apoiar-se no facto de saberem que 8+8 =16 e que 2 conjuntos de 4 são 8 para justificarem que 4x4 é igual a 16. Assim, estes factos constituem os *dados* da argumentação desenvolvida. A segunda parte da fala de Jamie correspondente ao §2, juntamente com a contribuição de Jack referindo que existem mais dois conjuntos de 4 (§6), poderão ser interpretadas como *garantias* que relacionam os dados com a conclusão. De facto, estas contribuições respondem à questão de saber o que é que a adição de 8 com 8 tem a ver com a multiplicação de 4 por 4. Finalmente, para justificar porque é que estas garantias devem ser aceites como tendo autoridade, Jack apresenta uma explicação levantando os dedos de uma mão (§6) e acrescenta "como 2 e 2 são 4 (§6)". Para Krummheuer ambas as acções podem ser interpretadas como o *fundamento* da garantia. O esquema do argumento[9], de acordo como o modelo de Toulmin, é representado na figura 3:

[9] Krummheuer (1995) utiliza a palavra argumento no sentido de resultado de um processo argumentativo que conduziu a um consenso.

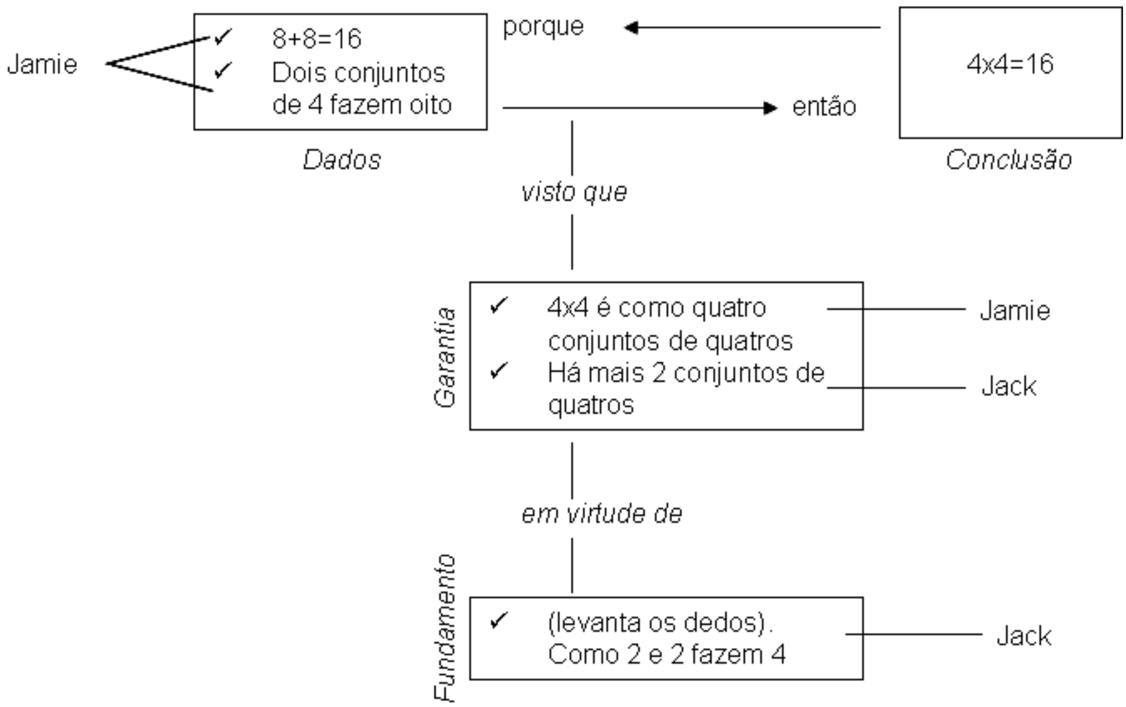


Figura 3: Representação esquemática do argumento dos alunos, segundo Krummheuer

Observando a figura 3, constata-se que a argumentação entre Jack e Jamie é, na terminologia de Toulmin, do tipo substancial pois o fundamento referido é uma analogia (Krummheuer, 1995). Geralmente os argumentos desenvolvidos pelos alunos na aula de Matemática são deste tipo, no sentido em que se relacionam mais com o convencer do que com a necessidade lógica das conclusões (Krummheuer, 1995; Yackel & Cobb, 1994). Como anteriormente referi, argumentos substanciais não devem ser considerados sem valor tanto mais que "a génese da compreensão da prova situa-se na compreensão da necessidade da justificação matemática e numa compreensão emergente do que constitui um argumento aceitável" (Yackel & Cobb, 1994, p.4).

A análise da figura 3 revela, também, que embora os dois alunos tivessem participado na argumentação, as suas principais contribuições incidiram em diferentes componentes do argumento. A conclusão foi apresentada apenas por um aluno que foi também o responsável pela indicação de todos os dados. O fundamento foi referido por outro e os dois enunciaram garantias. Poder-se-ia, por exemplo, discutir se o essencial da actividade matemática esteve a cargo de ambos ou não.

Constata-se, além disso, pela análise do episódio em conjunção com a da figura 3, que os dados do argumento não surgiram todos na mesma altura (§2 e §4), ou seja, não houve um percurso linear dos dados para a conclusão. Muito possivelmente foi a questão do investigador (§3) que fez surgir um dado, relevante para a compreensão da conclusão, mas que até aí era do domínio do pensamento privado de um participante na argumentação. Aparecer esta informação no espaço de discurso poderá, eventualmente, ter contribuído para a compreensão, pelo outro aluno, de porque é que 4x4 é igual a 16. Provavelmente foram também as intervenções do investigador que fizeram surgir quer duas garantias apresentadas, quer o fundamento.

Aceitar que no episódio apresentado um dos dados, as garantias e o fundamento emergiram devido a estas intervenções, permite chamar a atenção para a importância do professor no desenrolar de uma argumentação colectiva. Com efeito, nem sempre as explicações ou justificações apresentadas pelos alunos na aula de Matemática contêm todas as informações que permitem compreendê-las ou que são importantes para a sua compreensão. Frequentemente, há aspectos implícitos nas suas contribuições que o professor consegue descortinar, mas que outros alunos poderão não ser capazes de o fazer. Face a cada situação de argumentação, parece ser importante que o professor avalie se os dados apresentados são suficientes para apoiar e/ou permitir compreender a conclusão, se há ou não consenso sobre os dados, quais as garantias que permitem aos alunos inferir a conclusão e se é, ou não, necessário solicitar o fundamento destas garantias de modo a que as experiências de aprendizagem sejam produtivas para os vários elementos da turma e não apenas para alguns.

Um trabalho de Yackel (2002a) focado no papel do professor na argumentação colectiva em que um dos instrumentos de análise de dados empíricos foi o modelo de Toulmin, chama, precisamente, a atenção para estes aspectos. Em particular, a análise deste papel permite salientar a importância do professor conhecer as possibilidades e constrangimentos conceptuais dos seus alunos e a necessidade de ter um conhecimento profundo dos conceitos matemáticos relevantes subjacentes à Matemática que ensina: "o conhecimento matemático do professor contribui para a sua capacidade de reconhecer a necessidade de apoios argumentativos e para proporcionar ou fazer surgir apoios apropriados" (p. 425). Um outro aspecto que este trabalho permite destacar é a possibilidade da argumentação ser orientada pelo professor, não no sentido de encerrar uma discussão ou obter um acordo sobre ideias apresentadas, como é usual, mas antes como uma abertura para expandir a discussão de modo a incluir novos conceitos matemáticos.

Numa situação de argumentação concreta, o modelo proposto por Toulmin "que representa o modelo ideal de um argumentação substancial" (Krummheuer, 1995, p. 239), apenas aparece parcialmente e/ou numa versão modificada. Ajuda a reconstruir a lógica informal de uma argumentação e o tipo de asserções apresentadas, por exemplo, no processo de resolução de uma situação de divergência de ideias. A sua utilização requer, contudo, uma análise simultânea das interacções existentes na situação, pois as elocuções não têm uma função determinada fora da interacção em que se situam: "O modelo chama simplesmente a atenção para os diferentes papéis que as elocuções desempenham numa interacção quando é reconstruída a partir da emergência de um argumento substancial" (idem, p. 240).

Com efeito, um aspecto importante na argumentação colectiva é que a selecção de dados, garantias e fundamentos está dependente do contexto social em que o argumento é estabelecido (Krummheuer, 1995). Ou seja, o que constitui os dados, garantias e fundamentos de uma argumentação não é algo predeterminado, mas antes negociado pelos participantes enquanto interagem. Por exemplo, dados bem sucedidos enquanto apoio de uma determinada conclusão são os aceites pelos vários participantes numa argumentação e que não são objecto de questionamento posterior. Do mesmo modo, fundamentos bem sucedidos são usualmente pontos de acordo entre as pessoas envolvidas num debate no sentido em que constituem teorias, crenças, ideias partilhadas (Forman et al., 1998). Numa turma aquilo que, num determinado momento, é requerido como dados, garantias ou fundamentos vai evoluindo, pois à medida que as práticas matemáticas se tornam partilhadas na aula, estão para além da justificação. Por outro lado, aquilo que é apresentado como tendo estas funções contribui também para o desenvolvimento do que é partilhado pela turma (Yackel, 1997, 2002a).

Há, pois, uma relação interactiva entre os dois aspectos: "a evolução das práticas da aula segue em paralelo (é possibilitada e constrangida) com uma evolução do que a criança considera como dados, garantias e fundamentos na argumentação" (Yackel, 1997, p. 18). Por exemplo, a afirmação "9 não é um número primo" pode ser um dado para alunos do 10º ano de escolaridade e, nessa medida, ser uma base consensual em que se apoiam para justificar uma conclusão. No entanto, para muitos alunos de uma turma do 7º ano pode não o ser e admiti-la como um dado pode passar pela apresentação de garantias e/ou fundamentos que permitam mostrar a sua validade. Neste sentido, poderá representar uma conclusão a fundamentar. O sucesso de um argumento depende, assim, "não apenas da aplicação correcta de um algoritmo ou da solidez lógica, mas também do grau em que um certo conjunto de dados, garantias e fundamentos pode realmente convencer o auditório acerca da veracidade de uma conclusão" (Forman et al., 1998, p. 533).

O pensamento de Toulmin e, em particular, o seu modelo de análise da microestrutura de um argumento, tem, como procurei salientar, potencialidades reconhecidas por vários autores para equacionar questões relativas à argumentação em Matemática. Krummheuer (1995) indica que este modelo "ajuda a reconstruir a racionalidade emergente, ou seja, a lógica (informal) das questões do dia-a-dia" (p. 247) da aula de Matemática; Pedemonte (2002) salienta que ele é "um utensílio poderoso para analisar as argumentações dos alunos e para comparar argumentação e demonstração" (p. 105); e Knipping (2004) refere que também na investigação que desenvolveu focada na argumentação nos discursos de prova, o "modelo de Toulmin revelou ser igualmente frutuoso" (p. 74).

Há, no entanto, limites que são apontados a aspectos do pensamento de Toulmin. Segundo Boero (1999), a concepção de argumentação deste filósofo parece não ser completamente satisfatória para tratar dos aspectos específicos da argumentação no que respeita à actividade matemática, na medida em que neste modelo não é aprofundada a estrutura linguística da sucessão de argumentos, que é um aspecto relevante nesta actividade. De acordo com Sekiguchi (2000), o modelo de análise da microestrutura de um argumento reflecte o estilo ocidental de argumentação não sendo adequado para analisar os estilos tradicionais de comunicação no Japão, em especial no que respeita à comunicação na aula de Matemática. Para Pedemonte (2002) este modelo permite representar bem os constituintes explícitos de uma argumentação mas não, por exemplo, heurísticas sobre um desenho ou aspectos implícitos envolvidos na argumentação que estão na base de um raciocínio e que podem ser observáveis a partir da resolução de um problema. Por seu turno, Knipping (2004) indica que apenas usou o modelo de Toulmin para analisar passos argumentativos individuais. O modelo não se revelou útil, na sua perspectiva, para analisar a estrutura global dos processos de prova, devido, em especial, à complexidade das estruturas argumentativas existentes, à sobreposição de argumentos e ao desenvolvimento, em paralelo, de diferentes justificações para uma conclusão desejada. Esta constatação conduziu à elaboração de representações esquemáticas para análise da estrutura argumentativa global das aulas que observou, metaforicamente designadas por "estrutura-*fonte*" e "estrutura-*reservatório*" (Knipping, 2004, p. 76, destaque no original). "Num discurso de prova com uma estrutura tipo fonte, os argumentos e ideias chegam de origens variadas, como água brotando de várias nascentes" (idem). O professor encoraja a formulação de diferentes conjecturas que são discutidas pela turma, algumas são refutadas mas valorizadas, e incentiva a apresentação de justificações diversas não apenas para a conclusão visada mas também para afirmações intermédias. Diferentemente, "argumentações com uma *estrutura reservatório*, fluem em direcção a conclusões intermédias visadas que estruturam a argumentação global em partes que são distintas e auto-contidas" (idem). Estas partes são "como reservatórios que contêm e purificam a água antes de a permitir fluir para o estádio seguinte” (idem).

Em síntese, procurei analisar o pensamento de Perelman e de Toulmin sobre a problemática da argumentação. Constatei a existência de algumas afinidades no pensamento dos dois filósofos, entre as quais uma que me parece ser de salientar: a recusa de aceitarem como uma fatalidade inscrita no desenvolvimento normal da ciência o corte entre as construções dos lógicos e o esforço de racionalidade conduzido pelo pensamento não formal. O estudo da argumentação desenvolvido por estes dois filósofos vai, no entanto, em sentidos diferentes. Concretamente, um dos principais objectivos de Perelman é a discriminação dos vários tipos de argumentos que surgem na prática discursiva, o que conduz a que a sua teoria da argumentação seja mais descritiva do que normativa, contrariamente ao que acontece com o trabalho de Toulmin. Este filósofo, por seu turno, procura identificar um esquema geral para os elementos existentes em todos os empreendimentos racionais de justificação de asserções, aspecto ausente em Perelman. Com Toulmin, quando um enunciado é posto em causa, a função da argumentação é precisar o grau de verdade que lhe deve ser atribuído, o que pressupõe a aceitação de uma noção de verdade gradual e não dualista. Assim, conserva a noção tradicional de verdade, tornando-a, no entanto, relativa ao conectá-la com os critérios de avaliação adoptados no domínio onde o discurso argumentativo se desenvolve (Plantin, 1990). O estudo de Perelman não diz respeito à verdade, mas sim à adesão, o que não significa que este filósofo não se tivesse preocupado com a questão da verdade. Com efeito, na introdução da obra publicada em 1958 (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1999), refere que a separação dos aspectos do raciocínio relativos à verdade e à adesão, foi uma condição necessária para tornar possível o desenvolvimento de uma teoria da argumentação, deixando para depois a preocupação com a sua interferência ou com a sua eventual correspondência. Para Perelman, a noção de auditório constitui, desde o início, uma noção básica, orientando todas as actividades da palavra, mesmo o discurso interior entendido como uma deliberação. Em contrapartida, em *The uses of argument* apresentado por Toulmin em 1958, não se encontram referências explícitas a esta noção e sobressai a importância atribuída a campo de argumentação.

É interessante constatar, contudo, que, segundo Plantin (1990), Toulmin, ao revisitar em 1983 *The uses of argument*, insistiu na importância de ter em conta os aspectos interactivos da argumentação, o que poderá indiciar a valorização do outro nas actividades argumentativas. Esta importância encontra-se reflectida, por exemplo, na ideia de que a argumentação é "a exposição de uma tese controversa, o exame das suas consequências, a permuta das provas e das boas razões que a sustentam, e um encerramento bem ou mal estabelecido" (Plantin, 1990, citando Toulmin, p. 31). Encontra-se, também, reflectida na ampliação da noção de campo de argumentação aos "'fóruns de discussão' que encontram o seu lugar ao lado 'das regras de procedimento, das técnicas de argumentação, dos tipos de provas, das implicações práticas que têm o seu lugar nos diferentes empreendimentos em que se argumenta e raciocina em comum'" (idem). A argumentação deixa, assim, de ser apenas definida como um encadeamento proposições, sendo considerada também, do ponto de vista funcional, como uma interacção humana.

Na aula de Matemática, a argumentação quando se reveste da forma oral, é uma troca discursiva entre os participantes com o objectivo de convencer outros de certas ideias ou modos de pensamento. É, assim, um empreendimento colectivo. É, também, dialéctica, no sentido em que não conduz necessariamente a conclusões verdadeiras mas parte de princípios que são verdadeiros para quem argumenta. Se o seu sucesso depende de acordos relativamente aos dados de que se parte e aos elementos justificativos apresentados para apoiar as conclusões, a importância do auditório e, concretamente, do auditório universal de que fala Perelman, parece ser um aspecto relevante, pois convencer é levar alguém a aderir a algo fazendo apelo à razão. Uma questão que, neste âmbito, pode colocar-se é através de que vias pode o professor ajudar os alunos a assumirem-se como auditórios interdependentes, informados e críticos, quer em relação às suas próprias contribuições, quer às de outros elementos da turma, e a usarem razões de carácter matemático consideradas por si válidas no desempenho deste papel. A segunda parte deste capítulo, apresentada em seguida, incide, fundamentalmente, sobre esta questão.

Ensinar Matemática, construindo uma cultura de argumentação

Esta investigação foca-se numa vertente particular do "trabalho de ensino". Esta expressão é por mim entendida no sentido de Lampert (2001). Através dela pretendo sublinhar alguns aspectos interrelacionados sobre o modo como perspectivo a natureza deste trabalho, neste caso quando é orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Neste sentido, estes aspectos constituem pressupostos ao estudo. Apresento-os na primeira secção desta segunda parte do capítulo II. As secções seguintes, em número de duas, focam-se no que, globalmente, designo por "construindo uma cultura de argumentação", expressão que entendo como tendo um significado próximo do resultante da articulação entre o significado atribuído por Lampert (2001) a "cultura de sala de aula" e o significado de "comunidade de discurso matemático" referido por Sherin (2002). No seu conjunto, estas duas secções visam destacar elementos relacionados com a construção desta cultura e com complexidades que este trabalho acarreta para o professor.

Ensinar: Um trabalho complexo e multifacetado

O ensino é, a meu ver, uma profissão. Como tal, o professor é um profissional com saberes próprios que servem de base ao seu ensinar e que são, simultaneamente, "existenciais, sociais e pragmáticos" (Tardif, 2002, p. 103). É pela realização do trabalho que o professor vai construindo saberes, os mobiliza e os põe ao serviço da sua acção. A prática tem, assim, um valor epistemológico como bem mostraram, em particular, os trabalhos de Schön (1987, 1991), autor que concedeu um lugar de destaque à experiência e à reflexão no processo de construção de saberes profissionais: *reflexão na acção*, *reflexão sobre a acção* e *reflexão sobre a reflexão na acção*.

Enquanto ensina, o professor não está apenas a fazer alguma coisa, pois trabalhar é, também, “fazer alguma coisa de si mesmo consigo mesmo” (Tardif, 2002, p. 56). Entre o professor, a sua prática e os seus saberes há uma relação indelével: “não são entidades separadas, mas ‘co-pertencem a uma situação de trabalho na qual ‘co-evoluem’ e se transformam” (idem). Ensinar não é, pois, um processo estático de aplicação de conhecimentos. É antes uma actividade intencional, um processo dinâmico de trabalho (Yackel, 2002b), um “ir trabalhando” que vai assumindo contornos diferentes com o passar do tempo ao longo do qual cada professor vai construindo e reconstruindo um modo próprio de ensinar. Neste processo, vai-se construindo e reconstruindo também. Canavarro (2003), referindo-se às professoras que participaram na sua investigação, indica que elas “sentem que as professoras que são dependem intensamente das pessoas que são. E o inverso também é verdade” (p. 591).

Ensinar envolve um investimento não apenas cognitivo, mas também um forte investimento afectivo. Hargreaves (1998b) salienta que “as emoções estão no coração do ensino” (p. 558) abarcando as suas qualidades mais dinâmicas, apesar de estarem ausentes em muita da investigação que sobre ele se tem feito: “é como se os professores pensassem e agissem, mas, na realidade, nunca sentissem” (p. 559). No mesmo sentido, também Tardif (2002) chama a atenção para que o trabalho do professor, para além de mental e moral, é também um “trabalho investido ou vivido” (p. 142). Porque no dia-a-dia das escolas, ensinar é uma actividade que se baseia em interacções entre pessoas, “traz consigo, inevitavelmente, a marca das relações humanas que a constituem” (Tardif, 2002, p. 118). Exige ao professor não apenas que pense nos alunos, mas também que pressinta as suas emoções, o que os entusiasma e o que os perturba, que seja sensível às diferenças que entre eles existam e que tenha em conta tudo isto no processo de trabalho. Paralelamente, o próprio acto de ensinar desencadeia, com frequência, emoções no professor. Há surpresas que entusiasmam, caminhos inesperados por onde os alunos enveredam que, por vezes, causam receios, inquietações oriundas de incertezas sobre qual o melhor modo de agir, sentimentos de prazer ou desprazer acoplados a determinados conteúdos de ensino. Ensinar envolve *esforço emocional*[10] (Hargreaves, 1998b; Tardif, 2002) e, assim, o professor ensina não apenas com o que se sabe, mas também com o que é como pessoa: "a própria pessoa com suas qualidades, seus defeitos, sua sensibilidade, em suma, com tudo o que ela é, torna-se, de uma certa maneira, um instrumento de trabalho" (Tardif, 2002, p. 142).

O ensino é, além disso, uma prática complexa, ideia salientada por muitos e variados autores. Santos (2000), por exemplo, indica que a opção de investigar a prática lectiva do professor através da análise dos problemas profissionais com que se depara ao desenvolver a sua actividade, se prendeu com o "elevado nível de complexidade" (p. 672) que caracteriza esta actividade. Enquanto prática complexa, não pode ser analisada reduzindo-a a componentes tratadas independentemente umas das outras. Muitos dos problemas com que o professor lida ocorrem em simultâneo, e não em sequência, existem ao longo de domínios sociais, temporais e intelectuais e frequentemente as acções a desenvolver para lhes fazer face são diferentes em diversos domínios e orientadas por objectivos que, por vezes, entram em conflito (Lampert, 2001). Fruto desta complexidade, o trabalho de ensino envolve, muitas vezes, agir na urgência e decidir na incerteza (Perrenoud, 2001). Agir na urgência significa valorizar o instante, agir sem poder adiar a acção de modo a melhor descortinar os factores que estão em jogo e avaliar, em profundidade, diversas possibilidades. Decidir na incerteza é fazer escolhas mobilizando recursos disponíveis, apelando à razão e à intuição, pois não há dados nem modelos que permitam saber com certeza quais as consequências de uma acção antes de ser concretizada. Tal como num jogo honesto, os resultados são indeterminados.

A urgência e a incerteza não têm o mesmo peso em todos os momentos da acção do professor e muito menos em todas as práticas de ensino. Quem vive a profissão de professor de Matemática de uma forma puramente rotineira, fazendo

---

10 *Esforço emocional* é a tradução adoptada para "*emocional labor*". Hargreaves (1998b) e Tardif (2002) recorrem a este constructo de Hoschschil para evidenciar o significativo investimento afectivo envolvido no ensino.

hoje o que fez ontem, chamando a si, tanto quanto conseguir, o controle do que se passa na aula, pondo a ênfase na memorização de técnicas e procedimentos, não se sentindo grandemente responsável por ajudar os alunos a aprender ou sequer por tentar que aprendam, poderá reduzir as situações de urgência e incerteza nas suas práticas, embora tudo isto acarrete significativos custos para as crianças ou jovens por cuja formação é responsável. Esta redução não me parece ser possível para quem vive o ensino como um lugar de experimentação e aprendizagem, como um desafio, "uma aventura de alto risco" (Perrenoud, 2001, p. 15), que coloca em primeiro plano os alunos, os institui como parceiros da interacção pedagógica e não remete para plano secundário o que vulgarmente se designa por competências de "ordem superior" entre as quais está a argumentação matemática.

Analisar as práticas de ensino tal como ocorrem em contextos reais de trabalho requer, segundo Lampert (2001), uma abordagem que permita abarcar, ao mesmo tempo, os vários níveis em que a acção se desenvolve, integrando a investigação dos problemas da prática com que o professor tem que trabalhar num momento específico, com a investigação daqueles com que lida ao longo de uma aula, unidade de ensino ou ano escolar. Apenas assim, na sua perspectiva, se pode compreender a complexidade do trabalho de ensino e como lida com ela o professor. Tomando como objecto de investigação a sua própria prática de ensinar Matemática a alunos do 5º ano de escolaridade durante um ano lectivo, desenvolve um estudo de caso relatado em *Teaching Problems and the Problems of Teaching*. De acordo com Yackel (2002b), a contribuição central desta obra para o campo da educação matemática, em particular, e para o da educação, em geral, é a criação de um enquadramento organizador de análise que permite, por um lado, sublinhar explicitamente o que significa o ensino ser uma prática complexa, porque o é e como deve ser pensada a complexidade de modo a poder lidar-se com ela efectivamente. Por outro lado, esta obra constitui "uma elaboração compreensiva das cinco normas de processo" (idem, p. 66) indicadas em NCTM (2000): resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação.

A abordagem de ensino adoptada por Lampert ao longo do ano lectivo em que foram recolhidos dados para o estudo de caso, tem fortes influências dos trabalhos de Lakatos, sobre conjecturas, provas e refutações e de Pólya, sobre resolução de problemas, tal como aconteceu em anteriores ocasiões (por exemplo, Lampert, 1990). Nesta abordagem, uma das suas significativas preocupações é a criação de condições para os alunos se envolverem em actividades de argumentação matemática. Assim, tendo em conta o foco da presente estudo, considero que tem interesse observar o modelo de que partiu ao iniciar o estudo de caso, bem como limitações que, no final, lhe encontrou por entender que não era representativo da complexidade do seu trabalho de ensino. Apresento-o em seguida.

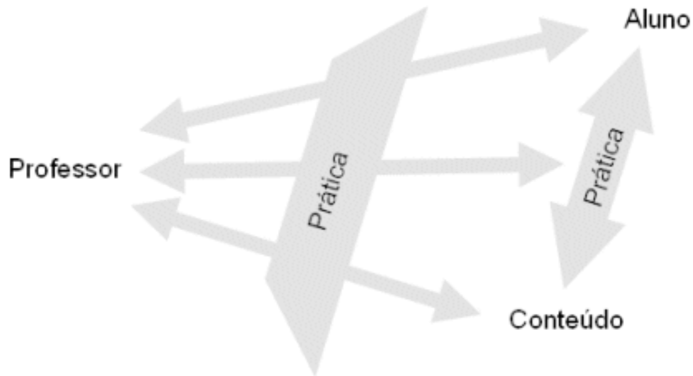


Figura 4: Ensinar como trabalhando em relações: Um modelo básico da prática, segundo Lampert

De acordo com Lampert, “categorias académicas convencionais” (p. 28), frequentemente usadas para analisar o ensino, “deixam lacunas problemáticas, tornando invisíveis os aspectos mais fundamentais do trabalho” (idem) do professor. Foi a sua insatisfação com estas categorias que esteve na base da elaboração do modelo representado na figura 4. Através dele pretende sublinhar, como a própria legenda da figura indica, que ensinar é trabalhar em relações. Uma das vertentes da prática é estabelecer e manter com os alunos um tipo de colaboração que proporcione que a aprendizagem ocorra. A seta que liga “professor” a “aluno” visa evidenciar esta vertente: “ensinar na escola requer trabalhar em relação com os alunos” (p. 31). Estes podem ser, na perspectiva de Lampert, um recurso para resolver problemas da prática, mas também podem constituir fontes de constrangimento e obstrução dos esforços do professor para apoiar a aprendizagem. Do mesmo modo, a seta que liga "professor" a "conteúdo" evidencia que ensinar requer "trabalhar em relação com o conteúdo do currículo escolar" (p. 31) e que, tal como os alunos, também o currículo "constrange e abre possibilidades para a acção" (idem). A seta que liga "aluno" a conteúdo" representa "a prática de estudar[11]" (p. 32). Pretende destacar que "o ensino não pode ocorrer sem algumas acções complementares da parte dos alunos trabalhando em relações com ideias, processos e linguagem que estão a aprender" (p. 31). O professor pode preparar o terreno para estas acções, pode influenciá-las, mas "o trabalho que trará aprendizagem é um acto do aluno na relação com o conteúdo" (idem). A seta que une o "professor" à "prática de estudo" significa que ensinar também envolve agir para que o estudo aconteça de modo a que seja provável resultar em aprendizagem.

Cada uma das quatro setas representa um "espaço de problemas (*problem space)*" (p. 31) no trabalho de ensino e as três que se iniciam e terminam no professor representam "trajectórias ao longo das quais a prática de ensino se desenvolve " (p. 33). Só que estas trajectórias não se encontram separadas no trabalho do professor. E, assim, Lampert funde os três "espaços de problemas" relativos a estas três setas num só, representado na figura 4 pelo trapézio. Fazê-lo,

> não significa sugerir que concretizar acções coordenadas que tenham em conta o conjunto das três relações é uma questão simples. Cada relação limita e expande simultaneamente o que o professor pode fazer para lidar com os problemas da prática. (...) Enquanto o professor está a tentar algo para interessar os alunos pelo conteúdo, pode estar a fazer coisas que interfiram com a sua própria compreensão do conteúdo. Tais conflitos devem ser geridos em cada acto de ensino. (Lampert, 2001, pp. 33-4)

Segundo Lampert (2001), no modelo da figura 4 não estão representadas várias características fundamentais do trabalho de ensino. Indico algumas das limitações que lhe aponta. Em primeiro lugar, "*o modelo mostra o professor a*

---

[11] Lampert (2001) usa o temo estudar para designar "qualquer prática em que os alunos se envolvem na escola para aprender" (p. 32). Numa abordagem de ensino focada em problemas utiliza este termo para "incluir actividades como pesquisar, discutir, pensar, ler cuidadosamente e examinar de perto" (idem).

trabalhar com alunos um de cada vez" (p. 424, destaque no original). Esta não é, no entanto, a realidade da aula. Trabalhar de um modo produtivo com um conjunto de alunos traz constrangimentos que não existiriam noutras circunstâncias. Além disso, sendo uma turma constituída por vários alunos, há relações que estabelecem entre si sobre o conteúdo. Deliberadamente ou não, ao agirem no espaço público da aula também se ensinam uns aos outros. O professor pode ignorar este facto. Mas pode também estruturar as relações entre os alunos para apoiar aprendizagens que valoriza. Ao fazê-lo pode acrescentar recursos à sua prática. "Porque as relações entre os alunos nas aulas proporcionam uma arena na qual todos os professores podem trabalhar para resolver os problemas da prática, elas devem ser representadas num modelo do trabalho de ensino" (p. 425).

Um outro aspecto não representado no modelo é a dimensão temporal do ensino: "*Na aula, tanto as relações sociais como as relações com o conteúdo têm uma história e um projecto para futuros encontros*" (Lampert, 2001, p. 424, destaque no original). Se o tempo é um constrangimento, é também um recurso. Se o professor optar por estabelecer conexões entre as aulas e por usá-las ao longo do tempo para apoiar a aprendizagem, o seu trabalho requer que compreenda as pessoas nas referidas relações, que se aperceba de como vão mudando e se desenvolvem com o decurso do tempo:

> O professor, os alunos, e o conteúdo no modelo triangular [figura 4] não são entidades estáticas; mudam com o passar do tempo, e assim também muda o trabalho envolvido na construção de relações entre eles. *Este aspecto dinâmico da prática deve ser também representado num modelo do trabalho de ensino*. (Lampert, 2001, p. 425, destaque acrescentado)

Para além das duas limitações anteriormente indicadas, "ensinar com problemas"[12] traz, segundo Lampert, complexidades adicionais que o modelo da figura 4 não traduz. A maior parte prende-se com o conteúdo do "vértice do conteúdo" existente nesta figura e tem reflexos nas várias relações aí indicadas. Para

---

[12] Lampert (2001) usa a expressão "ensinar com problemas" (p. 4) para designar a sua abordagem de ensino, considerando o conceito de problema em sentido amplo: "O que entendo aqui por 'problemas' não é o tipo de 'problemas de palavras' (...) O que chamo problemas, outros chamaram-lhe projectos, projectos de investigação, pesquisas ou investigações" (p. 473).

esta autora, o modelo pode representar tópicos matemáticos a ensinar. Porém, não ilustra o trabalho que o professor deve fazer para apoiar os alunos na compreensão das conexões entre ideias matemáticas e na investigação destas ideias nem para, ao mesmo tempo, ensinar "outros tipos de conteúdo" (p. 431) que são fundamentais para poderem aprender Matemática através da resolução e discussão de problemas usando discurso matemático: "*é necessário ensinar-lhes a comportarem-se com um tipo particular de 'civilidade' académica*" (idem, destaque no original). O vértice do conteúdo deve representar, também, "campos conceptuais, o estabelecimento deliberado de conexões entre ideias destes campos (...) [e] mostrar relações entre professor, alunos, e estes outros tipos de 'conteúdo'" (pp. 431-2).

O significado atribuído por Lampert a "outro tipo de conteúdo", pode ser ilustrado a partir das suas considerações sobre o estudo, pelos alunos, do discurso matemático. Na sua perspectiva, à medida que os alunos inventam e defendem soluções com os colegas, envolvem-se na utilização e investigação das "regras de discurso" (p. 437) da Matemática. O estudo destas regras requer que se lhes ensine a raciocinar sobre porque é que as ideias e processos conhecidos no campo da Matemática são legítimos e também que se ajudem a compreender que são capazes de raciocinar a partir do que já sabem para adquirem novas ideias matemáticas. Requer, além disso, que se analise se as asserções surgidas no espaço de discurso da aula fazem sentido, o que conduz à necessidade de existirem aberturas para poderem ser questionadas. Segundo esta autora,

> encorajar os alunos a pôr em cima da mesa mais do que uma asserção para ser discutida, é uma estratégia para lhes proporcionar uma oportunidade de praticar argumentação matemática e para estudarem o que funciona nesta argumentação como evidência convincente. Durante o desenvolvimento e avaliação de argumentos a favor ou contra uma asserção, as ideias e processos do domínio são ensinados e estudados, ao mesmo tempo que são ensinadas e estudadas as regras do discurso. (Lampert, 2001, p. 438)

Para os alunos poderem aprender as normas do discurso no sentido de Lampert, não basta, no entanto, ensiná-las. Há também que criar condições para que o discurso seja possível na aula:

> [Os alunos] devem estar sossegados, ser educados e pacientes de modo a que o discurso possa acontecer e ser educativo. Necessito de ensinar-lhes que escutar os seus pares é um modo de aprender. Num cenário como este, estas são virtudes académicas e não apenas um modo de gerir a vida numa turma. São comportamentos essenciais que os alunos devem aprender para poderem trabalhar em conjunto praticando e demonstrando raciocínio matemático no contexto da resolução de problemas, e assim *devem estar representados no vértice do conteúdo do triângulo de ensino*. (Lampert, 2001, p. 440, destaque acrescentado)

Para além das limitações já indicadas ao modelo da figura 4, Lampert aponta outras de que saliento uma: o modelo não ilustra que professor e alunos, enquanto seres humanos, têm um carácter multifacetado, agem de modos diferentes em diferentes ocasiões e contextos e trazem para a aula múltiplas intenções, significados e valores. Por exemplo, há alunos que chegam à escola pensando que nem todos são capazes de aprender Matemática. Outros estão convencidos que o comportamento adequado na aula é apenas escutar atentamente o que o professor diz. Outros ainda, poderão sentir-se postos em causa quando apresentam uma contribuição de que os colegas discordam. Na perspectiva de Lampert, o professor não pode negligenciar toda esta complexidade sob pena de perder recursos valiosos para a sua prática. Para a comunicação na aula ser uma oportunidade fecunda para todos os alunos poderem aprender, todos devem ser capazes de se envolver em interacções sociais produtivas com os colegas e o professor. "Fazer acontecer estas interacções faz parte do trabalho de ensino" (p. 446) e aquelas que o professor estabelece com os restantes elementos da turma "tornam-se parte do conteúdo uma vez que os alunos tentam aprender se e em que condições é seguro falar acerca do que pensam" (idem). Tornar possível esta comunicação pode requerer a aprendizagem de novas rotinas e estruturas de participação que, assim, também se tornam parte do conteúdo de ensino.

Construindo uma cultura de argumentação: Constituir e manter uma comunidade de discurso matemático

Construir uma cultura de sala de aula relaciona-se com "o trabalho de ensinar os alunos a como aprender a partir do tipo de ensino que vai acontecer" (Lampert, 2001, p. 51). Este trabalho requer o "estabelecimento e manutenção de normas de acção e interacção no interior das quais o professor pode ensinar e os alunos estudar" (idem). Todos os professores, mais ou menos deliberadamente, o realizam, pois a "criação de uma cultura de sala de aula que possa apoiar o estudo é um elemento fundamental da prática de ensino" (idem, p. 52). Podem é fazê-lo de modos muito variados e partindo de pressupostos muito diversos sobre as tarefas que importa propor, as actividades a valorizar, as interacções a privilegiar ou como deve ser feita a repartição de papéis e funções entre os vários elementos da turma. Todas estas diferenças conduzem a múltiplas variações na cultura de sala de aula.

Sherin (2002) usa a expressão *comunidade de discurso* para designar ambientes de sala de aula em que os alunos se envolvem na apresentação e defesa das suas ideias através da argumentação, reagem e comentam contribuições dos colegas e em que a turma trabalha de modo a chegar a consensos sobre o significado de ideias matemáticas importantes. A sua expressão *comunidade de discurso matemático* visa salientar que a comunicação nestes ambientes diz respeito à Matemática. Neste sentido, a cultura de sala de aula existente na turma com que Lampert (2001) trabalhou no âmbito do desenvolvimento do estudo de caso anteriormente referido, é uma comunidade de discurso matemático. Constituir e manter uma comunidade deste tipo passa não apenas pelo professor fazer emergir ideias dos alunos, mas também por criar condições para poderem ocorrer conversações com as características indicadas.

Através da expressão "construindo uma cultura de argumentação" pretendo, por um lado, destacar que envolver os alunos em actividades de argumentação matemática requer a negociação de normas de acção e interacção que favoreçam e não boicotem a constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático. Por outro lado, tem por propósito sublinhar que o discurso desejável numa aula com uma cultura de argumentação envolve a apresentação, pelos alunos, de argumentos em defesa das suas ideias, a análise crítica de contribuições dos colegas, a discussão da legitimidade matemática de cadeias de raciocínio, a expressão de desacordos quando existem e sua resolução, a fundamentação de posições com argumentos de carácter matemático, a avaliação de se é, ou não, apropriado usar um determinado raciocínio na resolução de um problema, a formulação de conjecturas e a avaliação da plausibilidade e/ou validade destas conjecturas.

Debruço-me, em seguida, sobre estes aspectos estruturando esta secção em quatro pontos. No primeiro abordo perspectivas sobre discurso da aula de Matemática com o propósito de salientar aspectos considerados favoráveis à argumentação. No segundo e terceiro centro-me, respectivamente, em normas de acção e interacção propícias ao envolvimento dos alunos em actividades deste tipo e numa estratégia discursiva que pode ser útil ao professor para promover este envolvimento sem deixar de lado os conteúdos matemáticos. Por último, apresento a análise de um exemplo do processo de orquestração de uma discussão colectiva visando, evidenciar problemas com que o professor se confronta e acções usadas para lhes fazer face.

O discurso na aula de Matemática

As questões da linguagem e da comunicação ocupam, desde há muito, os educadores matemáticos, sendo analisadas através de várias abordagens. Lampert e Cobb (2003) distinguem duas, diferentes mas não mutuamente exclusivas, que designam por *metáfora da aquisição* e *metáfora da participação*. Tal como a própria designação sugere, a metáfora da aquisição caracteriza a aprendizagem como a aquisição de conhecimento matemático independentemente dela ser conceptualizada como o resultado de uma construção activa por quem aprende ou resultar de um escutar passivo. A metáfora da participação, contrariamente, vê a aprendizagem da Matemática como um processo, cada vez mais competente, de participação em práticas matemáticas que se desenvolveram ao longo de séculos e que são parte integrante do património cultural da humanidade. Estes autores consideram que, na generalidade, a metáfora da participação é mais útil para equacionar questões sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, nos actuais tempos de reforma curricular em que se defende que aprender Matemática é fazer Matemática.

A metáfora da participação remete para o estudo da linguagem em acção, ou seja, para o estudo da linguagem em diferentes contextos como parte das práticas sociais. O foco é o estudo do discurso e, assim, hoje a atenção volta-se para os "processos de comunicação *entre* os alunos, *com* os alunos e para a questão da emergência de significados partilhados através da comunicação nas culturas de sala de aula" (Sierpinska, 1998, p. 31, destaque no original). Se nos situarmos em abordagens interaccionistas à comunicação, em que "a linguagem é vista como um discurso" (idem, p. 53), as aprendizagens matemáticas dos alunos são função das características da comunicação e das interacções em que participam no processo de aprendizagem. Por exemplo, alunos que participem num discurso guiados pelo professor que coloca questões fechadas que apenas apelam à memorização e em que a rotina dominante da aula é o treino de destrezas, aprenderão "uma Matemática" muito diferente daquela que aprenderiam através da participação em cenários de interacção em que predomina a reflexão, a justificação e o desafio mútuo através de questões provocadoras.

A investigação sobre o discurso da aula desenvolvida no âmbito de várias áreas disciplinares, revelou, de acordo com Forman (2003), a existência de um padrão recorrente, vulgarmente conhecido por I-R-A ou, em alternativa, I-R-F[13]. Neste modelo, o professor tende a iniciar o discurso, frequentemente através de uma pergunta, um ou mais alunos respondem e o professor avalia a resposta ouvida ou proporciona *feed-back* sobre ela. No que vulgarmente se designa por ensino tradicional, o professor detém o controlo dos movimentos discursivos *I* e *A/F*. Permitir e estimular os alunos a terem um papel mais activo nestes dois movimentos, nomeadamente através do encorajamento à apresentação das suas explicações e à avaliação de ideias enunciadas por colegas, tem sido uma ideia defendida por alguns dos proponentes dos actuais movimentos de renovação

[13] I-R-A e I-R-F é a tradução adoptada, respectivamente, para I-R-E e I-R-F em que I, R, E e F são as iniciais de *Iniciate*, *Respond, Evaluate* e *Feed-back* (Forman, 2003).

curricular em Matemática. Sublinham que através desta via poderão ocorrer mudanças nas práticas discursivas consistentes com os propósitos orientadores destes movimentos.

Esta ideia não merece, no entanto, o acordo de outros educadores matemáticos. Uma das limitações que Forman (2003) encontra no modelo I-R-A/F é iluminada pelos problemas que lhe encontra ao observá-lo através da análise do discurso matemático proposta por Rotman. Este autor indica que cada argumento matemático contém três vozes diferentes: a do Matemático, a do Agente e a da Pessoa. O Matemático, "que imagina, inscreve, emprega uma linguagem natural fragmentária" (Forman, 2003, p. 342) dirige o Agente, "autómato que executa as ordens do Matemático" (idem), frequentemente através de imperativos — "por exemplo, supõe que Y, define X" (idem) —, e usando uma linguagem impessoal, intemporal e emocionalmente neutra. Esta voz, designada por Código, é também usada pelo Agente. A terceira voz, a da Pessoa, é diferente: "conversa em linguagens naturais usando uma variedade de pronomes, incluindo *Eu*; formas verbais, presentes, passadas e futuras; e expressões emocionais e avaliativas, ou o que Rotman designa por Metacódigo. A Pessoa também participa completamente num mundo histórico e cultural" (Forman, 2003, p. 342). As duas primeiras vozes, a do Matemático e a do Agente, encontram-se em textos matemáticos. Em contrapartida, a terceira voz, a da Pessoa, representa a de "um participante em comunidades matemáticas e, enquanto tal, relaciona-se com o persuadir outras pessoas acerca da validade de argumentos matemáticos próprios" (idem). Segundo Forman, fazer Matemática pode envolver os diferentes códigos e a voz da Pessoa não pode ser eliminada pois desempenha um papel fundamental na actividade matemática, embora não esteja representada nos textos matemáticos escritos.

No modelo I-R-A "a voz da Pessoa parece estar ausente" (Forman, 2003, p. 342) e poder-se-á argumentar que "enquanto forma de discurso na aula, encoraja os alunos a desempenharem o papel de Agente (o autómato computacional) em resposta aos comandos do professor e do livro de texto (que em conjunto servirão de Matemático) para calcular, provar, desenhar, etc." (idem). No entanto, se os professores pretendem que os alunos participem no género de discurso característico da Matemática, há que considerar as três vozes e não apenas duas: “desde a voz da Pessoa, muito pessoal, emotiva e avaliativa, até à voz do Matemático, muito impessoal, logicamente coerente, mas imaginativa e também a igualmente impessoal, precisa e infatigável voz do Agente” (idem).

Como contraponto à modelação da comunicação na aula de Matemática pelo padrão I-R-A/F concedendo aos alunos um maior controlo dos movimentos discursivos *I* e *A/F*, há, a exemplo de Forman, outros educadores matemáticos que defendem a ideia de que esta comunicação se deve aproximar da existente nas comunidades matemáticas (por exemplo, Forman, Larreamendy - Joerns, Stein, e Brown 1998; Lampert, 1990, 2001; Strom, Kemeny, Lehrer, e Forman, 2001; Yackel e Cobb, 1996). No entanto, se se tiver por referência os discursos destas comunidades para perspectivar o discurso da aula de Matemática, importa ter em conta que entre estes dois tipos de comunidade há diferenças significativas. Em particular, não pode ser esquecido que nem todos partilham o mesmo conhecimento e que certos objectivos pedagógicos do professor podem originar a imposição de constrangimentos à participação de alunos nas actividades. Por exemplo, num determinado momento o professor pode optar por “não escutar” certas sugestões ou contribuições por considerar que não conduzem a actividade matemática produtiva ou que extinguem uma discussão que pretende ver desenvolvida.

Educadores matemáticos que defendem a aproximação do discurso da aula de Matemática à do existente nas comunidades matemáticas, concedem grande importância, entre outros aspectos, à participação dos alunos em actividades de argumentação, o que pressupõe, em particular, a criação de condições para poderem ocorrer discussões na aula em que os alunos expliquem, justifiquem e avaliem ideias próprias e/ou apresentadas por colegas. Forman (2003) salienta que para estas discussões e as actividades que as sustentam poderem resultar em aprendizagens matemáticas significativas, o professor deve manter uma perspectiva clara sobre os objectivos educacionais que tem para a aula e não perder de vista estes objectivos. Na sua perspectiva, agir deste modo, requer não só um profundo conhecimento dos conteúdos que se procuram ensinar, mas também um sentido das actividades pedagógicas que melhor comunicam aos alunos a essência da pesquisa matemática. Apoiando-se num estudo de Schoenfeld e colegas salienta, além disso, que encontrar um equilíbrio entre suscitar e promover o interesse e participação dos alunos e apoiar o seu progresso em direcção a objectivos educacionais importantes, pode envolver elementos tanto do que é designado por pedagogia tradicional como não tradicional.

Será, no entanto, possível, em tempo real, um professor encorajar a participação de 20 ou 30 alunos em discussões, conservar em mente um conjunto de objectivos de ensino, orquestrar estas discussões de modo a ajudá-los a aprenderem conteúdos matemáticos específicos e, ao mesmo tempo, comunicar-lhes a "essência da pesquisa matemática"?

Um dos aspectos actualmente sublinhado por vários autores que se preocupam com o discurso na aula de Matemática é a importância de normas que tacitamente regem, em cada momento, as relações recíprocas do professor e dos alunos em relação ao "projecto de estudo que têm em comum" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2001, p. 62). Entre estes autores estão, por exemplo, Chevallard et al. (2001), Cobb, Yackel e Wood (1992), Forman (2003), Herbst (1999, 2000), Wood (1999), Yackel e Cobb (1994, 1996), Yackel, Cobb, e Wood (1999) e Yackel, Rasmussen, e King (2000). Também a noção de "redizer", usada nos trabalhos de O' Connor e Michaels (1993, 1996), Forman et al. (1998) e Forman e Ansell (2001) é, segundo Forman (2003), "um dos meios através do qual pode ser aprendido o discurso matemático" (p. 347) e constitui um instrumento que pode ser útil, ao professor, no processo de orquestração de discussões colectivas. Foco-me, em seguida, em ideias apresentadas por estes autores de modo a evidenciar normas favoráveis a uma cultura de argumentação e potencialidades da noção de redizer.

Normas de acção e interacção

Ao analisar investigação que procura caracterizar as componentes chave de uma comunidade de discurso, Sherin (2002) salienta a relevância da negociação, por professor e alunos, de normas reguladoras da actividade matemática da aula com características muito diferentes das que regulam a actividade daquela em que saber Matemática consiste em seguir regras e procedimentos. Neste tipo de comunidade, tal como resolver problemas faz parte daquilo que os alunos devem aprender, também normas para falar e ouvir, julgar a adequação das explicações e soluções matemáticas ou o desenvolvimento do respeito mútuo, fazem parte da aprendizagem (Forman, 2003). Esta ideia vai ao encontro da necessidade, referida por Lampert (2001), de num ensino centrado em problemas se ampliar o "vértice do conteúdo" representado na figura 4.

A propósito de um projecto de inovação curricular em que estiveram envolvidos, Cobb e Yackel (1998) referem que desde o seu início se tornou evidente que anteriores experiências dos alunos ocorridas em salas de aula tradicionais, conduziam a tomarem como certo que aquilo que se esperava deles era que inferissem o que os professores tinham em mente, e não que articulassem as suas compreensões das tarefas propostas. Contrariamente, os professores esperavam que os alunos verbalizassem como tinham interpretado as tarefas e tentado resolvê-las. Neste trabalho, tal como noutros referidos no final da secção anterior, estes autores recorrem aos conceitos de *normas sociais* e *normas sociomatemáticas* para analisarem, entre outros aspectos, o processo pelo qual professores lidaram com conflitos entre expectativas que iam em sentido contrário.

Normas sociais são normas que regulam interacções sociais entre professores e alunos estabelecidas a propósito da actividade desenvolvida na aula. Culturas de sala de aula caracterizadas pela argumentação são, em geral, reguladas e sustentadas por normas que valorizam a explicação e justificação, as tentativas de encontrar sentido em ideias apresentadas por outros, a indicação de acordo ou desacordo e a discussão de alternativas relativas a interpretações e soluções.

Contrariamente às normas sociais, cuja negociação pode ser feita no âmbito do ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo disciplinar, as normas sociomatemáticas focam-se "em aspectos normativos das discussões matemáticas específicos da actividade matemática dos alunos" (Yackel & Cobb, 1996, p. 461). Entre as normas sociomatemáticas está o que conta, na aula, como uma explicação ou uma justificação matemática aceitável ou o que conta como uma solução matematicamente diferente para um problema. A distinção entre normas sociais e normas sociomatemáticas é subtil, pois ambas estão profundamente entrelaçadas. Podem distinguir-se, no entanto, pensando, por exemplo, que a compreensão partilhada de que os alunos são responsáveis por justificar os seus modos de pensar é uma norma social, enquanto que a compreensão do que conta como justificação matemática aceitável é uma norma sociomatemática.

As normas sociais e as normas sociomatemáticas não são predeterminadas nem introduzidas na sala de aula a partir do exterior, nem a sua negociação é completamente antecipada e prevista pelo professor. Originam-se e são continuamente modificadas no decurso das interacções que se geram na aula quando professor e alunos falam acerca da Matemática. Ou seja, embora desde o início, o professor, que na aula representa a comunidade matemática, possa ter ideias claras sobre as normas que pretende negociar, fundamental é o modo como capitaliza acontecimentos não antecipados e os perspectiva como situações paradigmáticas para discutir com os alunos o que espera deles. Foi através da renegociação das normas reguladoras da actividade da aula, que os professores participantes no projecto anteriormente referido lidaram com os conflitos entre as suas expectativas e as dos alunos.

A negociação com os alunos, desde os primeiros anos, de normas sociais e normas sociomatemáticas que valorizem a explicação e a justificação, segundo Yackel e Cobb (1996), pode facilitar a reorganização das suas crenças e valores relativamente ao significado de fazer Matemática. Além disso, pode constituir um meio útil do professor apoiar e sustentar culturas de sala de aula propícias não só à aprendizagem de processos de argumentação e prova cada vez mais sofisticados de um ponto de vista matemático, mas também ao desenvolvimento, mais global, da autonomia intelectual dos alunos.

A aprendizagem de ambos os tipos de normas é tanto mais importante quando se constata que os alunos não chegam à escola compreendendo quais são os meios de argumentação considerados aceitáveis pela comunidade matemática. Não é invulgar que a expressão do seu acordo com certas ideias derive do estatuto de bom aluno que tem quem as apresentou, que o voto seja sugerido como um meio de resolver divergências de opiniões ou que usem interpretações de pistas implícitas ou expressões do professor como meios para decidirem se a contribuição que apresentaram está, ou não, correcta. Assim sendo, os critérios de aceitabilidade de uma ideia têm que ser negociados. Porque as normas "são avaliativas e pessoais, devem ser negociadas através da voz da Pessoa, de que fala Rotman, usando o Metacódigo" (Forman, 2003, p. 343). Em aulas orientadas por uma ênfase no raciocínio matemático, esta negociação ocorre quando os alunos se envolvem neste raciocínio, ou seja, ao mesmo tempo que aprendem a raciocinar matematicamente, aprendem também o que constitui raciocínio matemático aceitável (Yackel & Hanna, 2003).

As potencialidades das noções de normas sociais e sociomatemáticas são reconhecidas por Herbst (2000) que refere o seu valor para elucidar como pode o professor cumprir na aula, de forma subtil, a sua responsabilidade de representar a comunidade matemática. No entanto, este autor salienta que parecem não ser suficientes para explicar porque é que certas acções do professor são necessárias ou qual é o seu estatuto epistemológico para os alunos. Na sua perspectiva, o trabalho do professor não envolve uma só racionalidade e este não pode ser "sempre visto como o único representante da comunidade matemática" (p. 17), ou seja, as "suas acções não podem ser interpretadas pelos investigadores como acções 'em defesa' da Matemática" (idem). Por exemplo, "na descrição do processo de prova de um enunciado seria possível reencontrar o desenvolvimento de normas sociais e normas sociomatemáticas" (idem). No entanto, esta abordagem não reconhece que se a interacção entre pessoas com diferentes posições "for regulada como um diálogo polido que não obriga os interlocutores, então as acções do professor que tendem a guiar a discussão em direcção à explicação óptima podem legitimamente ser interpretadas pelos alunos como um favoritismo pessoal (idem, p. 16).

Redizer: Modo possível de trabalhar com as ideias dos alunos

A argumentação na aula de Matemática depende dos seus elementos partilharem uma perspectiva comum tanto sobre os objectos em discussão, como sobre os meios pelos quais a discussão pode ocorrer (Forman et al. 1998). Esta perspectiva depende, por seu turno, das expectativas dos membros que constituem a comunidade da sala de aula. Por exemplo, se os alunos pensarem que para cada problema há uma única estratégia correcta de resolução que o professor pode ou deve dar, poderão acreditar que se torna desnecessário envolverem-se activamente na explicação das suas ideias, no ouvirem as ideias dos outros, no avaliarem os argumentos que eles próprios apresentam ou os que são apresentados pelos colegas. Outros alunos, ao esperarem que a velocidade e a exactidão sejam mais importantes do que a compreensão, poderão ter dificuldades em aceitar o tempo, por vezes longo, necessário à exploração de situações e o risco inerente ao processo de formulação de conjecturas.

O professor pode ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de se envolverem em discussões genuínas de ideias matemáticas, orquestrando habilmente as discussões na sala de aula de modo a mudar as expectativas de alguns sobre o discurso aí valorizado e fomentando o envolvimento de todos na análise e defesa das ideias em discussão. Os trabalhos de O'Connor e Michaels (1993, 1996) constituem um exemplo de investigação que tem em conta as subtilezas das interacções na aula, ao mesmo tempo que considera com seriedade as questões do conteúdo matemático (Lampert & Cobb, 2003). Estes autores analisaram aulas de Matemática de carácter inovador focando-se nos meios pelos quais os professores socializam a argumentação através da orquestração de discussões colectivas. Esta análise permitiu evidenciar que um importante tipo de movimento do professor é o que designam por redizer (*revoicing*) as contribuições dos alunos. Esta estratégia discursiva pode assumir vários formatos. Forman et al. (1998) condensam-nos em repetição, expansão, parafrasear e relato, embora noutros trabalhos também se encontrem verbos como “remodelar” (Forman & Ansell, 2001, p. 119; O' Connor & Michaels, 1996, p.71), “traduzir” (Forman & Ansell, idem) ou reformular (O' Connor & Michaels, 1996, p. 71).

No processo de redizer as contribuições dos alunos, o professor, embora sem alterar o significado do que é dito, pode acrescentar ou substituir certas palavras por outras de modo a introduzir mudanças, subtis mas substantivas, que permitem abrir caminho para as ideias matemáticas que pretende ensinar. Por exemplo, numa aula focada no estudo de unidades de medida, um aluno pode indicar que a área de uma determinada figura cujas dimensões estão expressas em *cm*, é 20. Se o professor o interpelar perguntando-lhe se quer dizer 20 cm^2, está a redizer a sua contribuição, via repetição e expansão. Neste caso, a expansão pela introdução da unidade de medida, constitui um meio de chamar a atenção da turma para um aspecto importante da Matemática que pretendia trabalhar na aula. Mas ao mesmo tempo que aceita a resposta do aluno, o professor proporciona-lhe, também, o direito de avaliar a correcção da sua própria inferência feita a partir dela. Este direito não existe, segundo O' Connor e Michaels (1993), em salas de aula cujo padrão de comunicação é do tipo I-R-A. Aqui o direito de avaliação de respostas é do professor e o aluno não tem “oportunidade de negociar o significado ou significância da sua contribuição” (p. 323).

As contribuições dos alunos podem ser reditas por colegas, embora este movimento seja mais frequente no professor. A análise de trabalhos dos autores atrás indicados revela que os objectivos e razões que estão subjacentes ao redizer podem ser muito diversos. Por exemplo, (a) “dar poder a uma voz hesitante” (O' Connor & Michaels, 1993, p. 328); (b) clarificar ideias; (c) introduzir novos termos em ideias familiares; (d) dirigir a discussão num sentido novo e potencialmente produtivo; (e) ajudar os alunos a explicar o seu raciocínio; (f) articular informação pressuposta: por exemplo, o professor pode reformular a conjectura de um aluno de modo a que as suas bases sejam expressas de modo claro e coerente; (g) criar alinhamentos e oposições num argumento: por exemplo o professor pode relacionar contribuições umas com as outras e pôr lado a lado duas contraditórias alinhando os alunos relativamente a elas para incentivar a prossecução da discussão; (h) tornar não ambígua terminologia; (i) "dar poder e autoridade a um aluno com uma voz relativamente fraca, ao mesmo tempo que permite ao aluno reter alguma autoria sobre a reformulação" (O' Connor & Michaels, 1993, p. 327); e (j) tornar visível uma sequência de respostas de modo a obter um encadeamento de modos alternativos de resolver a mesma tarefa.

O redizer constitui, pois, um modo de trabalhar com as ideias dos alunos que responde, simultaneamente, aos alunos e à Matemática incluída, num dado momento, na agenda de ensino do professor: "Connor e Michaels mostram que o redizer torna os professores capazes de pôr afirmações na boca dos alunos, ao mesmo tempo, que lhes atribui um papel particular no debate geral. Na essência permite, ao professor, reenquadrar conceptual e socialmente argumentos" (Forman, 2003 p. 344). É, assim, uma estratégia discursiva que pode contribuir para os alunos se verem a si próprios e uns aos outros como participantes legítimos na argumentação.

Orquestrar discussões colectivas: Análise de um exemplo

Na aula, as discussões podem ocorrer entre pares de alunos, grupos, professor e aluno(s) particular(es) ou envolvendo toda a turma. Foco-me nesta últimas designando-as por "discussões colectivas" por analogia com a diferenciação entre a modalidade de trabalho autónomo e colectivo.

Não basta dizer aos alunos para discutirem problemas matemáticos para estes se envolverem em actividade matemática produtiva e também não basta participarem em discussões para que naturalmente aprendam. O professor é fundamental, nomeadamente porque os alunos não podem reinventar sozinhos regras e normas do discurso matemático (Sfard, 2003). No entanto, o seu papel não pode ser o que teria se conduzisse um diálogo de sala de aula através de uma forte estrutura de participação do tipo I-R-A. Aqui as vozes divergentes do fluxo esperado para o discurso, seriam avaliadas, de imediato, pelo professor, julgadas não pertinentes ou incorrectas e desapareceriam da memória colectiva (Bussi, 1998).

Iniciar uma genuína troca de ideias enquanto os alunos trabalham em grupo ou orquestrar uma discussão matemática produtiva, é uma tarefa “extremamente exigente e intrincada” (Sfard, 2003) em que o “papel do coordenador da discussão é particularmente difícil” (p. 375). De modo a ilustrar esta complexidade e fazer sobressair aspectos do trabalho do professor que se cruzam ao procurar orquestrar uma discussão colectiva quando este trabalho é orientado para a construção de uma cultura de argumentação, apoio-me num dos capítulos do estudo de caso apresentado por Lampert (2001). Neste capítulo, intitulado “Teaching While Leading a Whole-class Discussion”, são analisados, em detalhe, dois momentos de uma discussão. Ao longo da análise a autora vai explicitando intenções, propósitos e razões subjacentes às suas acções, problemas lidou e questões originadas por decisões tomadas. O capítulo revela, em particular, de que modo Lampert procurou harmonizar a gestão intelectual e interpessoal da conversação, bem como as suas intervenções e as intervenções dos alunos, para a discussão permitir ensinar o conteúdo matemático que pretendia que os alunos aprendessem e, simultaneamente, negociar normas de acção e interacção favoráveis à construção e manutenção do que designei por cultura de argumentação. Usando as palavras de Yackel (2002), através desse capítulo “vemos claramente como o texto não trata apenas de questões que são o tópico de discussão imediato mas ilumina também o ensino proporcionando um modo de ‘olhar’ para ele” (p. 66).

A aula em que ocorre a discussão situa-se muito perto do início do ano lectivo. Lampert inicia-a, como habitualmente, escrevendo no quadro problemas, neste caso três, que os alunos começam por explorar em grupo. O primeiro momento da discussão diz respeito ao primeiro problema e o segundo ao terceiro. Em ambos os casos, opta por iniciar a discussão com uma questão aberta: no primeiro momento “quem tem algo para dizer acerca de A?” (p. 145) e no segundo “O que pensam?” (p. 165). Em seguida escolhe, entre os alunos da turma, quem deve responder.

Subjacente à primeira opção está a intenção de ensinar aos alunos que as conversações matemáticas são muito mais amplas do que apresentar respostas certas ou erradas para questões colocadas pelo professor e que "quando se faz o trabalho matemático há mais em que pensar do que encontrar a resposta" (p. 165). As razões associadas à escolha do aluno a quem deu a palavra foram diversas. Quanto ao primeiro momento, opta por um aluno que não se ofereceu voluntariamente, mas com quem estava preocupada porque lhe parecia fazer cálculos aleatoriamente sem pensar se eram ou não apropriados no contexto dos problemas propostos. Através deste movimento, pretendia "ensinar-lhe e a outros [colegas] da turma que podia ser pedido a qualquer um para explicar publicamente o seu pensamento" (p. 146) e, além disso, "ensinar a todos que era esperável que aquilo que dissessem fosse um esforço para construir sentido matemático" (idem). No segundo momento, dá a palavra a um aluno que tinha estado silencioso durante as anteriores discussões e que tinha passado grande parte do tempo dedicado ao trabalho de grupo com o terceiro problema, o mais complexo, pois os dois primeiros não lhe colocaram dificuldade alguma. Ao escolher este aluno, pretendia ensinar que todos deviam escutar e prestar atenção a uma parte da discussão que pudesse ter sido, para eles, menos interessante, mas também que haveria lugar para "investigações mais desafiadoras neste fórum público" (p. 165). Uma vez que sabia que havia elementos da turma que não tinham feito o mesmo tipo de trabalho que o aluno escolhido, queria também ensinar-lhes que "havia outros na turma que estão a trabalhar em Matemática num nível diferente, alargando as suas noções sobre como podia ser a Matemática" (idem). A discussão podia ser conduzida, na sua perspectiva, de modo a tornar-lhes possível observarem a Matemática a ser feita mesmo que, no momento, estes alunos ainda não conseguissem fazê-la.

Numa discussão pública, decidir como começar cada segmento de discussão é, na perspectiva de Lampert, um problema com que o professor se confronta e que, nas suas palavras, se situa "na intersecção da minha relação com a Matemática e da minha relação com os alunos" (p. 175). As escolhas que fez no exemplo analisado prenderam-se com qual a questão a colocar para iniciar cada um destes segmentos e com os alunos a quem dar a palavra quer fosse para lhe responder, quer para possibilitar que entrassem na discussão aqueles que mostravam o desejo de o fazer e queriam contribuir, espontaneamente, com ideias que consideravam ser relevantes. Esta autora salienta que o professor ao fazer estas escolhas "identifica possíveis recursos que estão disponíveis no ambiente de trabalho" (idem). Quando o aluno indicado responde, o professor confronta-se com um outro tipo de problema: o que fazer com a contribuição? Há vários movimentos possíveis de modo a que ela venha a constituir "um recurso produtivo de ensino e estudo" (p. 175). O esquema representado na figura 5, elaborado a partir de exemplos de movimentos indicados por Lampert, permite destacar algumas das escolhas que, neste momento, o professor tem que fazer.

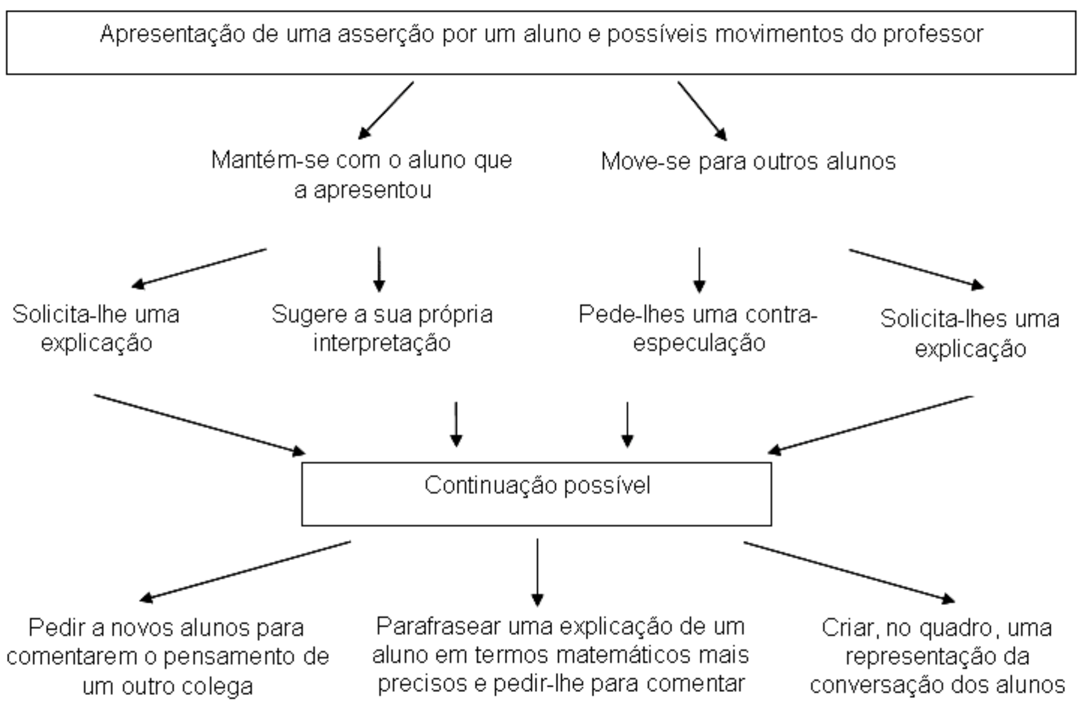


Figura 5: Esquema elaborado a partir de exemplos de movimentos do professor numa discussão colectiva, segundo Lampert

A figura 5 ilustra que a primeira decisão a tomar na sequência da apresentação da contribuição de um aluno é se se deve continuar a interagir com esse aluno ou se se dá a palavra a outro. No primeiro caso, pode optar-se por pedir-lhe uma explicação ou apresentar a sua própria interpretação. No segundo pode pedir-se, igualmente, uma explicação ou uma especulação contrária à apresentada. Seja qual for o caminho, a prossecução da discussão envolve novas decisões, algumas das quais estão representadas no esquema da figura 5. Cada uma se, por um lado, levanta novos problemas, por outro, torna disponíveis mais recursos de que o professor pode tirar vantagens para ensinar e os alunos para aprenderem.

No primeiro momento de discussão analisado, Lampert escolhe continuar a interacção com o aluno a quem deu a palavra. Regista no quadro a ideia apresentada e reformula-a em termos da estrutura do problema, sublinhando, através do tom de voz, certas palavras significativas para a sua compreensão. Em seguida pede-lhe para explicar o seu raciocínio. Através do registo no quadro, pretendia ensinar aos alunos que "todas as asserções apresentadas seriam consideradas como uma indicação séria do que eles pensavam ser uma solução razoável para o problema colocado" (p. 147). Ao pedir a explicação visava criar o contexto social para poder solicitar a outros que sabia, pela observação do trabalho de grupo, terem já decidido que a contribuição do colega estava incorrecta, para indicarem se concordavam, ou não, com ela. Simultaneamente, pretendia conduzir a discussão como se houvesse a hipótese partilhada de que subjacente a esta contribuição havia um raciocínio que poderia explicar porque é que ela era razoável. Mesmo pensando que esta parecia não fazer grande sentido, "respondeu respeitosamente, esperando 'dignificar com curiosidade pertinente'[14] a sua contribuição para a discussão" (p. 148). Optar por manter a interacção com o aluno introduziu, segundo Lampert, um acréscimo de trabalho, pois era responsável por manter envolvidos na discussão colegas que manifestavam vontade de participar e que suspeitava quererem explicar porque discordavam da ideia apresentada.

A resposta do aluno mostrou que estava a confundir dois conceitos matemáticos, um dos quais constituía o foco da planificação da aula. Para ensinar o

[14] Para Lampert (2001), a expressão "dignificar com curiosidade pertinente", da autoria de David Hawkins, "descreve um elemento importante do trabalho do professor em salas de aula organizadas em torno do trabalho com problemas" (p. 484).

aluno e outros colegas que tivessem as mesmas dificuldades e, ao mesmo tempo, envolver o resto da turma em actividade matemática com valor, Lampert escolhe deslocar o trabalho para o domínio das representações simbólicas e icónicas. Por esta via pretendia proporcionar um contexto favorável para que todos pudessem reflectir sobre o problema proposto e, entre outros aspectos, também ensinar que a primeira reacção do professor perante uma resposta não é a de indicar se está, ou não, correcta mas fornecer instrumentos para os próprios alunos poderem raciocinar acerca da validade das suas afirmações.

Após algumas interacções que envolveram outros elementos da turma e que, nalguns momentos, incluíram estruturar e apoiar a participação do aluno que apresentou a ideia incorrecta, pede-lhe para pensar, de novo, sobre essa ideia. O aluno indica que está errada e Lampert coloca-lhe questões que não exigem a indicação da solução do problema proposto mas apenas pequenos raciocínios e decide ela própria raciocinar em conjunto com o aluno. Através deste processo pretende, em particular, ensinar ao aluno e ao resto da turma que faz parte do seu papel avaliarem o seu próprio pensamento. No entanto, porque sabe que em termos das normas que regulam a actividades de aulas usuais está a pedir ao aluno que seja "extraordinariamente corajoso" (p. 158), porque o está a ensinar publicamente e a usar as suas interacções com ele para demonstrar à turma algo que considera importante, decide ajudá-lo a raciocinar, "acreditando talvez que se conseguir fazer surgir (...) algum raciocínio publicamente respeitável serei capaz de resgatar algo da sua imagem como um resolvedor de problemas matemáticos" (idem).

O segundo momento de discussão analisado intitula-se "*Usando os alunos para levar a turma para um novo território matemático*" (p. 164). Lampert inicia-o mesmo sabendo que nem todos os alunos tinham terminado a exploração do problema que iria ser discutido, o que anuncia à turma. Esta opção prende-se com o pretender

> ensinar aos alunos que *nós iremos* e que *eles poderão* discutir um problema mesmo que não tenham tido tempo de o "acabar" durante o período em pequenos grupos. Mesmo que nem todos os alunos participem nesta parte da

> discussão, indicará a todos para onde se dirigirá o nosso trabalho matemático mais tarde no ano lectivo. (Lampert, 2001, p. 164, destaque no original).

Uma vez obtida contribuição do aluno a quem dá a palavra, segue uma via diferente da adoptada no primeiro momento de discussão. Em lugar de lhe solicitar que explique o seu pensamento, como fez no primeiro caso, opta por pedir a um colega para comentar a contribuição. A decisão prende-se com o facto da ideia apresentada pelo aluno representar uma conjectura para obter todas as soluções do problema proposto. Esta conjectura é indiciadora de que fez uma generalização matemática, um tipo de trabalho diferente do desenvolvido até aí, e Lampert pretende fazer surgir reflexões sobre a generalização.

Ao prosseguir a discussão dá-se conta de que um aluno está a requerer a sua atenção e permite que a interrompa. Através deste movimento, estava "a ensinar os alunos que é possível interromper o professor e mudar o rumo da conversação" (p. 168). Mais tarde interpreta generalizações feitas de modo a aumentar a sua acessibilidade — nomeadamente representando no quadro as ideias em discussão — continua, em colaboração com os alunos, o padrão observado nas soluções do problema — sublinhando, neste âmbito, aspectos matemáticos relevantes relacionados com o que está a ser discutido e com os objectivos da aula —, e introduz uma ideia matemática que tinha pensado trabalhar. Neste processo e porque estava a ensinar um grupo heterogéneo de alunos, Lampert refere que enfrentou o problema de manter o foco da aula num dos aspectos da sua planificação que não tinha sido ainda aprendido por alguns alunos, e simultaneamente nas generalizações. A prática de cálculos diversos relacionados com este aspecto se, por um lado, constituiu uma oportunidade para os alunos o estudarem, por outro, proporcionou a possibilidade de continuar o padrão conjecturado. Foi, assim, testada a generalização apresentada pelo aluno a quem deu a palavra no início da discussão.

Se se procurarem padrões nos acontecimentos existentes ao longo de toda a discussão e de que os momentos analisados são apenas uma parte, constata-se, segundo Lampert, que "há uma variedade de movimentos feitos pelo professor para lidar com os problemas de envolver a Matemática na conversação e fazer com que essa Matemática seja estudada" (p. 174). Neste âmbito, destaca que o trabalho de ensino inclui elementos como a) decidir a quem dar a palavra entre os alunos que estão e não estão a requerer atenção, b) ensinar alunos particulares e, ao mesmo tempo, envolver a turma como um todo em actividade matemática com valor, c) manter a discussão na trajectória e, simultaneamente, permitir a apresentação de contribuições espontâneas consideradas relevantes pelos alunos, d) criar representações visuais das ideias em discussão como um registo comum do caminho percorrido pela turma e um referente para a discussão e d) monitorizar o andamento da discussão tendo em atenção o horário da aula.

Foram estes, segundo Lampert, os problemas que enfrentou ao orquestrar a discussão com toda a turma preocupando-se em nela introduzir a Matemática que pretendia que os alunos estudassem, ter em conta questões sociais e envolver todos os alunos na troca de ideias, embora reconheça não ter conseguido interagir com todos aqueles que gostaria de ouvir. Porque pretendeu ensinar, nomeadamente através do modo como orquestrou o primeiro momento de discussão, que "quem fala publicamente na aula é responsável por raciocinar através de uma parte da Matemática" (p. 159), entrou no que considera ser "um território social perigoso" (idem) pois a auto-imagem do aluno que apresentou a contribuição incorrecta e a "sua reputação perante os seus pares está em risco" (idem). No entanto, porque considera que esta aprendizagem é essencial para os alunos se envolverem no trabalho matemático que pretende para as suas aulas, embora consciente dos perigos da situação, decidiu não os evitar. Para diminuir os riscos para o aluno manteve um posicionamento não avaliativo e forneceu-lhe diversos instrumentos que podia usar tanto para salvaguardar a sua imagem, como para ampliar as suas competências matemáticas. Esta opção trouxe-lhe um acréscimo de trabalho, pois de futuro, nas suas palavras, "terei que monitorizar a continuação da sua participação numa base diária e inventar intervenções para lidar com quaisquer problemas que possam surgir como resultado do que escolhi fazer aqui" (pp. 160-1).

Em cada encruzilhada de uma discussão há muitos modos diferentes de fazer prosseguir a conversação e muitos aspectos que influenciam as opções de um professor. O que é fundamental, segundo Lampert, é que de uma forma consistente ensine os alunos tanto a Matemática como a estudar Matemática, solicitando-lhes que raciocinem, expliquem, tenham em conta e interpretem as asserções de outros e, simultaneamente, raciocinando, explicando, tendo em conta e interpretando, ele próprio, a Matemática em articulação com as contribuições dos alunos.

Complexidades de ensinar a argumentar em Matemática

Ensinar a argumentar em Matemática passa, como procurei evidenciar ao longo das secções anteriores, por construir uma cultura de sala de aula regulada por normas que apoiem a ideia de que o raciocínio e a argumentação são as fontes primeiras de legitimidade de ideias e asserções e em que os alunos se sintam confortáveis e seguros para partilharem ideias emergentes e titubeantes, bem como para explicarem, justificarem e defenderem os seus pontos de vista. Há, no entanto, evidência considerável que criar esta cultura é um empreendimento altamente complexo que requer esforços explícito da parte do professor (Yackel & Hanna, 2003). Apresento, em seguida, desafios com que o professor pode confrontar-se.

Ensinar a discordar: Comunidade que cuida e polidez matemática

Por melhor que seja a tarefa que um professor propõe aos alunos, nem todos terão iguais oportunidades de argumentarem matematicamente, nem serão capazes de concordar ou discordar de ideias apresentadas, a menos que todos sejam capazes de ouvir o que é dito (Lampert, 2001). Assim, o trabalho do professor envolve as vertentes de ensinar aos alunos a expressarem-se de um modo passível de ser audível por todos, a escutarem o que qualquer outro elemento da turma diz e a reflectirem sobre o que ouvem para ver se lhe encontram sentido, se concordam, discordam ou têm algo a acrescentar. Outras vertentes são ensinar os alunos a produzirem argumentações que lhes permitam decidir se uma asserção feita por alguém é ou não razoável tendo em conta as condições da tarefa proposta e ainda que têm responsabilidades na avaliação da sua própria actividade e de contribuições, que não as suas, que surgem nas conversações da aula. Todas estas preocupações estiveram subjacentes, em particular, ao trabalho desenvolvido por Lampert que foi objecto do estudo de caso que anteriormente referi. Esta autora salienta, no entanto, ter consciência de que não é fácil, para alunos de 10 anos, falarem deste modo sobre Matemática. Nas suas palavras "requeria simultaneamente coragem, da parte deles, e apoio, da minha" (p. 59).

Neste âmbito, um dos desafios que o professor enfrenta é o de transformar a aula de Matemática numa "comunidade que cuida" (Forman 2003, p. 344, citando Hatano e Inagaki) e, simultaneamente, ajudar os alunos a "distinguirem entre polidez usual em que expressam respeito uns pelos outros e polidez matemática em que expressam respeito pelas ideias uns dos outros" (Lampert & Cobb, 2003, p. 243, referindo Weingrad). Uma comunidade que cuida pode ser descrita como aquela em que os alunos desejam ser bons ouvintes e onde a confiança, o respeito e ajuda mútuos estão presentes. A transformação da aula numa comunidade deste tipo e a compreensão do significado de polidez matemática é tanto mais relevante quando se têm em conta resultados de alguns trabalhos que abordam a questão da emergência e resolução de desacordos na aula.

Com efeito, os desacordos sobre ideias matemáticas, "a consciência de que se está na presença de ideias alternativas, *podem* ser um importante catalisador" (Chazan & Ball, 1999, p. 7, destaque no original) em discussões. No entanto, tal como noutras situações que envolvem reacções aceleradas por catalisadores, há equilíbrios delicados que exigem do professor muito cuidado e atenção.

Alguns desacordos entre alunos "podem conduzir a confrontação em vez de aprendizagem" (Chazan & Ball, 1999, p. 8). Há desacordos não produtivos porque não acompanhados de reflexão. Além disso, se se tiver em conta que em aulas de Matemática ditas tradicionais o padrão é a existência de apenas uma resposta correcta — o que significa que perante duas respostas diferentes, se uma está certa a outra usualmente está errada — a emergência de desacordos pode originar tensões sociais significativas (Lampert, Rittenhouse, & Crumbaugh, 1998). Pode haver alunos que se sentem perturbados pelo facto das suas ideias serem sujeitas a críticas e outros que usam um tom de voz e um modo de falar nos "erros" dos colegas que poderão embaraçá-los e colocá-los numa posição vulnerável (Lampert, 2001). Outros ainda, para fazer face a estas tensões, podem optar por expressar o seu acordo em relação a ideias apresentadas por colegas, privilegiando acima de tudo a preservação da relação pessoal que com eles mantêm, em lugar de procurarem analisar as posições em confronto tendo em vista uma maior compreensão das ideias em debate. Esta situação é bem ilustrada por um exemplo apresentado por Lampert, Rittenhouse, e Crumbaugh (1998) a propósito de um episódio ocorrido numa das aulas de Lampert. Durante a fase de trabalho de grupo, face a duas posições divergentes cuja discussão não conduziu a consenso, elementos de um grupo concordaram em discordar entre si para preservar a relação com os colegas. Há também alunos, considerados como sendo "muito bons", cujos colegas, precisamente por este estatuto, se sentem incapazes seja de analisar, seja de pôr em causa as suas asserções. Além disso, há alunos deste tipo que tendem, por vezes, a dominar a discussões (Lampert, 2001).

Pode, além de tudo isto, haver desacordos entre os alunos e a comunidade matemática, ou seja, há ideias consensuais entre eles que entram em conflito com o que é considerado conhecimento matemático válido. Se um professor orientar o seu ensino de modo a constituir e manter uma comunidade de discurso matemático, uma questão que pode colocar-se é como lidar com situações deste tipo. Numa ocasião em que esta situação surgiu na aula e noutra em que a discussão visando a resolução de um desacordo não estava a ser produtiva, Chazan e Ball (1999) salientam não terem indicado aos alunos a resposta correcta, mas também não se terem limitado a dirigir-lhes "questões neutras, genéricas, do tipo, 'O que é que os outros pensam?' ou 'Podes dizer algo mais acerca do que estavas a pensar?'" (p. 9). Em lugar disso, optaram por "inserir na conversação comentários matemáticos substantivos" (idem) usando o formato de questão ou comentário. Na perspectiva destes autores, a retórica frequentemente dirigida aos professores "exortando-os simplesmente a evitar 'dizer' (*telling*)" (idem, p. 2) não é adequada por várias razões, entre as quais a imprecisão do próprio verbo dizer pois há muitos modos de dizer.

Assim, embora a emergência de desacordos entre ideias ou posições e a sua resolução através de uma discussão sustentada por argumentos matemáticos sejam, do ponto de vista matemático, caminhos prometedores para a ampliação do conhecimento dos alunos, fundar as decisões a tomar nestas situações apenas nas potencialidades matemáticas da discussão, parece não ser suficiente. Igualmente importante é o professor sentir o tom do discurso e usar esta sensibilidade para decidir como deve lidar com as interacções que ocorrem.

Em particular, importa o professor ter consciência dos diferentes estilos que os alunos podem usar para conduzir a sua actuação no processo de resolução de um desacordo e, tendo em conta estes estilos, capitalizar os acontecimentos da aula não só para facilitar a existência de uma discussão que os possa ajudar a progredir na aprendizagem da Matemática, mas também para conseguir que todos se sintam seguros e confortáveis para exprimirem o que, realmente, pensam sobre o objecto do debate. Em especial, importa criar as condições necessárias para os alunos considerados por eles próprios e pelos seus pares como tendo menor capacidade, aprendam a ser capazes de discordar de ideias apresentadas por colegas vistos como sendo "bons" alunos, que estes aprendam a respeitar o pensamento de todos e, no caso de discordarem de alguém, explicarem porque o fazem. Importa também que o trabalho do professor seja orientado no sentido de ajudar qualquer aluno cujas ideias foram questionadas a compreender que o que está a ser posto em causa são essas ideias e não a sua capacidade para fazer Matemática (Lampert, 2001).

Que fazer com as contribuições dos alunos?

Numa comunidade de discurso matemático, a apresentação de ideias pelo professor, que constitui o âmago do que vulgarmente se designa por ensino tradicional, é apenas um dos muitos modos através dos quais pode comunicar e interagir com os alunos acerca de Matemática. Poderá até nem sempre ser difícil para o professor centrar mais a aula nos alunos, ou seja, conseguir que exprimam e partilhem as suas ideias. No entanto, poderá não lhe ser tão fácil identificar o que fazer com essas ideias, quais deixar cair e quais agarrar, de modo a capitalizar o que dizem e fazem para dirigir a actividade da aula em direcção a questões matemáticas significativas que tenham em conta a sua agenda de ensino (Heaton, 2000). Como Heaton refere ao investigar a sua prática de ensino, "colocar as questões era uma coisa. Saber o que fazer com as respostas era outra diferente" (p. 33).

Neste mesmo sentido vão os resultados de uma investigação realizada por Forman, Dawn, e Donato (1998). Estes autores destacam as dificuldades experienciadas por uma professora em apreciar estratégias de resolução de problemas, propostas pelos alunos, que diferiam das suas, apesar de genuinamente interessada em os encorajar a apresentarem múltiplas possibilidades de resolução. Uma hipótese apontada pelos autores para explicar a situação é a não compreensão, no momento, pela professora destas estratégias. Referindo-se a este estudo, Forman (2003) indica que o modo como a professora lidou com as diferentes estratégias de resolução e tipos de discurso usados por três alunos, ao privilegiar a daquele que usou um discurso mais impessoal, um vocabulário matemático mais intenso e uma terminologia e sintaxe mais abstractas, pode, não intencionalmente, ter comunicado à turma a mensagem de que na aula de Matemática só pode ter voz quem consegue falar este tipo de discurso. Esta mensagem contraria o objectivo de encorajar todos os alunos a verem-se a si próprios como fontes de ideias e conhecimento matemático. Forman aventa a possibilidade de ser "irrealista esperar que um professor aprecie completamente vários padrões de resolução alternativos e legítimos sem tempo para examinar cuidadosamente cada um ou sem ampla experiência prévia com o mesmo problema ou problemas semelhantes" (p. 346).

A existência de uma linguagem "oficial" da Matemática e a preocupação de muitos professores em que ela seja usada pelos alunos — porque permitindo que os conceitos sejam expressos de uma forma mais precisa, crêem ter uma função intelectual importante —, pode entrar em conflito com a sua intenção de usarem a terminologia dos alunos e constituir "um dos muitos constrangimentos a uma discussão genuína" (Pimm, 1987, p. 63). Neste âmbito, um dos dilemas que, em muitos casos, pode colocar-se ao professor deriva dos alunos, muito provavelmente, estarem apenas preocupados em lidar e em exprimir-se tendo em conta a situação que têm em mãos, no momento, enquanto o professor tem, simultaneamente, que pensar no futuro e nos desafios que trabalho posterior possivelmente virá a impor.

Gerir a tensão entre apoiar o processo de discurso matemático e o conteúdo matemático do discurso

Na criação e manutenção de uma comunidade de discurso matemático podem surgir dilemas que derivam do facto de, por um lado, o professor procurar que as ideias apresentadas pelos alunos sejam as bases das justificações e discussões que surgem na aula e, por outro lado, ter de assegurar-se de que as trocas discursivas têm valor de um ponto de vista matemático. Ou seja, o professor tem que, simultaneamente, promover o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de argumentos que, do ponto de vista destes alunos, validam as ideias que enunciam e assegurar-se do carácter matemático de tais práticas argumentativas. Estes dois objectivos nem sempre são fáceis de compatibilizar.

Sherin (2002), com base num estudo desenvolvido ao longo de um ano lectivo com um professor interessado em que a sua aula fosse uma comunidade deste tipo, refere dificuldades experienciadas pelo professor, provenientes de tentar encontrar um equilíbrio entre ter um ambiente de sala de aula aberto às ideias dos alunos e, simultaneamente, um ambiente em que o propósito é a aprendizagem de conteúdo matemático específico. Estas dificuldades podem ser vistas, segundo a autora, como uma tensão entre apoiar o *processo* de discurso matemático e apoiar *o conteúdo* matemático do discurso. A expressão *processo de discurso* "refere-se a como professor e alunos interagem nas discussões — quem fala, para quem, quando e de que modos" (p. 209). Sherin indica que esta noção tem semelhanças com o conceito de *social scaffolding* usado por Williams e Baxter para ilustrar um tipo de *scaffolding*[15], proporcionado pelo professor, que ajuda a estabelecer e apoiar normas de sala de aula relacionadas com o modo como os alunos devem falar acerca de Matemática. A expressão *conteúdo do discurso* que, segundo Sherin, tem paralelismos com o *analytic scaffolding* referido por esses autores como sendo o proporcionado pelo professor para estruturar como e que ideias matemáticas são discutidas na aula, refere-se

> à substância das ideias matemáticas suscitadas, à profundidade e complexidade destas ideias em termos dos conceitos matemáticos que estão a ser considerados. Além disso, o conteúdo do discurso diz respeito a quão de perto se alinham as ideias originadas na discussão com os objectivos curriculares do professor e com a Matemática tal como é compreendida pela comunidade matemática existente para lá das fronteiras da aula. (Sherin, 2002, p. 209)

Contrariamente a alguns estudos que sugerem que os professores lidam com a tensão entre apoiar o processo de discurso e apoiar o conteúdo do discurso focando-se, de início, no processo e, uma vez estabelecidas as normas de funcionamento da aula, dirigindo a sua atenção para questões relacionadas com o conteúdo, a investigação de Sherin mostra que, para o professor, "a manutenção da integridade tanto do processo como do conteúdo do discurso foi uma batalha contínua" (p. 210) que se manteve ao longo de todo o ano lectivo. Esta ideia é consistente com resultados de outros estudos, nomeadamente de Lampert (2001) e Blunk (referido por Lampert e Cobb, 2003). Para Lampert, o estabelecimento de normas de acção e de interacção, começa no início do ano lectivo quando o professor, pela primeira vez, se confronta com uma turma, mas a sua manutenção continua numa base diária ao longo de todo o ano e depende de como o professor estrutura as suas interacções com os alunos considerados individualmente, como grupos e como a globalidade de todos os que integram a turma. Também o estudo de Blunk, mostrou que o

[15] A noção de *scaffolding* que se poderá traduzir por "colocar andaimes" prende-se com a ideia de que o professor, enquanto pessoa mais experiente e sabedora, pode incentivar e ajudar os alunos a progredirem na resolução de problemas particulares, intervindo mais ou menos directamente consoante as dificuldades que os alunos encontram. Quanto mais dificuldades surgirem mais directas devem ser as intervenções do professor. Estas intervenções, destinadas a ampararem as tentativas de resolução dos problemas de modo aos alunos irem ampliando as suas competências e conhecimentos, não devem, no entanto, excluir a colocação de desafios que os façam progredir e que os levem a executar funções de ordem superior. Ou seja, o processo de *scaffolding* não passa por uma simplificação da tarefa com que os alunos se confrontam. As dificuldades desta tarefa mantêm-se mas o papel dos alunos é simplificado através da intervenção dos professores (Vasconcelos, 1997).

professor, para apoiar um modo de falar e trabalhar que coloca nos alunos a responsabilidade de investigarem se o que fazem tem sentido em termos matemáticos, em vez de lhes ensinar, no início do ano, sobre como falar acerca de Matemática deixando-os, em seguida, seguir por si próprios, necessitou de reafirmar normas e valores matemáticos ao longo de todo o ano.

Riscos de lidar diferenciadamente com as contribuições dos alunos

Outro dos problemas com que o professor se pode confrontar ao tentar desenvolver uma comunidade de discurso matemático na aula, resulta de ter que lidar de forma diferenciada com as contribuições dos alunos durante as discussões, para poder apoiar proactivamente a aprendizagem (Lampert & Cobb, 2003). Estes autores, apoiando-se nos resultados de alguns estudos, referem que há alguns grupos de alunos que na aula não têm voz, no sentido em que as suas opiniões não são ouvidas e as questões que levantam não são discutidas. Salientam que as decisões tomadas pelo professor durante uma discussão "podem ser inteiramente justificáveis de um ponto de vista matemático. No entanto, ao diferenciar as contribuições dos alunos, o professor implicitamente comunica aos alunos que certas opiniões e modos de raciocínio são particularmente valorizados e outros menos valorizados" (p. 246). O problema é que, apesar das melhores intenções do professor, alguns alunos, em particular os oriundos de comunidades cujas práticas discursivas estão mais afastadas do discurso académico valorizado pela escola, podem interpretar que as suas vozes estão a ser silenciadas e, não compreendendo porquê, podem colocar-se à margem das actividades da aula.

A importância de um conhecimento amplo e evolutivo dos alunos

Um dos desafios que se coloca ao professor ao procurar constituir e manter uma comunidade de discurso matemático, é construir um conhecimento evolutivo dos alunos, quer no que respeita aos seus saberes matemáticos, quer quanto às suas características pessoais. Este aspecto, sublinhado por Lampert (2001), é também destacado por Heaton (2000) que indica usar o conhecimento que tem dos alunos —

de quem são enquanto pessoas, da natureza das suas personalidades, das relações que mantêm uns com os outros e da sua compreensão da Matemática — como um meio de guiar as suas acções durante as discussões. Este conhecimento é um dos elementos que orienta, por exemplo, as decisões que toma sobre qual o aluno a quem deve pedir para intervir num determinado momento. Analisando a sua prática, destaca, no entanto, que se expectativas fixas acerca de cada aluno puderam, por um lado, atenuar incertezas, por outro, por vezes, a "cegaram para o crescente potencial dos alunos" (p. 94). Assim, foi necessário conseguir que as suas expectativas fossem "tão dinâmicas e evolutivas como o crescimento e desenvolvimento dos alunos" (idem).

Um outro aspecto, sublinhado por Heaton, é a dependência do trabalho do professor do envolvimento e contribuições dos alunos, quando opta por equacionar o discurso da aula de modo a terem um papel de relevo na produção deste discurso e a enquadrar a possibilidade de seguiram direcções diferentes das imaginadas pelo professor. Uma das consequências de ter procurado orientar a sua prática no sentido das recomendações indicadas pelo NCTM, foi, nas suas palavras, aprender "a ver os alunos como jogadores integrantes em tudo o que tento fazer como professora. Não necessito apenas de ter algo de interessante acerca do qual os alunos possam conversar, mas estou dependente do seu envolvimento" (p. 94). Esta dependência requer, em especial, "aprender a confiar que cada aluno tem algo para oferecer e que, em conjunto, construiremos significado matemático a partir de uma tarefa" (idem).

Incerteza e emoções originadas pelas contribuições dos alunos

Por vezes, as respostas apresentadas pelos alunos não correspondem ao que o professor imaginou. Há ocasiões em que podem conduzir a direcções totalmente inesperadas. Nalguns casos, estas direcções são, surpreendentemente, produtivas, noutros parecem conduzir, pelo menos no momento, a becos sem saída. Algumas, poderão ser recordadas mais tarde e proporcionar novas ocasiões de aprendizagem. Outras, nunca mais serão retomadas. Por vezes, as ideias surpreendentes que podem ser potenciadas de modo a criar oportunidades de aprendizagem, vêm de alunos de quem o professor menos espera quando estrutura o seu trabalho. Outras vezes, as surpresas podem ser experienciadas como ameaçadoras (Heaton, 2000).

A partir da análise da sua prática, Heaton sublinha aprendizagens que lhe foram úteis para lidar com estas questões. Uma, é a importância do professor aprender a reconhecer quais as potencialidades das ideias apresentadas pelos alunos tendo em conta o momento presente e o futuro e, paralelamente, aprender que elas pertencem a pessoas cujos sentimentos e atitudes têm constantemente que ser "lidos" no decurso das interacções da aula. Outra é a relevância do professor aprender a ver os alunos não apenas como fontes de dificuldades para o seu trabalho, mas também como recursos para lidar com essas dificuldades. Partilhar com os alunos a liderança da aula, tarefa que não é fácil pois requer que, pelo menos momentaneamente, se desista de controlar a situação didáctica, é, na sua perspectiva, uma via para a emergência destes recursos. Uma outra aprendizagem importante para o professor poder caminhar com os alunos num percurso de ensino que vão criando seguindo direcções que conjuntamente constroem, é a aceitação da incerteza. Por último, Heaton sublinha ter aprendido que mostrar à turma que a contribuição de um aluno a ajudou a ver algo que, de outro modo, não teria visto, poderia beneficiar todo o grupo e proporcionar a oportunidade de "oferecer um poderoso modelo para o tipo de aprendizagem de uns para os outros" (p. 96) que queria para as suas aulas.

Encerrando o capítulo. Procurei, ao longo da primeira parte deste capítulo. apoiar-me no pensamento de Pereman e Toulmin, dois filósofos com trabalhos reconhecidamente valorizados no âmbito do estudo da argumentação, para reflectir sobre a argumentação em Matemática. Toulmin privilegia a função justificativa dos argumentos considerando que todas as outras funções lhe estão subordinadas. Perelman considera, também, que na argumentação os meios de prova são as justificações. No entanto, para um aluno poder compreender uma justificação apresentada enquanto garantia ou fundamento de uma ideia cujo valor ou validade se pretende mostrar, é necessário também, e antes de mais, entender essa ideia. A sua explicação, visando clarificar aspectos do pensamento que podem não ser evidentes para outros, pode ser necessária. Assim, embora concordando que uma particularidade da argumentação é o seu carácter justificativo, parece-me complexo, numa situação de sala de aula, demarcar nitidamente a explicação da justificação numa situação de argumentação colectiva. Os dois aspectos estão frequentemente entrelaçados.

A noção de campo de argumentação proposta por Toulmin parece ter potencialidades, pois chama a atenção para que os cânones de crítica e de avaliação das várias componentes de um argumento — dados, garantias, fundamentos e conclusões — dependem do campo de conhecimentos em que a argumentação se insere. Uma questão que pode colocar-se é como proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem favoráveis à apropriação dos cânones específicos do campo da Matemática e desafiá-los a usarem-nos na avaliação dos seus próprios argumentos e na de outros elementos da turma. Um outro aspecto do pensamento de Toulmin que, a meu ver, é relevante, prende-se com as fases gerais de um argumento — colocação de um problema, exploração para identificação de soluções "potenciais" e avaliação — que têm ressonâncias com o modelo resolução de problemas proposto por Pólya (1965). Confrontar os alunos com problemas sobressai, assim, também através de Toulmin, como um aspecto relevante para a emergência de argumentação. O modelo de análise da microestrutura de um argumento proposto por este filósofo, por outro lado, parece ser útil apenas para analisar os aspectos explícitos da actividade argumentativa e pequenos pedaços de discurso.

As distinções propostas por Perelman entre argumentação e demonstração, a meu ver, não são suficientemente poderosas para equacionar as relações entre argumentação em Matemática e demonstração, muito principalmente se nos situarmos no campo educativo. Aproximo-me, neste âmbito, das ideias de Pedemont (2002), Douek (1998, 1999, 2000) e Boero (1999) ao considerarem que, enquanto processos, estas actividades têm pontos de contacto, que a demonstração é um caso particular da argumentação em Matemática e que a aprendizagem da demonstração é facilitada pelo envolvimento dos alunos em actividades de argumentação. Com efeito, embora a observação de textos matemáticos de índole formalista possa levar a supor que na produção matemática o que surge em primeiro lugar são axiomas e definições e que as conclusões são daí derivadas através de deduções lógicas, no desenvolvimento da Matemática as coisas não se passam desta forma. O que vem em primeiro lugar são problemas seguidos de soluções audaciosas, frequentemente designadas por conjecturas, a que se segue um trabalho em que a pesquisa da demonstração se articula com a procura de contra-exemplos e/ou de novas conjecturas. A demonstração surge como meio de validar conjecturas que resistem a sucessivos testes, de compreender o porquê da sua validade e de comunicar ideias matemáticas de modo a que outros possam analisá-las cuidadosa e criticamente. A argumentação é fundamental neste processo para, por exemplo, analisar a validade e relevância de regularidades descobertas na exploração do problema, submeter ao escrutínio de outros possíveis formulações de enunciados de conjecturas, discutir se um caso particular é, ou não, um contra-exemplo, explorar limites de validade de uma conjectura e estabelecer analogias com situações semelhantes que podem facilitar a identificação de argumentos para validar uma conjectura e/ou ligações entre os argumentos a encadear dedutivamente.

Confrontar os alunos com tarefas abertas que lhes permitam formular conjecturas e incentivá-los a reflectir sobre a sua validade, como, entre outros autores, Boero e Pedemonte defendem, poderá permitir o seu envolvimento em experiências de aprendizagem com características, de algum modo, semelhantes, às da comunidade matemática. A argumentação poderá surgir, por exemplo, como "construtiva da conjectura" (Pedemonte, 2002, p. 84), ou seja, com o objectivo de construir o enunciado da conjectura; também poderá aparecer como "estruturante da conjectura" (idem), isto é, tendo por função justificar um enunciado que derivou de um facto observado; e poderá acontecer que estes dois papéis da argumentação estejam associados a uma mesma conjectura. Além disso, as conjecturas formuladas pelos alunos e as tentativas feitas para avaliarem a sua validade, poderão constituir um motor para a sua prova e contribuir para dar sentido a esta actividade. Poderão permitir que a prova surja aos seus olhos como meio de avançar na compreensão de uma ideia, problema ou resultado matemático, como uma via que clarifica porque é que uma relação funciona ou não, como um instrumento que pode ser usado para estudar Matemática e não como um objecto matemático a estudar como um fim em si mesmo. Todos estes aspectos fazem parte das actuais orientações para o ensino e aprendizagem da prova. E como conclui Pedemonte (2002) no estudo que desenvolveu em que os alunos foram confrontados com problemas abertos que requeriam a formulação de conjecturas, houve alunos que não foram bem sucedidos em construir argumentações nem demonstrações. No entanto, "não temos exemplos nas experimentações em que alunos tivessem construído uma demonstração sem construírem uma argumentação" (p. 293). Parece, assim, como defende Veloso (1998), que é "através da prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações" (p. 374) que os alunos vão, ao longo da escolaridade, construindo uma ideia cada vez mais correcta do que é uma demonstração.

Na segunda parte deste capítulo, procurei sublinhar que considero o ensino um trabalho complexo e multifacetado em que o professor mobiliza e constrói um saber profissional de natureza plural e no qual a emoção e a razão andam de mãos dadas. Através da apresentação de um modelo de análise do trabalho de ensino elaborado por Lampert (2001) e de limitações que lhe aponta, procurei, também, ilustrar que o ensino pode ser conceptualizado como "trabalhar em relações" de tipos diversos. Estas relações, se por um lado, são fontes de problemas com que o professor tem que lidar, por outro lado podem ser equacionadas de modo a fazer emergir recursos que pode usar na sua prática. Além disso, tentei destacar que nem todas as práticas de ensino são igualmente complexas. Em particular, através das considerações desta autora sobre o lugar e papel do discurso na aula de Matemática, procurei sublinhar que estas complexidades acrescem quando se pretende que as actividades de argumentação tenham uma expressão significativa, o que requer, em especial, que o conteúdo a ensinar vá para além do que usualmente se designa por conteúdos de ensino.

Construir uma cultura de argumentação, ideia que tem muitas proximidades com a constituição e manutenção de uma comunidade de discurso matemático, introduz no trabalho do professor complexidades de vários tipos. Estas complexidades revestem-se da forma de dificuldades, problemas, dilemas com que não é fácil lidar. Enfrentá-las requer que o professor tenha em atenção não só as particularidades dos discursos e práticas das comunidades matemáticas, mas também aspectos de ordem afectiva e social que extravasam o campo da Matemática. Apesar destas complexidades, há, no entanto, diversas investigações que mostram que o facto dos alunos partilharem, explicarem e justificarem as suas ideias pode originar oportunidades, significativas, de aprendizagem para o professor. Estas oportunidades podem, em particular, desafiá-lo a repensar não apenas a sua compreensão da Matemática, como também as estratégias pedagógicas que adopta para ensinar tais ideias. Deste modo, o desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático pode ser, para o professor, uma forma poderosa de desenvolvimento profissional (Sherin, 2002).

Capítulo III

-

Colaboração e investigação colaborativa: Perspectivas e desenvolvimento

Os professores trabalham hoje num mundo caracterizado pela mudança acelerada, frequentemente descrito como um mundo pós-industrial e pós-moderno. "O mundo pós-moderno é rápido, comprimido, complexo e incerto" (Hargreaves, 1998a, p. 10) e a vida económica, política, organizacional e mesmo pessoal é organizada a partir de princípios diferentes daqueles que caracterizam a modernidade. Em termos educativos estas diferenças colocam problemas e desafios que se revestem de formas diversas. O papel do professor expande-se, com o consequente aparecimento de novos problemas e requisitos, as inovações multiplicam-se, criando sentimentos de sobrecarga entre os professores, as certezas morais desagregam-se, fazendo surgir crises de identidade e de objectivos no que respeita à missão e propósitos dos sistemas escolares, e as certezas científicas perdem terreno acarretando consigo o questionamento da existência de bases de conhecimento seguras para fundamentar opções relativas ao ensino (Hargreaves, 1998a). Esta perda das certezas científicas que acompanha o declínio da modernidade acarreta consigo o "declínio e, nalguns casos, mesmo o colapso dos *cânones* disciplinares no âmbito dos quais tem sido construída muita da investigação educacional" (Goodson, 1993, p. 2). Simultaneamente, o advento da pós-modernidade parece ter trazido um reconhecimento acrescido da necessidade e importância da colaboração profissional: "Um dos paradigmas mais prometedores que surgiram na idade pós-moderna é o da colaboração, enquanto princípio articulador e integrador da acção, da planificação, da cultura, do desenvolvimento, da organização e da investigação" (Hargreaves, 1998a, p. 277).

O conceito de colaboração é, no entanto, polissémico, e como bem sublinha Hargreaves, nem todo o trabalho colectivo representa uma situação de colaboração e nem todas as formas de colaboração possibilitam um acréscimo de oportunidades de aprendizagem mútua ou de expressão da liberdade e criatividade individuais nem conduzem a modos de agir mais informados e não conformistas.

Neste capítulo procuro analisar significados atribuídos a cooperação e colaboração, descrever aspectos característicos e constitutivos do trabalho colaborativo[16], referir potencialidades deste trabalho no campo educativo, abordar possíveis modos de desenvolver uma investigação colaborativa e evidenciar a complexidade de que se reveste o trabalho em colaboração através da reflexão sobre questões e problemas destacados por investigadores que se têm debruçado sobre o tema.

Benefícios atribuídos à colaboração e polissemia do conceito

A apologia da colaboração não é exclusiva do campo educativo encontrando-se argumentos que a defendem em muitos outros domínios e campos profissionais (John-Steiner, Weber, & Minnis,1998). No caso particular da educação, é

[16] Muita da literatura consultada sobre colaboração ou investigação desenvolvida em colaboração é escrita em língua inglesa sendo aí frequente a utilização do adjectivo *collaborative* para o qual não existe tradução em português. Procurando preservar o sentido que lhe é atribuído nessa literatura, recorri ao neologismo *colaborativo* para tradução de *collaborative*.

amplamente proposta como um meio de fazer face às crises da escolaridade contemporânea, "como solução para muitos problemas e dificuldades que os educadores estão a ter de enfrentar" (Hargreaves 1998a, p. 277) e como uma estratégia particularmente frutuosa para fomentar o desenvolvimento, não só dos que nela se envolvem, mas também das próprias escolas (Christiansen, Goulet, Krentz, & Maeers, 1997a; Day, 1991; Hargreaves, 1998a). A colaboração entre professores e investigadores é muitas vezes apontada como um percurso prometedor para promover o desenvolvimento profissional e pessoal de quem nela se envolve, como um dos caminhos mais favoráveis à produção de conhecimento relevante sobre o ensino e a educação, como um meio de fortalecer[17] (*empower*) grupos frequentemente desvalorizados em formas mais tradicionais de investigação e como uma forma de minimizar assimetrias de poder e conhecimento entre profissionais[18] e investigadores. Estas ideias encontram eco em trabalhos de vários autores.

Uma das cinco partes que constituem o livro *Colaboration and Educational Reform* (Christiansen et al., 1997a) é inteiramente dedicada à apresentação de "histórias (...) de envolvimento em investigação colaborativa com o propósito de desenvolvimento profissional" (p. 130). Referências a este desenvolvimento encontram-se, também, em muitas das experiências relatadas nas outras partes que compõem esta obra. Clark et al. (1996) sublinham, igualmente, que uma das características que atravessa as diversas "concepções de colaboração e investigação colaborativa é a sua capacidade de promover desenvolvimento profissional" (p. 196). Em Portugal referências às potencialidades do trabalho em colaboração para o

[17] Na língua inglesa o verbo *empower* está associado a conceitos relacionados com *poder*, *autonomia, autoridade* e *estatuto.* Em português alguns dos significados de *fortalecer* são dar ou adquirir mais forças físicas ou psicológicas; dar ou adquirir energia, coragem, determinação; dar maior poder, força, capacidade de intervenção e autonomia (Academia das Ciências de Lisboa, 2001, p. 1800). Tendo em conta estes significados e seguindo a opção tomada na versão portuguesa do livro de Hargreaves *Changing Teachers, Changing Times: Teachers'Work and Culture in the Postmodern Age* (Hargreaves, 1998a), traduzo *empower* e *empowerment* respectivamente, por *fortalecer* e *fortalecimento*, embora considere que não é solução ideal tendo em conta, sobretudo, o sentido físico que, muitas vezes, é predominantemente associado a estas palavras.

[18] O termo *profissionais* é a tradução adoptada para *practitioner*. Muito frequentemente, este termo quando usado no âmbito da literatura sobre educação e, em particular, no que se prende com a investigação educacional, refere-se a professores e outros agentes com responsabilidades na administração e gestão das escolas.

desenvolvimento profissional encontram-se, por exemplo, em Ponte, Segurado, e Oliveira, 2003), Saraiva (2001) e Serrazina (1998).

Tendo por referência um projecto de investigação colaborativa que desenvolveram, cuja equipa incluía professores do ensino superior e não superior, Ponte et al., (2003) destacam a utilidade de projectos com estas características para o estudo de fenómenos educativos complexos onde se incluem questões relacionadas com a dinâmica da sala de aula e com o conhecimento profissional dos professores. São as potencialidades deste tipo de investigação colaborativa para a produção de conhecimento importante sobre o ensino, que estão na base da ideia, defendida por diversos autores, de que ela foi estimulada por críticas feitas nas últimas décadas à investigação educacional e constituiu uma das respostas dadas ao questionamento geral da relevância da investigação para a prática profissional.

Wagner (1997), em particular, salienta que a cooperação[19] entre escolas e universidades[20] e entre professores e investigadores, foi estimulada por dois tipos de críticas. O primeiro tipo, prende-se com a constatação de que sem a participação activa dos professores e administradores escolares, a investigação educacional não pode gerar resultados úteis ao melhoramento das escolas. O segundo tipo espelha, segundo o autor, a convicção política de que formas tradicionais de investigação em educação reflectem assimetrias de poder e conhecimento que exploram e enfraquecem os profissionais[21]. O apelo a uma maior paridade entre este grupo e o dos investigadores educacionais na concepção e desenvolvimento de projectos de investigação, bem como a recomendação dos investigadores se envolverem em formas de acção que sirvam interesses de grupos sem poder, onde se incluem, em

[19] Para Wagner (1997) a noção de cooperação é entendida como os diferentes termos e combinações através dos quais indivíduos concordam em trabalhar, conjuntamente, numa actividade social co-orientada. Assim, para este autor, esta noção, embora não seja equivalente a colaboração, inclui o que outros designam por colaboração.

[20] Wagner usa o termo *university*. Traduzo-o por “universidade” mas atribuo-lhe o significado de ensino superior, à semelhança de Day (1999).

[21] A análise do texto de Wagner revela que o autor utiliza o termo *practitioner* para designar professores e administradores escolares.

particular, aqueles que estudam, foram algumas das várias respostas dadas ao segundo tipo de críticas.

No mesmo sentido, Bednarz, Desgagné, Couture, Lebuis, e Poirier (1999) referem que a investigação educacional sobre o ensino é muitas vezes acusada de ter pouca ressonância no trabalho dos professores e de falhar em os ajudar a lidarem, efectivamente, com as situações complexas com que se confrontam no dia-a-dia, salientando que a colaboração constitui uma reacção à separação, frequentemente constatada, entre o mundo da prática profissional dos professores e o mundo da investigação planeada para iluminar essa prática. Assim, para estes autores, a investigação colaborativa contém, em si, a promessa de aproximar investigadores de professores, a cultura da universidade da cultura da escola e a teoria da prática educativa.

A colaboração, apesar das suas frequentemente proclamadas potencialidades, tem, no entanto, muitas facetas. O conceito é polissémico e a forma como ele é apropriado pelas organizações, escolas, investigadores e professores é muito diversa. Ao reflectirem sobre a sua experiência enquanto editoras de um livro sobre colaboração em educação, Christiansen et al. (1997b) referem que, enquanto fenómeno e processo, a colaboração é uma noção bastante indefinida e "apenas parcialmente compreendida por muitos daqueles que participam em empreendimentos 'colaborativos'" (p. 283). Também Hargreaves (1998a) sublinha que não existe uma forma de colaboração mais "real" ou mais "verdadeira" que todas as outras, mas simplesmente diferentes formas de colaboração que têm consequências diferentes e servem propósitos também diferentes. Na perspectiva deste autor, e no caso dos professores, o seu fortalecimento, a reflexão crítica e o empenhamento num aperfeiçoamento contínuo, benefícios amplamente difundidos como resultando, necessariamente, dos processos de colaboração, só se aplicam a algumas das formas de colaboração que, na realidade, parecem ser as menos comuns. A colaboração e o fortalecimento não andam, necessariamente, de mãos dadas (Wagner, 1997). Além disso, as mudanças atribuídas à investigação colaborativa muito frequentemente consideradas positivas, "podem ser difíceis, ou mesmo mal acolhidas pelos professores" (Clark et al., p. 196).

Por outro lado, apesar da natureza de co-igualdade de muitas das definições de colaboração, as potencialidades do envolvimento dos investigadores em projectos colaborativos para o seu próprio desenvolvimento profissional, tão amplamente salientadas e documentadas no que respeita aos professores, são pouco conhecidas e mesmo investigadas:

> Para os investigadores parece haver poucos balanços de como mudam ou se tornam mais reflexivos como resultado da colaboração (…) O que os investigadores retiram de tais relações não são, necessariamente, oportunidades para desenvolvimento profissional mas, em lugar disso, simplesmente dados ou informantes. (Clark et al., 1996, p. 196)

Focando-se nos professores, Hargreaves (1998a) refere que no campo educativo, um dos grandes desafios da pós-modernidade não é, meramente, o de fazer com que a colaboração funcione: "é também o de discutir para que serve ela e o que está em causa para além dela" (p. 83). Esta consideração parece ser relevante quando, em particular, se pretende analisar o que está em causa no desenvolvimento, em colaboração, de projectos de investigação envolvendo professores e investigadores exteriores às escolas em que aqueles exercem a sua actividade. Neste âmbito, e embora seja, nas palavras de John-Steiner et al. (1998), "intimidativo" (p. 774) escrever sobre colaboração, dada a ampla literatura existente sobre o tema, a diversidade disciplinar de investigadores que o abordam e as fontes variadas de análises teóricas sobre o processo, importa analisar significados que lhe são atribuídos de modo a analisar diferentes formas que pode assumir e a equacionar diversas implicações destas formas.

À volta dos significados de colaboração e investigação colaborativa

O significado de colaboração e de colegialidade é abordado por Hargreaves (1998a) a partir de duas perspectivas sobre relações humanas que designa por *perspectiva cultural* e *perspectiva micropolítica*. A perspectiva cultural, segundo o autor a presentemente dominante, põe a ênfase naquilo que é possuído em comum e partilhado nas relações humanas: os valores, os hábitos, as normas e as crenças. Nesta perspectiva "as culturas de colaboração exprimem e emergem de um processo de formação de consensos que é facilitado por uma gestão educativa largamente benevolente e competente" (p. 214). Um dos problemas que esta perspectiva encerra resulta do facto de se colocar a ênfase nos aspectos consensuais das relações humanas, negligenciando as diferenças, conflitos e desacordos que poderão ser mais significativos para quem colabora do que aquilo que, eventualmente, possam partilhar.

A perspectiva micropolítica, aquela a que o autor concede uma atenção particular, trata da utilização do poder para se atingirem resultados desejados. Esta perspectiva "dá maior relevo às diferenças existentes entre os grupos de uma organização do que às suas semelhanças" (Hargreaves 1998a, p. 214, referindo Hoyle). A adopção de uma perspectiva micropolítica tem importantes implicações para a compreensão da colaboração e para as questões que se levantam a seu respeito. Encoraja a distinção entre as diferentes formas que pode assumir e a análise, em cada caso, de quem as constitui e dos interesses que servem. Permite, também, questionar situações em que "a colaboração se transforma num empenhamento, não para a concretização de propósitos próprios, mas sim para a implementação de propósitos estabelecidos por outros" (Hargreaves 1998a, p. 215).

A colaboração, segundo Hargreaves (1998a), tanto pode ser útil como nociva, a sua existência não é condição suficiente para que um projecto ou uma mudança funcionem com êxito e as culturas de colaboração podem ter os seus problemas ou limitações. Entre os significados e concretizações mais problemáticas da colaboração, Hargreaves refere a colaboração *confortável e complacente*, a *conformista*, que pode conduzir ao pensamento dominado pelo grupo, suprimindo, assim, a individualidade e a criatividade que daí emerge, a *artificial* e a *co-optativa*. Assim, se os professores se centrarem em actividades que consideram seguras sem questionar e reflectir sobre o valor, propósito ou consequências das suas práticas, perspectivas e pressupostos, a cultura de colaboração pode degenerar num reforço de práticas instituídas em lugar de fomentar a procura de melhores alternativas numa busca contínua de aperfeiçoamento. Entre as potencialidades de uma colaboração bem sucedida encontram-se, por exemplo, o fortalecimento da determinação em agir, a possibilidade da partilha e expressão pública de vulnerabilidades, a ajuda para ultrapassar fracassos e frustrações, a redução das incertezas e excessos de culpa, um acréscimo de segurança para iniciar inovações e mudanças, a promoção de uma confiança profissional colectiva — a partir da construção de certezas situadas de saber profissional — a possibilidade de uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das oportunidades de aprendizagem mútua.

Hargreaves aborda o significado de colaboração situando-se num ponto de vista organizacional. Independentemente de nos situarmos, ou não, nesta perspectiva, em educação é frequente considerar-se colaboração como sinónimo de parceria ou cooperação (Stewart, 1997). Aliás, a consulta de um dicionário de português revela que colaboração é um dos sinónimos propostos para cooperação e reciprocamente. Há, no entanto, autores que distinguem estas noções, procurando caracterizar a noção de colaboração. Stewart (1997), apoiando-se nalguns destes autores, apresenta três possíveis significados:

a) a colaboração como uma relação que envolve parceiros iguais trabalhando numa base continuada para atingir objectivos mutuamente benéficos;

b) a colaboração como uma relação em que pessoas de diferentes contextos e proveniências trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica mas como iguais e em que uma das partes pode utilizar a outra, ou pelo menos o contexto da outra, para um estudo;

c) a colaboração como esforços conjuntos de membros de universidades e escolas para desenhar e proporcionar oportunidades para melhorar o ensino e a formação de professores.

Analisando estes significados constata-se que comum a todos eles é a ideia de que para existir colaboração tem que haver um trabalho que é feito conjuntamente por várias pessoas. Há, no entanto, algumas singularidades referentes, em particular, à relação que estas pessoas estabelecem entre si e à natureza do trabalho que desenvolvem.

Em a) e b) refere-se, explicitamente, que a relação entre quem colabora é de paridade e não hierárquica embora em c) este aspecto seja omisso. Em b) não é claro se o estudo desenvolvido deve trazer benefícios a todas as partes envolvidas na colaboração ou se apenas a algumas. Contrariamente, a referência a objectivos mutuamente benéficos, visível em a), e a simultaneidade da melhoria do ensino e da formação referida em c) podem indiciar que o trabalho a desenvolver conjuntamente deve trazer mais-valias para todos.

A observação de outras caracterizações de colaboração apenas permite constatar que a diversidade de interpretações é uma constante. Por exemplo, para Erickson (1989) colaborar representa trabalhar com um grupo de pessoas de modo a haver ajuda mútua. A mesma perspectiva é partilhada por Ponte et al. (2003) que salientam a importância das pessoas envolvidas num processo colaborativo terem objectivos comuns e negociarem conjuntamente os processos de trabalho, embora possa haver, também, objectivos diferenciados. Em contrapartida, segundo Kapuscinski (1997), "Clift e seus colegas definiram colaboração como 'o acordo explícito entre duas ou mais pessoas para estabelecerem e concretizarem um objectivo ou objectivos particulares'" (p. 9). Nesta definição nada é dito sobre a natureza da relação entre as pessoas ou quem beneficia com o(s) objectivo (s) estabelecido(s).

A variedade de interpretações com que me confrontei ao procurar analisar o significado de colaboração, mantém-se quanto ao significado de investigação colaborativa. Clark et al. (1996) referem que esta noção deriva da antiga tradição de investigação-acção, com a sua ênfase tanto na produção de novas teorias e conhecimento sobre o ensino, como na análise de problemas existentes nas práticas escolares. Sublinham, no entanto, que "parece não existir consenso sobre o que significa fazer investigação colaborativa" (p. 195).

Há caracterizações de investigação colaborativa que enfatizam a ideia de que é fundamental todos os parceiros compreenderem e participarem em todas, ou pelo menos algumas, as fases do processo de investigação:

- Um objectivo principal da investigação colaborativa é "assegurar a compreensão e participação de todas as partes em todas as fases do processo de investigação" (Clark et al., 1996, p. 195, citando Schensul & Schensul);
- Investigação colaborativa é aquela "em que os sujeitos estão envolvidos no desenvolvimento das questões de investigação, na escolha da metodologia, e na escrita de resultados. Há uma posse conjunta do projecto, e assim há verdadeira colaboração" (Clark et al., 1996, p. 195, citando Kreisberg).
- Tem havido uma mudança no sentido de deixar de ver os professores como sujeitos para os considerar parceiros no estabelecimento dos objectivos da investigação e no enquadramento ou reenquadramento das questões de investigação. Este envolvimento dos professores na pesquisa universitária sobre o ensino é hoje comummente entendido como investigação colaborativa (Kapuscinski, 1997, p. 9).

Outras caracterizações de investigação colaborativa distanciam-se desta perspectiva e/ou focam-se mais na forma que assume a interacção entre quem colabora e nas relações interpessoais estabelecidas:

- "Diferentemente de perspectivas sobre investigação colaborativa que vêem a participação 'de todas as partes em todas as fases do processo de investigação' (Schensul & Schensul, 1992) como o tipo central de partilha, nós vemos o diálogo como a peça chave da nossa permuta" (Clark et al., 1996, p. 196). A partilha e a mutualidade é considerada "não em termos de *realizar o mesmo trabalho de investigação* mas, antes, em termos da *compreensão do trabalho uns dos outros*" (idem, destaque no original).

- Os projectos de investigação colaborativa são tentativas para estabelecer relações de investigação baseadas em conversações; uma investigação colaborativa "é flexível, mudando e movendo-se constantemente à medida que os participantes re-desenvolvem as relações de investigação e continuam a formular novas questões e a negociar e renegociar num espaço em que contribuições individuais, papéis e *backgrounds* são considerados de igual valor" (Stewart, 1997, p. 32, referindo Clandinin).

Diversos autores utilizam a designação "investigação colaborativa" (Bednarz et al., 1999) ou "pesquisa cooperativa" (*co-operative inquiry)* (Reason, 1988b, 1988c, 1994) para referir, em ambos os casos, apenas a investigação feita *com* pessoas, sejam elas professores ou não, em vez de investigação *sobre* pessoas. É o caso, por exemplo, de Blond e Webb (1997) que interpretam a investigação que desenvolveram "como colaborativa visto que é uma investigação *com* em vez de *sobre* um professor" (p. 85). Segundo Reason (1988b), a expressão "pesquisa cooperativa" contempla várias abordagens à investigação *com* pessoas, cada uma com as suas especificidades, mas que têm em comum a existência de um trabalho "aberto, directo e colaborativo com os actores principais nos seus vários campos de interesse" (p. 3). Pesquisa cooperativa consiste, assim, para este autor, o que noutros contextos tem sido referido como pesquisa ou investigação colaborativa.

Contrariamente a Reason, Wagner (1997) refere que é cooperativa toda a investigação educacional realizada nas escolas, mesmo quando os investigadores se limitam a usar os professores e os alunos como fontes donde extraem dados e conhecimento. Para este autor a noção de cooperação, entendida como os diferentes termos e combinações através dos quais os indivíduos concordam em trabalhar juntos numa actividade co-orientada, é mais abrangente do que a de colaboração, sendo esta noção reservada apenas para certas formas particulares de cooperação, como procurarei ilustrar em seguida.

Wagner propõe um modelo de análise de cooperação directa[22] entre investigadores e profissionais que poderá ser útil para ajudar a compreender e distinguir diferentes modalidades através das quais professores e investigadores se organizam para participarem em projectos de investigação e para, em particular, analisar o significado de investigação colaborativa. Este modelo é constituído por três tipos ideais de investigação educacional cooperativa que o autor designa por "*acordos de extracção de dados*", "*parcerias clínicas*" e "*acordos de co-aprendizagem*". Cada um destes tipos é profundamente influenciado pelo modo como são equacionados os papéis de agente de pesquisa e de objecto de pesquisa.

O acordo de extracção de dados é, segundo Wagner, a forma mais tradicional de investigação educacional cooperativa. Tipicamente, este acordo é estabelecido de modo aos investigadores universitários poderem estudar administradores, professores ou alunos nas escolas em que estes trabalham. A perícia técnica de investigação está nas mãos do investigador e não do profissional. A palavra extracção, que aparece na designação desta forma de cooperação, constitui uma forma de salientar que "os cenários escolares são considerados como recursos donde os investigadores extraem conhecimento para distribuição noutras comunidades e locais" (p. 15).

Diferentemente de um acordo de extracção de dados, a parceria clínica reflecte a intenção de investigadores e profissionais definirem *conjuntamente* o trabalho a realizar e negociarem as questões e problemas em torno das quais a investigação é organizada, de modo a aprofundarem, mutuamente, o seu conhecimento acerca das escolas e práticas educativas. Embora os profissionais permaneçam os objectos da pesquisa, há a compreensão de que, ao trabalharem em conjunto com os investigadores, podem também contribuir para a produção de conhecimento sobre a prática educativa. Wagner refere que uma ampla gama de projectos caracterizados como "investigação-acção colaborativa" se enquadra nesta categoria.

---

[22] Para Wagner (1997) cooperação directa significa "cooperação que se manifesta em trocas, transacções e acordos negociados directamente entre investigadores educacionais individuais e professores ou administradores nas escolas" (p. 14)

Os acordos de co-aprendizagem são, segundo Wagner, mais interactivos do que as parcerias clínicas e reduzem muitas das assimetrias que caracterizam os modos extractivos e clínicos de cooperação. A divisão de trabalho entre investigadores e profissionais é ambígua, pois tanto uns como outros são simultaneamente "considerados agentes de pesquisa *e* objectos de pesquisa" (p. 16). Ambos estão envolvidos na acção e na reflexão e, no processo de trabalho conjunto, cada um pode não só aprender algo mais acerca do mundo do outro, mas também aprofundar a compreensão acerca do seu próprio mundo.

A partir da definição de categorias organizadoras de informação, apresento na tabela 2 uma síntese das principais diferenças e semelhanças entre os três tipos de investigação educacional cooperativa analisados por Wagner.

Os três modos de investigação educacional cooperativa descritos por Wagner constituem tipos ideais de cooperação. O autor salienta que, na prática, os projectos de investigação educacional podem assemelhar-se mais a um ou outro tipo, podendo mesmo existir projectos que incluam elementos dos três tipos de cooperação descritos. Além disso, um mesmo projecto pode ser visto de modos diversos por indivíduos que ocupem posições diferentes nas instituições escolares. Por exemplo, um acordo de co-aprendizagem entre investigadores universitários e professores pode parecer, aos olhos dos alunos destes professores, um acordo de extracção de dados.

O modelo de análise proposto por Wagner poderá ajudar a tomar decisões informadas sobre como cooperar em cada caso e a desenhar e negociar projectos que se ajustem, quer às questões a investigar, quer às necessidades, interesses e expectativas dos participantes. Os três tipos de cooperação, na perspectiva deste autor, podem ser úteis em diferentes contextos, pelo que uma forma de cooperação não pode, à partida, ser categorizada como sempre positiva ou sempre negativa, seja para os investigadores, seja para os profissionais.

Tabela 2: Síntese de Diferenças e Semelhanças entre os Três Tipos de Investigação Educacional Cooperativa Analisados por Wagner

	1- Acordo de extracção de dados	2 - Parceria clínica	3 - Acordo de co-aprendizagem
Questões de investigação	• Focam-se na natureza da educação e da escolaridade. • São da responsabilidade do investigador; não são clarificadas com os participantes na investigação. • As respostas às questões são da responsabilidade do investigador.	• Incluem variações dos temas que caracterizam os acordos de extracção de dados; são acrescentadas questões relacionadas com o processo de trabalho conjunto entre profissionais e investigadores de modo a melhorarem o conhecimento acerca das escolas e práticas educativas. • Reflectem cooperação e negociação entre investigadores e profissionais.	• As colocadas em 1) e 2) e novas questões relacionadas com fenómenos sociais e culturais que não podem ser aí analisadas (Ex: rotinas de trabalho, as instituições dos investigadores; a investigação educacional e problemáticas da sua relação com a educação). • Reflectem cooperação e negociação entre investigadores e profissionais.
Contexto	• Investigador: está fora da escola e envolvido em processos de pesquisa e reflexão. • Práticos: estão dentro da escola e envolvidos na acção.	• Investigador: está fora da escola e envolvido na reflexão. • Práticos: estão dentro da escola e envolvidos na acção e reflexão.	• Reconhece-se que o investigador está fora da escola e o profissional dentro, mas dá-se também atenção ao facto do investigador estar na universidade e o profissional fora. • Ambos os grupos estão envolvidos na acção e reflexão.
Papéis	• Investigadores e profissionais vêem os seus papéis como distintos; a assimetria na compreensão e propósitos da investigação são aceitáveis; • Investigador: agente de pesquisa, pessoa que constrói e relata o conhecimento; na forma idealizada, afirma-se pela sua perícia na investigação, não havendo expectativas de que possa também compreender a prática escolar. • Profissionais: objectos de pesquisa; pessoas cujo trabalho é descrito e objecto de análise e reforma; são valorizados pela sua prática sem haver expectativas de que possam saber algo acerca da investigação.	• Investigadores e profissionais esforçam-se por desenvolver uma compreensão partilhada das suas actividades diferentes mas complementares; a assimetria na compreensão e propósitos da investigação não é tão aceitável como em 1). • Investigador: agente de pesquisa; investigador e também colaborador • Profissionais: objectos e agentes de pesquisa: pessoas cujo trabalho é descrito e analisado; podem envolver-se também na pesquisa prestando, pelo menos assistência aos colegas investigadores; simultaneamente profissionais e colaboradores.	• Há ambiguidade na divisão de trabalho entre profissionais e investigadores; ambos são agentes e objectos de pesquisa;. • Investigador: investigador-profissional na sua instituição. Profissionais: profissional-investigador na sua instituição. • Em geral assimetrias na compreensão e propósitos da investigação não são aceitáveis, como princípio operante, embora possam ser reveladas como um resultado razoável da própria pesquisa colaborativa.
Processo de investigação; exemplos de actividades	• Directo, pesquisa sistemática desenhada, conduzida e relatada pelo investigador; pode, ou não, fazer sentido para os profissionais. • Actividades: negociação do acesso aos participantes na investigação e por vezes, o desenho de actividades de recolha de dados.	• Pesquisa sistemática, cooperativamente desenhada e relatada pelo investigador e profissional. • Actividades: mantêm-se as de 1); clarificação das questões de investigação, desenho e preparação de relatórios de investigação; por vezes, desenho e condução de análise de dados, provimento, com continuidade, de relatórios e balanços e discussão das relações do projecto com a vida institucional e pessoal.	• Reflexivo, pesquisa sistemática, estimulada pela comunicação colegial contínua entre investigadores e profissionais. • Actividades: mantêm-se todas as actividades referidas nas parcerias clínicas, retirando-se o carácter eventual associado a algumas delas.
Conhecimento	• Gerado, através da investigação, pelo investigador; extraído do campo em que é produzido e "transportado" para investigadores e indivíduos que trabalham no topo das hierarquias escolares.	• Pode ser relatado a outros investigadores e responsáveis por políticas educativas, mas também a outros profissionais; o conhecimento gerado por este tipo de investigação representa um recurso para os próprios profissionais.	• Os profissionais e os investigadores podem aprender algo mais acerca do seu próprio mundo. Uma vez que os investigadores e suas instituições são considerados objectos de pesquisa, estas podem também ser alvo de reforma e análise crítica.

No entanto, importa ter em conta que os projectos desenhados no âmbito das diferentes formas de cooperação têm potencialidades e exigências diferentes. Há questões que são mais fáceis de investigar com algumas formas de cooperação do que com outras, além de que, como sublinha Wagner, são as parcerias clínicas e os acordos de co-aprendizagem que oferecem mais possibilidades de mudanças duradouras.

Em suma, a análise das noções de colaboração e investigação colaborativa reforça a ideia de que existem, de facto, muitas perspectivas sobre estas noções o que, naturalmente, pode conduzir a que nem todos os participantes num processo de colaboração partilhem a mesma compreensão sobre seu o significado.

Nalguns casos, trabalhar juntamente com outrem na mesma obra, independentemente de como são estabelecidos os objectivos do trabalho, de quais os papéis a desempenhar e de quem os define, parece bastar para um dado empreendimento ser caracterizado como colaborativo ou cooperativo. No extremo oposto, está quem considere a colaboração como um compromisso assumido por todas as pessoas que colaboram, que requer igualdade na partilha de poder, de autoridade e de responsabilidades em todas as etapas do processo, e exige, mesmo, uma propriedade mútua e autoria partilhada dos resultados do trabalho e produtos produzidos. Neste último caso, se a colaboração envolver professores e investigadores no desenvolvimento de um mesmo projecto de investigação, questiona-se, mesmo, se uma investigação poderá ser designada como colaborativa se apenas a voz do investigador for ouvida no relatório final de investigação (Schroeder & Webb, 1997). Entre estes dois extremos parece haver uma ampla gama de possibilidades.

Apesar desta diversidade de perspectivas, muito do que é descrito como constituindo investigação colaborativa parece ter subjacente a ideia de que é fundamental a investigação ser desenvolvida *com* pessoas, em oposição a sobre pessoas, enquadrando-se nos tipos de cooperação directa que Wagner designa por parcerias clínicas e acordos de co-aprendizagem. Aliás, este autor apenas utiliza, explicitamente, a palavra colaboração ou seus derivados, na descrição destas duas modalidades, encontrando-se estes termos completamente ausentes em tudo o que se relaciona com os acordos de extracção de dados.

Neste âmbito, a distinção entre colaboração e cooperação indicada por Day (1999), bem como a síntese apresentada por Reason (1988b) a propósito do significado de "pesquisa cooperativa", parecem constituir um bom contributo para ilustrar o significado que atribuirei no presente estudo a investigação colaborativa.

Day (1999) salienta que Sachs, ao escrever sobre parcerias entre escolas e universidades, refere que enquanto que na cooperação as relações de poder e os papéis dos membros das escolas e das universidades são mantidos e não questionados, a colaboração envolve negociação cuidadosa, tomada conjunta de decisões e comunicação efectiva. Na colaboração "ambas as partes são aprendizes num empreendimento que se foca na promoção do diálogo profissional" (p. 186). Para Reason,

> no mínimo, para que uma estratégia de investigação reivindique o termo pesquisa cooperativa, argumentarei que a natureza do envolvimento de todos os participantes deve ser abertamente negociada, que todos devem contribuir para o pensamento criativo que é parte da investigação, e que as relações devem aspirar a ser autenticamente colaborativas. (1988b, p. 9)

Admitir a distinção apresentada por Day e a síntese proposta por Reason se, por um lado, significa considerar, seguindo John-Steiner et al., (1998), que perspectivas partilhadas, construção de novo conhecimento e trabalho conjunto são factores significativos na colaboração, por outro lado, não significa aderir à ideia de que numa investigação colaborativa bem sucedida, todas as partes devem participar em todas as fases do processo de investigação. De facto, esta partilha do trabalho de investigação e a modelação do papel do professor à luz dos papéis do investigador, não só acrescentam mais trabalho às já ocupadas vidas e responsabilidades dos professores — pois raramente os investigadores partilham o ensino — mas, implicitamente, ao privilegiarem o trabalho de investigação, desvalorizam também o trabalho dos professores (Clark et al., 1996).

Em lugar disso, considero que entre professores e investigadores há diferenças complementares de competências, formações, experiências e perspectivas, que são um recurso para o trabalho colaborativo e, por isso, devem ser consideradas no desenvolvimento deste trabalho para ele poder trazer vantagens para todos. Antes de mais, como John-Steiner, et al. (1998) bem salientam, a colaboração é “uma oportunidade para tirar partido da complementaridade” (p. 780). Ela é “bem sucedida quando são ultrapassadas as diferenças de estatuto no interior do grupo e os benefícios da complementaridade governam o processo” (idem).

Relação de colaboração

São diversos os autores que se têm debruçado sobre a natureza das relações de trabalho em ambientes de colaboração e sobre factores que influenciam de modo crítico os processos de colaboração, procurando, nalguns casos, analisar princípios centrais a estes processos.

Focando-se nos professores, Hargreaves (1998a) destaca que as culturas de colaboração entre colegas tendem a ser espontâneas, voluntárias, difundidas no espaço e no tempo, imprevisíveis e orientadas para o desenvolvimento de iniciativas próprias, ou não, em que os participantes estão empenhados, mesmo se externamente requeridas. Ou seja, as referidas relações, embora podendo ser apoiadas e facilitadas administrativamente, não são externamente coagidas; evoluem a partir da própria comunidade docente e são sustentadas por ela; constroem-se, predominantemente, em encontros informais, e não em espaços e tempos fixos administrativamente determinados; orientam-se para implementar propósitos próprios e não objectivos de outros; e originam resultados muitas vezes incertos e dificilmente previsíveis.

Muitas das considerações tecidas por Hargreaves parecem não ser inconsistentes com os seis factores críticos da colaboração referidos por Stewart (1997) a partir de trabalhos de Grey. Estes factores indiciam que a colaboração é um processo emergente, permeado de negociações, onde é importante os participantes irem para lá de estereótipos de modo a poderem repensar as suas perspectivas acerca uns dos outros. Este processo implica interdependência e um contínuo dar e receber, requer a tomada conjunta de decisões, envolve uma responsabilização colectiva pelas direcções a prosseguir e nele as soluções emergem através de um modo construtivo de lidar com as diferenças. Estes factores transparecem, segundo Stewart, no conjunto de princípios centrais da colaboração sintetizados a partir de metáforas usadas por participantes em investigações colaborativas. Estes princípios, apresentados em seguida, "tendem a entrelaçar-se, na medida em que operam intimamente em conjunto nos complexos processos de colaboração" (p. 36):

a) "A colaboração não é um fim em si mesmo, nem um acontecimento estático nem mesmo um percurso formalizado para alcançar um objectivo específico. É antes um processo criativo contínuo que envolve a construção de um resultado, sempre em evolução, no interior de uma matriz sempre em mutação" (p. 36).

b) "A mudança contínua é essencial na colaboração; a própria mudança pode ser um catalisador na construção de novo conhecimento, novos padrões, novos objectivos" (p. 38).

c) "A diversidade pode ser fortalecedora se vista positivamente e usada construtivamente. As diferenças internas podem ser construtivas e produtivas; podem clarificar modos diferentes de ver e de viver que são libertadores. Tensões e diversidade internas podem ser mesmo essenciais para a qualidade e integridade do todo" (p. 41).

d) "Na colaboração, processos como conversar e narrar, tradicionalmente pensados como improdutivos, são considerados trabalho significativo e construtivo" (p. 43).

e) "A confiança e o compromisso tornam-se factores poderosamente construtivos pois a colaboração abre os participantes à vulnerabilidade e a potenciais pressões de mudança profunda" (p. 45).

f) "Um factor central fortalecedor na colaboração é a valorização da contribuição de cada participante. Co-laborar sugere uma mudança de padrões verticais de liderança e poder para padrões horizontais de liderança partilhada e relações simbióticas apoiantes" (p. 48).

A análise dos princípios a), b), c), d) e f) permite destacar que a colaboração é um processo dinâmico e criativo em que os participantes se envolvem por vontade própria, e não por obediência a uma obrigatoriedade proveniente do exterior, e em que objectivos, papéis e responsabilidades estão em permanente reconstrução. Neste processo, em que é fundamental a aceitação das diferenças individuais e a valorização da participação de cada um, a diversidade é um factor de enriquecimento se considerada de uma forma construtiva e positiva. No trabalho conjunto que a colaboração implica, conversar/dialogar e narrar as próprias histórias são processos considerados fundamentais, pois podem permitir ampliar perspectivas individuais e colectivas, negociar diferentes posições e encontrar um novo sentido nas experiências vividas.

Considerar a conversação (*conversation/talk*) e a negociação componentes autênticas da colaboração, conduz à necessidade de uma mudança nos padrões tradicionais de trabalho e de interacção usuais, o que torna os participantes num processo colaborativo particularmente vulneráveis. Neste âmbito, e tal como é ilustrado pelo princípio e), a aprendizagem de novas relações baseadas na confiança e confidencialidade e o compromisso com uma aspiração comum, onde se inclui a prossecução de objectivos tanto individuais como colectivos, são factores poderosamente construtivos. Deste modo, a comunidade constituída pelos indivíduos que participam num projecto de colaboração poderá tornar-se uma "comunidade que cuida" (Stewart, 1997, p. *47*). Esta ideia é consistente com uma outra referida por Christiansen et al. (1997b) para quem a "verdadeira colaboração ocorre num clima de cuidado" (p. 283) que se manifesta quer a nível pessoal quer profissional. Procurando ilustrar o significado de "cuidar", Schroeder e Webb (1997) indicam que na investigação o "cuidar dos professores pode começar por perguntar: Porque é que os professores se deverão envolver e que benefícios lhe trará a investigação?" (p. 244).

Os factores e princípios referidos por Stewart, as características das relações de trabalho nas culturas de colaboração indicadas por Hargreaves e as potencialidades de uma colaboração bem sucedida enunciadas por este autor, encontram eco em ideias de muitos outros que se debruçam sobre a colaboração e investigações colaborativas no contexto educativo. Um destes autores, Friesen (1997), a partir da análise do seu envolvimento em projectos de colaboração com professores e futuros professores, destacou três metáforas que, na sua perspectiva, constituem uma nova linguagem sobre colaboração que serve para recordar o tipo de relações que importa desenvolver entre todos os parceiros colaborantes.

A primeira metáfora, *colaboração como "jogo"*, remete para a importância do envolvimento de todos na compreensão de um fenómeno, para as oportunidades de mútua aprendizagem que daí decorrem e para o compromisso conjunto de atingirem um objectivo partilhado. A segunda metáfora, *colaboração como "conversação"*, indicia reciprocidade, e não prescrição, e permite destacar que a colaboração implica uma forma de interacção que é dialógica e não hierárquica. Segundo Friesen, esta metáfora, quando aplicada a campos de experiências, "sugere a possibilidade de estabelecer relações dialógicas que resistem ao controlo de qualquer um dos participantes e resultam em aprendizagem mútua" (p. 225). A terceira metáfora, *colaboração como "luta"*, chama a atenção para que encontrar sentido no ensino, e não simplesmente implementar estratégias de ensino, é um empreendimento difícil que pode envolver muitas frustrações. Partilhar esta luta numa comunidade de aprendizagem ajuda a criar relações que são menos hierárquicas e mais democráticas.

As ideias anteriormente apresentadas indiciam que a confiança, o diálogo/conversação e a negociação são factores de particular relevância na construção de relações de colaboração. Analiso, assim, um pouco mais em profundidade, o que sobre eles salientam alguns autores.

O truísmo da confiança

São inúmeros os autores para quem o desenvolvimento da confiança é essencial à criação de relações de trabalho em colaboração que sejam eficazes e significativas: o truísmo da confiança é um tema "que atravessa toda a bibliografia sobre liderança partilhada e culturas de colaboração" (Hargreaves, 1998a, p. 284). Entre os muitos autores para quem a confiança é "o primeiro passo para a colaboração" (Goulet & Aubichon, 1997, p. 118) estão, por exemplo, Blond e Webb (1997), Christiansen et al. (1997b), Drake e Basaraba (1997) e Goulet e Aubichon (1997).

Para Blond e Webb numa investigação colaborativa "conhecer a pessoa é crucial" (p. 96) e a confiança é fundamental para os participantes se sentirem confortáveis a questionar publicamente ideias e valores uns dos outros. Drake e Basaraba destacam que o cuidar uma da outra foi o princípio central que guiou a sua colaboração, incluindo no "cuidar" a confiança, o compromisso e o respeito. Por seu turno, Christiansen et al. salientam que é num clima de respeito e cuidado que a confiança, essencial nos projectos de colaboração, se pode desenvolver: confiança em si próprio a partir do encorajamento de outros, confiança nos outros, para se poder falar honesta e livremente, confiança em que o trabalho e ideias de cada um são recebidos abertamente e tratados com respeito. Para estas autoras, aspectos fundamentais num processo de colaboração são a participação voluntária, a escuta atenta do que o outro tem para dizer, a valorização das suas contribuições e o desenvolvimento de um sentido de pertença ao grupo.

A importância da conversação

Tal como acontece com a confiança, também a importância da conversação nos processos de colaboração é frequentemente afirmada, seja ela escrita ou oral. Este facto não é de estranhar. Com efeito, se admitirmos, seguindo, por exemplo, Olson (1997) e Reason (1988b, 1988c, 1994), que o desenvolvimento de investigações colaborativas requer, relativamente ao tradicional paradigma positivista, um novo posicionamento epistemológico que vai no sentido de perspectivar o conhecimento como pessoal e socialmente construído, de admitir a possibilidade de múltiplos modos de conhecer, de valorizar formas de conhecimento construídas na prática e de reconhecer o valor da experiência na construção de conhecimento, então conhecer, colaborar e comunicar tornam-se processos intrinsecamente interligados: "As relações colaborativas têm também a forma de conversações" (Olson, 1997, p. 21).

Se, por um lado, é fundamental a aceitação da voz pessoal como foco da experiência que se narra ou das ideias que se apresentam, por outro lado, o que se conhece não é enunciado num sentido definitivo: "Numa conversação autêntica há uma abertura à pesquisa" (Olson, 1997, p. 21). Uma ideia pode ser rejeitada após um exame cuidado e honesto e uma análise aberta da perspectiva a partir da qual foi oferecida. À medida que uma voz se mistura com outras, enriquece-se a compreensão, e a conversação torna-se conversação informada: "informada pelo conhecimento de si próprio e dos outros, e pelo conhecimento da teoria e prática" (Christiansen et al., 1997b, p. 285).

A conversação funciona como "mediadora entre a experiência e o significado" (Christiansen et al., 1997b, p. 285). É através dela, seja connosco próprios ou com os outros, que descrevemos as nossas experiências, tornando possível a sua análise, que as clarificamos, que partilhamos o sentido que lhes atribuímos, que ouvimos — observando diferenças e semelhanças — perspectivas e experiências que não as nossas, que podem acordar em nós novos modos de compreender a nossa própria experiência e permitir-nos reconstruir conhecimento passado e imaginar possibilidades futuras.

Para uma conversação constituir, de facto, uma oportunidade de pesquisa, torna-se essencial haver um sentido de igualdade entre todos os participantes, de modo a cada um poder sentir-se livre para enunciar pontos de vista subjectivos e arriscar-se a tornar públicas perspectivas privadas: "É a pessoa que deve ser valorizada, e não o seu conhecimento ou estatuto" (Olson, 1997, p.21).

A construção de significados através de conversações colaborativas exige, assim, a criação de espaços de segurança onde possam emergir pontos de vista pessoais, sem que ninguém se sinta ameaçado, e em que possam ocorrer as transacções necessárias ao entendimento de diferentes modos de ver e conhecer:

> Quando construímos significado através de conversação colaborativa, o ponto de referência existe na transacção, o espaço entre os indivíduos envolvidos. Isto é um "terreno intermédio"[23] (Clandinin, Davies, Hogan, & Kennard, 1993) que necessita ser um espaço seguro de modo a que as pessoas envolvidas se arrisquem a tornar o seu conhecimento narrativo público. Este terreno intermédio não é possível na história sagrada da certeza, previsão e controlo em que o conhecimento (e, consequentemente, as pessoas que o têm) está hierarquicamente estruturado. O terreno intermédio é um espaço colaborativo em que cada indivíduo luta por articular e pesquisar o seu conhecimento de situações educativas (...) Este terreno intermédio necessita ser um espaço seguro não no sentido de um espaço em que o consenso e o acordo são possíveis, mas no sentido de um espaço tanto para arriscar enunciar visões pessoais como para ouvir visões divergentes, perspectivas alternativas, e versões não autorizadas. (Olson, 1997, p. 23)

Só que a criação e manutenção de espaços seguros em que as pessoas partilhem diversos modos de ver e conhecer não é uma tarefa fácil. As tentativas para uma voz ser ouvida e compreendida conduzem a que ela seja modelada tendo em conta aqueles que a ouvem. Tal como Bakthin (1999) e Wertsch (1991) salientam, uma elocução reflecte tanto a voz de quem a produz como as vozes daqueles a quem é dirigida: "A voz do destinatário está também envolvida na cadeia discursiva" (Wertsch, 1991, p. 53). Com muita frequência quando as relações entre quem fala e quem ouve são determinadas por hierarquias estabelecidas, há uma espécie de "acústica relacional" que apenas deixa emergir o que é aceite como certo e possível numa determinada comunidade. Como Olson (1997) bem destaca, "muitos factores silenciam o nosso conhecimento na medida em que tentamos modelarmo-nos a nós próprios segundo os *cânones* e versões autorizadas que nos sentimos obrigados a contar" (p. 23).

---

[23] *Terreno intermédio* é a tradução adoptada para a expressão *middle ground*.

Envolvimento negociado

Kozolanka e Horwood (1997), apoiando-se nos trabalhos de Lave e Wenger (1991), referem que, embora uma concepção popular sobre o que constitui uma acção colaborativa se baseie na premissa de que aqueles que colaboram contribuem, se não igualmente, pelo menos de modos equitativos para a colaboração, agir colaborativamente não significa a necessidade de contribuir de modo igual, podendo haver colaborações assimétricas que conduzem a aprendizagens poderosas. Fiorentini (2004), chama, no entanto, a atenção para o facto de nem todas as comunidades de prática, no sentido de Lave e Wenger (1991), poderem ser designadas por grupos colaborativos:

> Uma comunidade de prática, tal como foi concebida por Lave e Wenger (1991), não se configura necessariamente como um grupo colaborativo: A diferença básica reside no facto de que todos o integrantes de um grupo colaborativo assumem um mínimo de protagonismo no grupo, não se reduzindo a meros auxiliares ou fornecedores de dados e materiais, mas como sujeitos que não apenas aprendem, mas produzem conhecimentos e ensinam os outros. (p. 61)

Tendo por referência o projecto de investigação colaborativa desenvolvido, Ponte et al. (2003) indicam que todos trouxeram para o grupo o seu conhecimento e experiência e, em conjunto, construíram algo que não conseguiriam alcançar se somassem os conhecimentos e experiências individuais. Porque a colaboração envolve tempo e energia consideráveis, todos devem sentir que há vantagens no seu envolvimento no projecto de colaboração, o que implica uma compreensão recíproca das necessidades e perspectivas de todos (Kapuscinski, 1997). Importante é que todos partam sentindo que aprenderam algo com o outro:

> Cada um virá com os seus próprios objectivos, propósitos, necessidades, compreensões e através do processo de partilha, cada um partirá tendo aprendido a partir do outro. Cada um aprenderá mais acerca de si próprio, mais acerca do outro, e mais acerca do tópico em questão. (Olson, 1997, p. 25)

Apoiando-se na sua experiência, Blond e Webb (1997), salientam que a colaboração requer não um igual envolvimento em todos os aspectos da investigação, mas antes um envolvimento negociado e mutuamente acordado. Por seu turno, Christiansen et al. (1997b), salientam "que a chave para uma colaboração bem sucedida é uma negociação aberta da partilha de poder e expectativas relativamente ao papel de cada um dos participantes, à medida que um projecto se desenvolve" (p. 285). No seu caso, as tomadas de decisão foram conseguidas através de "uma conversação informada em vez da imposição de um ponto de vista particular" (p. 288).

A negociação surge, assim, como um dos factores chave da colaboração (Goulet & Aubichon, 1997). Ao analisarem as qualidades das negociações existentes num projecto de colaboração que desenvolveram, Hookey, Neal, e Donoahue (1997) referem que elas foram *recursivas*, pois certas questões estavam permanentemente no centro das suas discussões, *assimétricas*, ilustrando diferentes tipos e níveis de investimento de cada um dos participantes consoante o tópico em discussão e a etapa do processo, *não apressadas* e revelaram "*a natureza consultiva da relação*" (p. 78). Este último aspecto foi considerado, pelas autoras, como sendo o mais interessante.

Sendo a interacção social uma componente fundamental dos processos colaborativos, não é de estranhar que neles surjam conflitos. Em si mesmos, os conflitos não são, necessariamente, um factor negativo: são "as tensões que emergem nas relações colaborativas o que conserva estas relações vivas e dinâmicas" (Olson, 1997, p. 25). No entanto, para os conflitos não se transformarem em obstáculos impeditivos de uma colaboração efectiva, é fundamental que, desde o início, se negoceie honesta e abertamente o processo de funcionamento do grupo (Christiansen et al., 1997b). Um outro aspecto fundamental é o estar aberto a diferentes possibilidades. É esta abertura, e não a obtenção de acordos e consensos que nem sempre são fácil ou necessariamente atingidos— tanto mais que "o consenso não é o objectivo da colaboração" (Stewart, 1997, p. 43) — que fortalece cada colaborador, permitindo um reforço do conhecimento pessoal, interpessoal e profissional (Olson, 1997). A par da confiança e da negociação, a honestidade surge, assim, como um dos elementos chave na colaboração. "Sem honestidade não pode haver verdadeira colaboração" (Christiansen et al., 1997b, p. 286).

Em suma, num grupo colaborativo o que parece ser importante é existir um "trabalhar com" que seja mutuamente benéfico para todos e as responsabilidades, papéis e níveis de compromisso de cada um serem negociados abertamente e, se necessário, renegociados ao longo do processo de colaboração. Esta negociação não tem que, necessariamente, conduzir a uma igualdade na partilha de responsabilidades e papéis. Importante é também os processos de desenvolvimento do trabalho colaborativo serem ajustados às experiências e expectativas de todos, todos sentirem-se confortáveis nos papéis a desempenhar e não serem marginalizadas as necessidades de cada um: cada membro é responsável perante o grupo e o grupo tem responsabilidades em relação a cada membro (Christiansen et al., 1997b). Importante, ainda, é a criação de uma atmosfera de confiança e transparência, essencial para se poder falar honesta e abertamente e para lidar com conflitos que, eventualmente, surjam. Tudo isto requer tempo, mas o processo não pode ser acelerado: "a colaboração parece necessitar uma contínua recriação através da negociação para manter a estabilidade durante o crescimento individual e a construção social de conhecimento" (Christiansen et al., 1997b, p. 287).

Desenvolvimento de investigações colaborativas

Ter em conta a natureza das relações a privilegiar entre as pessoas envolvidas num empreendimento colaborativo e considerar a importância de tirar partido da diversidade dos seus saberes e experiências de modo ao trabalho desenvolvido trazer mais-valias para todos, conduz a não poderem ser transferidos acriticamente para investigações colaborativas, papéis, práticas e perspectivas considerados aceitáveis ou indesejáveis noutros tipos de investigação. Não é, assim, de estranhar que para diversos autores o desenvolvimento de investigações colaborativas requeira mudanças na epistemologia que está, implicitamente, presente em muitos dos actuais contextos sociais, instituições e práticas educativas. Centro-me, em primeiro lugar, nestas mudanças, e na segunda secção abordo possíveis vias de iniciar e desenvolver investigações colaborativas.

Questões epistemológicas

Se bem que na tradição positivista a noção de epistemologia esteja muito associada a uma reflexão normativa sobre a ciência preocupada em encontrar critérios que a permitam demarcar da não-ciência, com Popper e Kuhn há um distanciamento desta tradição procurando-se, para a noção de epistemologia, concepções capazes de dar conta da prática científica real. É neste contexto que se assiste desde a década de 60 a uma abertura do campo tradicional da epistemologia procurando-se que este se abra a "diferentes 'objectos epistémicos', especialmente o estudo dos saberes quotidianos, do senso comum, dos jogos de linguagem e dos sistemas de acção através dos quais a realidade social e individual é constituída" (Tardif, 2002, p. 255). O conhecimento dos profissionais, incluindo aqui os professores, faz parte destes objectos epistémicos.

É no âmbito desta concepção de epistemologia que importa reflectir sobre a questão das mudanças epistemológicas associadas à investigação colaborativa. Blond e Webb (1997), Reason (1988b, 1988c, 1988a) e Olson (1997) são alguns dos autores que defendem a necessidade destas mudanças. Estes dois últimos autores defendem que o paradigma positivista herdado de Bacon e Newton cria fortes dificuldades ao desenvolvimento de investigações colaborativas. Para Reason o "paradigma de pesquisa cooperativa" (1988b, p. 9) ou o "paradigma colaborativo" (1988c, p. 18) constitui um "genuíno novo paradigma para a investigação humana" (Reason, 1988b, p. 9) em que a velha visão do mundo, herdada do positivismo, é "descartada à medida que nos vamos movendo para um universo mais participativo" (idem, p. 13).

Se aceitarmos a perspectiva de Reason, importa recordar o pensamento de Kuhn (1970) e ter em conta que não é possível julgar à luz de critérios do paradigma positivista o conhecimento produzido no âmbito de outro que com ele seja incomensurável. Olson (1997) aborda esta questão num artigo intitulado *Collaboration: An epistemological shift*, onde após constatar a existência do que indica serem duas histórias sagradas[24] sobre a origem, natureza e limites do conhecimento, analisa estas duas versões epistemológicas que designa por *getting an education* (p. 14) e *becoming more experienced* (p. 18). Segundo esta autora, estas duas versões conflituais sobre o conhecimento humano, criam tensões e possibilidades para que as relações de colaboração se possam desenvolver. Cada uma tem implicações diferentes sobre os métodos e processos adoptados para produzir conhecimento, sobre o que se crê ser conhecimento válido e sobre as relações consideradas desejáveis entre o objecto do conhecimento e o sujeito que procura conhecer.

A primeira versão epistemológica, *getting an education*, é uma herança da tradição positivista, com a sua crença na existência de verdades objectivas sobre a realidade. Nesta versão, o conhecimento é abstraído da experiência, sendo visto como algo "despersonalizado, certo, recebido e acumulado" (Olson, 1997, p. 14). Crê-se que o conhecimento obtido através do objectivismo racional é superior ao obtido pela experiência pessoal, pelo que a negação das contingências contextuais da experiência e opinião pessoais e a confiança na certeza da razão cognitiva, são considerados essenciais à obtenção de conhecimento certo.

Nesta versão epistemológica, quando se considera conhecer *a* verdade acerca de como as coisas são, parece ser possível prever, controlar e prescrever, com certeza, modos correctos de implementar práticas. Assim, o conhecimento já construído por alguns, nomeadamente por professores da universidade, é "passado" a outros, nomeadamente professores do ensino não superior, para estes o usarem na sua prática. É esta visão sobre o conhecimento que está subjacente à valorização da racionalidade técnica (Pérez, 1992; Schön, 1991) enquanto modelo de formação profissional, incluindo aqui a formação de professores.

A manutenção de um posicionamento epistemológico baseado na hipótese de que há uma só verdade, exterior ao sujeito, que pode ser descoberta e verificada,

[24] *Histórias sagradas* foi a tradução que adoptei para *sacred stories*. Aqui a palavra sagrada deve ser entendida no sentido de algo que é demasiado importante para ser alterado.

torna difícil o estabelecimento de relações de investigação colaborativa (Schroeder & Webb, 1997). É a hegemonia implícita da versão *getting an education* que, muito frequentemente, modela a forma como devem ser vividas as relações entre professores e investigadores, interfere no seu caminho quando se esforçam por possibilitar a emergência de relações de colaboração e enfraquece as possibilidades de uma colaboração genuína, pois a voz de quem se considera ter o conhecimento prevalece sobre as outras (Olson, 1997).

De facto, sendo, nesta versão, o conhecimento concebido como hierarquicamente estruturado, formulando-se as questões de modo a obter respostas certas e vendo-se a surpresa, o incerto e o inesperado como resultado de não se possuir conhecimento suficiente para prever e controlar, com êxito, os acontecimentos que ocorrem na prática, perspectiva-se que os docentes universitários sabem mais do que os professores do ensino não superior, que estes sabem mais e melhor do que os seus alunos e que os futuros professores parecem saber mesmo muito pouco. Se uma investigação for conduzida, por exemplo, com professores, os investigadores parecem saber mais do que eles e "as interpretações dos investigadores dominam" (Olson, 1997, p. 18).

Ora a investigação colaborativa admite a possibilidade de verdades múltiplas (Schroeder & Webb, 1997). Para uma colaboração funcionar com êxito, os participantes devem ver-se uns aos outros como alguém que possui conhecimento e cujas ideias merecem ser ouvidas. Nesta medida, todos poderão aprender, enriquecendo, cada um, o conhecimento a usar na sua própria prática, seja esta prática de ensino ou de investigação.

Além disso, aceitar que a investigação colaborativa constitui uma abordagem à investigação educativa que tem subjacente a ideia de que é fundamental fazer investigação *com* os participantes e não *sobre* os participantes, conduz a considerar os professores parceiros de pesquisa em questões relacionadas com a sua prática, e não objectos de investigação relativamente aos quais importa manter as distâncias e cujas interpretações são desvalorizadas, ou nem sequer consideradas, no processo de produção de conhecimento sobre o ensino. Como Bednarz et al. (1999) salientam, "os investigadores colaborativos tentarão, assim, fazer investigação "com" os profissionais (em vez de 'sobre' eles) e integrarão, consequentemente, estes pontos de vista dos professores na investigação do objecto de pesquisa" (p. 3).

Assim sendo, o desenvolvimento de investigações colaborativas torna necessária "uma monumental mudança na versão tradicional da epistemologia que é implicitamente vivida nos actuais contextos sociais das instituições educativas" (Olson, 1997, p. 13) de modo a que ocorra "uma mudança epistemológica que valorize as formas de conhecimento construídas na prática" (idem, p. 18).

O paradigma colaborativo proposto por Reason (1988b; 1988c) e a segunda versão epistemológica sobre o conhecimento referida por Olson (1997) — *becoming more experienced* — parecem ser um dos modos de caminhar no sentido desta mudança. Este paradigma constitui, segundo Reason, um paradigma emergente para a investigação humana que oferece, a partir das suas metodologias de pesquisa, um modo de pôr em prática de investigação a emergente filosofia pós-positivista ou pós-moderna.

Na mudança paradigmática requerida pelo paradigma colaborativo estão envolvidas, segundo Reason (1988b), três alterações principais inter-relacionadas que parecem ser consistentes com a segunda versão epistemológica sobre o conhecimento referida por Olson. Estas alterações vão no sentido de (a) um processo de conhecer (*knowing)* participativo e holístico, (b) uma subjectividade crítica e (c) um conhecimento na acção.

A primeira alteração — um processo de conhecer participativo e holístico — é orientada de modo a perspectivar o conhecimento como baseando-se numa "relação participativa e dialógica com o mundo" (Reason, 1988b, p. 10). Relaciona-se com a substituição da "metáfora mecânica" (idem) característica da ciência positivista — com a sua ênfase no atomismo e num mundo regulado por relações de causa e efeito que podem ser manipuladas e exploradas — por uma nova visão do mundo baseada na totalidade e evolução.

A noção de totalidade, inerente a esta visão pós-moderna do mundo, permite destacar dois aspectos chave associados ao paradigma colaborativo: a importância da participação e da experiência. Quanto ao primeiro aspecto, Reason destaca que se a noção de totalidade significa que num todo todas as partes estão ligadas, que cada uma é parte do todo e que participa nesse todo, então a participação é um aspecto implícito da totalidade. E tal "como a totalidade implica participação, também a participação significa empatia (…) e empatia implica responsabilidade" (Reason, 1988b, p. 10). Assim, no paradigma colaborativo torna-se fundamental construir relações de autêntica colaboração e diálogo em que, idealmente, cada um cuida do outro procurando evitar "hierarquias desnecessárias e controlos compulsivos" (p. 11). Quanto ao segundo aspecto — a importância da experiência — cuja importância deriva também da ênfase na totalidade, Reason sublinha que, no âmbito do paradigma colaborativo, os investigadores não estão interessados nem em conhecimento fragmentado, nem em conhecimento teórico desligado da prática e da experiência. Esta perspectiva deriva de considerarem que os aspectos de um fenómeno só podem ser compreendidos, em profundidade, se forem conhecidos no contexto da sua participação no sistema total, "e não como as variáveis dependentes e independentes isoladas da ciência experimental" (p. 11).

A segunda alteração relacionada com a emergência do paradigma colaborativo, prende-se com a "mudança de uma consciência objectiva para uma qualidade que (…) [Reason designa] por subjectividade crítica" (1988b, p. 11). Esta noção remete para a necessidade de ir para lá da divisão clássica entre objectividade e subjectividade e desenvolver uma consciência crítica e integradora que possibilite que o investigador use no processo de pesquisa a sua experiência subjectiva, mas sem se deixar obscurecer por ela. Nas palavras de Reason,

> a subjectividade crítica é uma qualidade de consciência em que não suprimimos a nossa experiência subjectiva primária; nem permitimos a nós próprios sermos dominados ou arrastados por ela; em vez disso, tornamo-la consciente e o seu uso é parte do processo de pesquisa. (Reason, 1988b, p. 12)

A terceira alteração referida por Reason — um conhecimento na acção — relaciona-se com a importância atribuída ao conhecimento prático considerado primário relativamente ao teórico. A própria expressão escolhida pelo autor para designar esta terceira alteração ilustra bem esta ideia. Esta alteração vai no sentido de perspectivar o conhecimento como sendo “formado na e para a acção em vez de na e para a reflexão” (p. 12). Isto não significa que a reflexão não seja importante nos processos de produção de conhecimento: “a pesquisa cooperativa (…) envolve uma iteração rigorosa entre acção no mundo e reflexão” (Reason, 1988c, p. 26).

Embora o conjunto das três alterações constitua uma mudança paradigmática na perspectiva de Reason (1988b), os ideais do conhecimento público e crítico associados à “perspectiva científica antiga” (p. 13) são conservados. O movimento referido pode ser visto, segundo o autor, como uma síntese em que, apesar de muito ser negado e eliminado, há aspectos significativos da ciência ortodoxa que são retidos e reintegrados:

> A noção de subjectividade crítica significa que somos mais exigentes que a ciência ortodoxa, insistindo que a pesquisa válida se baseia num grau muito elevado de auto-conhecimento, auto-reflexão, e criticismo cooperativo. A boa pesquisa cooperativa é ao mesmo tempo sinceramente comprometida e intensamente auto-crítica. (Reason, 1988b, p. 13)

Como anteriormente referi, as três alterações que Reason considera estarem envolvidas na mudança paradigmática requerida pelo paradigma colaborativo, parecem ser consistentes com a caracterização apresentada por Olson (1997) para a versão epistemológica sobre o conhecimento designada por *becoming more experienced*.

De facto, contrariamente ao que acontece em *getting an education*, a versão epistemológica herdada do positivismo, em *becoming more experienced* não se procura a certeza e o objectivismo racional e descontextualizado, nem se considera ser possível nem desejável eliminar a imprevisibilidade das situações educativas e controlar todos os seus aspectos. Em lugar disso, considera-se que é através da experiência que o conhecimento é permanentemente construído e reconstruído e reconhece-se, aderindo neste campo ao pensamento de Bruner (1997), que os aspectos inesperados da experiência e o encontro com a surpresa proporcionam novas oportunidades de aprendizagem. Esta perspectiva vai ao encontro da primeira alteração referida por Reason: um processo de conhecer participativo e holístico.

Em *becoming more experienced,* o conhecimento é perspectivado como sendo incorporado (*embodied*), obtido por tentativas, pessoal e socialmente construído e reconstruído através de transacções com o ambiente social e natural. É através da interacção que o significado é continuamente reconstruído, pois novas interacções conduzem a uma maior compreensão. Nesta versão "todos somos conhecedores que conhecem o mundo de diferentes maneiras" (Olson, 1997, p. 31), pelo que são possíveis inúmeras formas de conhecer. Por exemplo, investigadores educacionais, professores e futuros professores expressam diferentes versões da experiência educativa, consideram relevantes diferentes questões e preocupam-se com diferentes problemas da prática. Esta perspectiva sobre o conhecimento parece ser compatível com a importância que Reason atribui à acção e à subjectividade crítica nos processos de pesquisa e construção de conhecimento quando caracteriza a segunda e terceira alterações associadas ao paradigma colaborativo.

Para Olson (1997) "a epistemologia experiencial da prática tem uma forma narrativa" (p. 18), ou seja, a prática, quer de professores quer de investigadores, toma a forma de histórias e não de teorias. São estas histórias que "narradas através de um processo colaborativo" (idem, p. 19) possibilitam a construção e reconstrução do conhecimento, podendo as teorias ser usadas para as informar mas não para as enfraquecer ou silenciar: "a construção e reconstrução do conhecimento narrativo é a antítese da certeza" (idem, p. 20).

Considerando-se que todas as pessoas são pessoas conhecedoras cujas ideias merecem ser ouvidas e tornando-se, assim, possível aprender tanto a partir das nossas próprias experiências como a partir das experiências dos outros, é na versão epistemológica *becoming more experienced* que, para Olson, a colaboração é possível.

Esta ideia pode ser ilustrada, em particular, a partir da análise do relato de um trabalho de investigação colaborativa desenvolvido por Blond e Webb (1997) no qual criticam pretensões de obtenção de conhecimento sobre o ensino a partir de investigação que não inclua as vozes e significados dos professores. As conclusões deste estudo vão no sentido de questionar perspectivas sobre o conhecimento baseadas na ideia de que existe uma única verdade respeitante aos resultados da investigação e uma interpretação da objectividade do investigador como sendo obtida a partir de um posicionamento impessoal e não envolvido. As histórias da prática relatadas pela professora e investigadora, autoras do relato, revelam que o conhecimento construído através do seu trabalho conjunto foi influenciado pela relação de investigação que estabeleceram entre si e pela partilha de responsabilidades no e para o estudo.

Em suma, a possibilidade de uma colaboração genuína parece envolver um posicionamento epistemológico diferente daquele que põe a ênfase na existência de verdades únicas e objectivas sobre a realidade a partir da qual podem ser abstraídas, ou seja, de *getting an education* na designação de Olson. Na base de relações de colaboração estão diversos modos de conhecer. É fundamental, não apenas o reconhecimento destes diferentes modos, mas a possibilidade de dar voz e de escutar diferentes perspectivas, mesmo quando estas expressam versões diferentes, sem procurar impor uma delas como sendo a única que importa.

Conseguir a concretização destas ideias é particularmente difícil sobretudo quando ainda prevalece a hegemonia de relações hierárquicas no contexto do conhecimento profissional e quando se constata que nem todos os modos de conhecer são igualmente valorizados. Não nos podemos esquecer que, tradicionalmente, estabelecem-se entre as instituições educativas diferentes hierarquias que vão no sentido de considerar a existência de grupos com poderes, estatutos e conhecimento diferenciados, o que conduz à emergência natural de desconfianças quando se juntam educadores destes diferentes grupos, frequentemente percebidos como desiguais (Stewart, 1997). A colaboração bem sucedida requer, também, "que cada participante aceite como parte da sua tarefa o desafio de explorar as barreiras que, no modelo de investigação tradicional, impedem a partilha de poder, autoridade e voz" (idem, p. 49), pois essencial "para o desenvolvimento de novo conhecimento é a qualidade da interacção e inter-relação que assegura paridade de voz e contribuição" (idem).

Grupos de pesquisa cooperativa: Possível ponto de partida

No campo educativo, subjacentes à decisão de colaborar podem encontrar-se razões muito diversas como é ilustrado, em particular, pela análise da parte 4 do livro *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform* (Christiansen et al., 1997a) dedicada a parcerias e projectos colaborativos. A título de exemplo, refiro: a adesão à ideia de que a colaboração é, potencialmente, facilitadora da mudança; a existência de interesses partilhados em implementar inovações curriculares e em melhorar práticas de ensino e de formação; a existência do desejo de trabalhar conjuntamente com alguém com quem há relações pessoais previamente estabelecidas em torno de um tópico de interesse comum; a existência de expectativas de que há algo a ganhar com o trabalho conjunto; o acreditar-se que são necessários os saberes e competências de todos, e não apenas de alguns, para se avançar na compreensão de uma problemática; e tentativas de romper com relações hierárquicas estabelecidas entre universidades e escolas.

Independentemente das razões subjacentes à decisão de colaborar poderem ser diversas e de não haver um único modo de iniciar trabalho em colaboração, o que parece ser consensual é que o desenvolvimento de projectos colaborativos é influenciado pelo seu começo (Christiansen et al., 1997b). Igualmente consensual é que não basta organizar encontros entre os participantes para que a colaboração ocorra naturalmente, pois colaborar não é fácil nem simples (Blond & Webb, 1997; Olson, 1997). Assim, e em particular no que se prende com projectos de investigação colaborativa, importa reflectir sobre modos possíveis de os conduzir e organizar para que sejam maximizadas as potencialidades do trabalho conjunto. Neste contexto, uma das primeiras questões que se coloca é a de como iniciar o percurso que os poderá vir a originar. Neste âmbito, as ideias de Reason (1988b, 1988c) parecem ser prometedoras.

Para este autor, um dos modos de conduzir investigação no âmbito do paradigma colaborativo é fundar e trabalhar com o que designa por grupos de pesquisa cooperativa, ou seja, "grupos constituídos inteiramente para o propósito da investigação" (1988b, p. 2). Uma vez que "a pesquisa cooperativa é um processo essencialmente *emergente*" (Reason, 1988c, p. 19, destaque no original), nestes grupos os processos de cooperação têm que ser negociados e reaprendidos em cada novo instante, pelo que no desenvolvimento de uma pesquisa cooperativa não é possível estabelecer de imediato, e à partida, um grupo de pesquisa cooperativa, mas apenas um grupo "no espírito da colaboração" (Reason, 1988b, p. 19) que poderá vir a evoluir para um grupo de pesquisa cooperativa graças a um trabalho conjuntamente realizado.

Formalmente, pode considerar-se que uma pesquisa cooperativa atravessa "uma série de passos lógicos" (Reason 1988c, p. 32) que incluem a identificação de questões a investigar, o desenvolvimento de um modelo de prática mais ou menos explícito, o pôr em prática este modelo registando o que acontece, a reflexão sobre a experiência e o encontrar sentido na globalidade do empreendimento. Estes passos lógicos entrelaçam-se com processos emocionais que importa ter em conta e que são ignorados, ou mesmo negados, pela investigação mais convencional. Tendo por referência o seu trabalho com grupos de pesquisa cooperativa, o autor apresenta algumas orientações sobre como podem ser fundados estes grupos e tece considerações sobre como iniciar e desenvolver um projecto de pesquisa cooperativa. Chama a atenção, no entanto, para as orientações apresentadas não poderem substituir a criatividade e invenção que cada situação específica requer.

Usualmente um grupo de pesquisa constitui-se, segundo Reason (1988c), a partir da iniciativa de uma ou duas pessoas que pretendem desenvolver um projecto, que identificam um problema ou situação que desejam explorar e que tencionam que outros se lhe(s) associem. O desafio, nesta fase, é estabelecer um grupo que possa trabalhar cooperativamente a partir de ideias que no início são sustentadas apenas por uma ou duas pessoas. Esta situação pode originar algumas tensões que terão que ser abertamente enfrentadas e negociadas. O importante é assegurar

> que o projecto que o iniciador quer desenvolver faz sentido para um grupo potencial de membros; e ter cuidado para que quaisquer diferenças de poder ou estatuto derivadas de posições organizacionais ou sociais não tornem impossível negociar um contrato aberto. (Reason, 1988c, p. 21)

Segundo Reason, se um grupo já existente estiver à procura de resolver um problema da sua vida ou trabalho e se a pesquisa cooperativa parecer constituir uma estratégia apropriada de exploração deste problema, é muito provável que esse grupo venha a constituir um bom grupo de pesquisa cooperativa.

Uma vez que um grupo tenha manifestado algum grau de interesse pelo projecto, é importante explorar cuidadosamente as expectativas das diferentes pessoas e analisar se há bases para um trabalho conjunto. Essencial, nesta fase, é a definição de um contrato entre todos os participantes que torne claro o envolvimento de cada um na pesquisa, as exigências desta, os papéis a desempenhar e como poderão ser negociados, o tempo a disponibilizar, etc. Igualmente importante poderá ser firmar um contrato com membros-chave das instituições em que a pesquisa terá lugar.

No estádio do estabelecimento do contrato surge também, segundo Reason (1988c), uma importante tensão a gerir. Se quem inicia o projecto tiver muito claro e perfeitamente definido o que quer fazer e como o quer fazer, haverá pouco espaço para a negociação, o que poderá impedir o florescimento de um clima genuinamente colaborativo. Por outro lado, uma grande abertura e flexibilidade pode resultar em ambiguidade e confusão. Além disso, se os iniciadores do projecto forem demasiado vagos nos seus propósitos, o grupo que está a ser estabelecido pode formular um projecto de pesquisa completamente diferente dos desejos e necessidades desses iniciadores. A recomendação de Reason é que se combine clareza com flexibilidade:

> A atitude dos iniciadores deve ser: Esta é a nossa ideia acerca do que queremos procurar em conjunto. Isto é um plano geral da pesquisa cooperativa. Vamos falar acerca de tudo isto e ver se há uma base para cooperação. (Reason, 1988c, p. 25)

Como a pesquisa cooperativa envolve vários estádios entrelaçados de acção e reflexão, a partir do momento em que um grupo de pessoas tiver concordado em trabalhar como um grupo de pesquisa, importa delinear um plano geral de investigação, de modo a estes vários estádios poderem ter lugar, e a chegar a um equilíbrio adequado entre acção e reflexão. Delinear este plano passa, entre outras coisas, por reconhecer e negociar os papéis a desempenhar pelos elementos do grupo e por proporcionar oportunidades para que estes papéis sejam renegociados à medida que o projecto se desenvolve. Uma pesquisa cooperativa "é um empreendimento pluralista, em que diferentes pessoas com diferentes competências e interesses se juntam para colaborarem" (Reason, 1988c, p. 27) e, assim, os papéis dos vários membros poderão ser diferenciados:

> Um grupo de pesquisa [cooperativa] como qualquer grupo humano, tem que lidar com problemas de inclusão, influência e relações de proximidade; as pessoas assumirão diferentes papéis e haverá diferenças tanto na qualidade como na quantidade das contribuições dos seus membros. Em particular um ou mais membros podem iniciar a pesquisa (...) estes membros ou outros podem agir como facilitadores do processo de pesquisa. O modo como o grupo gerir estas potenciais diferenças de poder afectará a qualidade do seu trabalho. (Reason, 1994, p. 326)

Um modelo de investigação colaborativa que privilegia a reflexão

Bednarz et al. (1999) conceberam um projecto de investigação com o propósito de clarificar o conceito de investigação colaborativa entre professores e investigadores, bem como a subjacente abordagem investigativa. Na base deste projecto esteve a análise de um conjunto de experiências de colaboração desenvolvidas em contextos diversos e envolvendo professores e investigadores de várias áreas disciplinares e níveis de ensino. A partir dele construíram o que designaram por *model of university-school research collaboration* (p. 3) que se baseia na necessidade de desenvolver uma nova relação "entre a investigação formal (produção de conhecimento) e o desenvolvimento profissional (formação em serviço)" (idem).

No âmago deste modelo está uma actividade reflexiva, no sentido de Schön (1987, 1991), em que professores e investigadores "interagem sobre um aspecto da prática que represente um assunto de interesse comum" (Bednarz, et al., 1999, p. 4). A importância atribuída a esta actividade prende-se com o reconhecimento da necessidade dos investigadores colaborativos fazerem investigação *com* os professores e, consequentemente, procurarem integrar os seus pontos de vista na investigação do problema em causa. Isto significa, para os autores, ter acesso à *praxis* dos professores, bem como a um tipo de reflexão que permita aceder ao ponto de vista destes sobre a sua própria acção.

A actividade reflexiva tem um propósito dual. Por um lado, corresponde às necessidades da investigação, considerada enquanto meio de produção de conhecimento e, por outro lado, constitui uma oportunidade de desenvolvimento profissional para os professores uma vez que pode proporcionar elementos para iluminar e melhorar aspectos das suas práticas. Deste modo, a actividade reflexiva constitui, para Bednarz et al., "a pedra angular de um projecto de investigação-desenvolvimento profissional a partir do qual tanto investigadores como profissionais beneficiarão" (p. 4).

Para ilustrarem o significado do modelo de investigação colaborativa, Bednarz et al. apresentam vários exemplos concretos de projectos de investigação-desenvolvimento profissional, que analisam enunciando o tema geral que serviu de base ao encontro entre professores e investigadores, os objectivos de investigação (produção de conhecimento) e de desenvolvimento profissional visados, e os benefícios esperados, quer para os investigadores, quer para os professores. Em todos estes projectos a investigação formal e o desenvolvimento profissional "não emergem como dois estádios consecutivos governados por uma relação de dependência, mas constituem antes fases simultâneas ligadas por uma relação de interdependência" (p. 11). Segundo Bednarz et al., os investigadores não se comportam, meramente, como alguém que pesquisa simplesmente um objecto de conhecimento, mas agem também como formadores que procuram estimular o desenvolvimento profissional. Analogamente, os professores, ao participarem numa forma estruturada de questionamento sobre aspectos profissionais, para lá de proporcionarem a si próprios uma oportunidade de desenvolvimento profissional, estão também a contribuir para a investigação de um objecto de pesquisa relacionado com o saber ensinar que emerge deste processo de questionamento.

Os professores e os investigadores pertencem, segundo Bednarz et al., a diferentes comunidades cada uma com as suas finalidades e saberes próprios que podem entreajudar-se na compreensão dos fenómenos de ensino e contribuírem para a produção de conhecimento sobre estes fenómenos. Assim, a investigação colaborativa pressupõe a interdependência das comunidades de investigação e de prática a que pertencem, respectivamente, os investigadores e os professores. Neste âmbito, o modelo de investigação colaborativa que propõem não envolve a partilha das tarefas de investigação, ou seja, não fomenta a participação dos professores em cada estádio da investigação, embora esta possibilidade não seja liminarmente descartada. O que importa é que os professores, juntamente com os investigadores, "explorem um aspecto da sua prática profissional que represente um objecto de pesquisa para todos os participantes no projecto" (p. 12). A actividade reflexiva desenvolvida conjuntamente por estes dois grupos no âmbito do projecto de colaboração, constitui "o *locus* de mediação" (p. 11) entre estas duas comunidades, facilitando, assim, a ligação entre a teoria e a prática e servindo, simultaneamente, como uma "actividade de formação (…) e como uma actividade de investigação" (p.12).

Resumidamente, o modelo de investigação colaborativa proposto por Bednarz et al. pode ser caracterizado a partir de três componentes principais destacadas, por estes autores, a partir de um trabalho de Desgagné:

- A investigação colaborativa combina, simultaneamente, investigação e desenvolvimento profissional.
- Procura-se que a investigação colaborativa constitua uma mediação entre a comunidade de investigação e a comunidade de prática.
- A investigação colaborativa pressupõe a co-construção, por investigadores e professores, de um objecto de conhecimento. Este conhecimento está ligado à acção dos professores e é co-construído no

decurso da reflexão conjunta desenvolvida pelos investigadores e professores relativamente a esta acção.

Estas componentes entrelaçam-se com o que Bednarz et al. consideram ser três princípios centrais a qualquer projecto de investigação que se pretenda colaborativo:

- *A co-situação do conhecimento a ser construído*: Este princípio refere-se ao espírito colaborativo que deverá estar subjacente ao desenvolvimento da problemática de investigação, assegurando que "o objecto de investigação é construído na intersecção entre preocupações específicas da comunidade de prática e as do campo de investigação relacionado" (p. 14). Um desafio relacionado com a concretização deste princípio pode ser, por exemplo, imaginar um projecto que satisfaça as necessidades tanto da investigação como do desenvolvimento profissional.

- *A co-operação no processo de construção*: Refere-se ao espírito colaborativo que deverá estar subjacente ao processo de recolha de dados, assegurando que estes emergem da interacção, no âmbito da actividade reflexiva, entre professores e investigadores. Um exemplo da concretização deste princípio poderá ser a concepção de um projecto de investigação colaborativa em que a própria abordagem e métodos de investigação sejam tais que tornem possível que todos partilhem as suas competências e beneficiem com o processo.

- *A co-produção do conhecimento em questão*: Diz respeito ao espírito colaborativo que deverá estar subjacente à análise e formatação dos resultados do projecto. Este princípio visa assegurar que o conhecimento seja produzido numa forma que beneficie todos os participantes.

Em suma, no que respeita ao desenvolvimento de projectos de investigação colaborativa, as ideias apresentadas nesta subsecção e na anterior — *Grupos de pesquisa cooperativa: Possível ponto de partida* —, permitem constatar a existência de aspectos comuns ao pensamento dos autores referidos e também evidenciar singularidades abordadas que parecem ser relevantes para equacionar possíveis formas de desenvolvimento destes projectos. Comum é o facto do ponto de partida ser a formação de um grupo que pode ser proposto a partir da iniciativa de alguns dos seus futuros membros. Neste grupo, as pessoas interagem entre si, articulando acção e reflexão, de modo a explorarem um aspecto da prática profissional que represente um objecto de interesse comum. Esta exploração admite papéis diferenciados, não envolvendo, necessariamente, a partilha de todas as tarefas.

Especificamente, Bednarz et al., situando-se no campo educativo, indicam que estes grupos são constituídos por professores e investigadores e visam tanto a investigação de um aspecto da prática dos professores como o seu desenvolvimento profissional. De salientar é não haver, nestes autores, referência alguma à prossecução de finalidades relacionadas com o desenvolvimento profissional dos investigadores, embora também nada indique que essa possibilidade se encontra excluída. A contribuição de Reason permite, em particular, destacar processos de constituição dos grupos de pesquisa e chamar a atenção para alguns dos desafios e tensões que importa ter em conta nestes processos. Neste âmbito, de especial relevância parece ser a negociação de um contrato entre todos os participantes na investigação e também com elementos-chave da(s) instituição em que ela se irá realizar.

Muitas das ideias destes autores encontram eco em trabalhos de outros que escrevem sobre trabalhos de investigação desenvolvidos em colaboração. Entre estes encontram-se, por exemplo, Hookey et al. (1997) que, a partir da análise de um projecto colaborativo de investigação-acção, referem que as negociações em que se envolveram se organizaram em torno de cinco tipos de tarefas que facilitaram o seu trabalho conjunto:

- iniciar uma relação de trabalho, o que incluiu a negociação de como, porquê e quando trabalhar em conjunto;
- determinar propósitos vantajosos para o trabalho em comum;
- estabelecer contextos de apoio, que passou, nomeadamente por negociar apoios junto das direcções das escolas;

- manter uma relação de trabalho, o que requereu enfrentar de ambiguidades e negociar questões que surgiram durante o trabalho conjunto;
- expandir os propósitos iniciais do trabalho, de modo a permitir diferentes possibilidades de desenvolvimento profissional individual.

Complexidades da colaboração

Se em projectos de colaboração a relação entre os parceiros é de primordial importância, analisar esta relação passa não apenas por reflectir sobre factores que poderão contribuir para o sucesso desses projectos, mas também por identificar complexidades ou dificuldades que poderão atravessá-los. Além disso, equacionar um projecto de investigação colaborativa passa, também, por reflectir sobre dúvidas e problemas que se colocam a propósito do seu desenvolvimento. É sobre estes aspectos que me debruço em seguida.

Uma rede complexa de dilemas interligados: Análise de um caso

Segundo Drake e Basaraba (1997) o projecto colaborativo em que se envolveram foi bem sucedido. Na análise apresentada referem factores que estiveram na base deste sucesso, mas debruçam-se, também, sobre o que designam por "uma rede complexa de dilemas interligados" (p. 212) que iluminam "o lado mais obscuro ou as complexidades e incertezas" (idem) do seu processo de colaboração. Entre os factores de sucesso incluem semelhanças pessoais, a crença na existência de recompensas mútuas, a participação voluntária, a existência de um ambiente de apoio e de uma linguagem e objectivos comuns e o facto da investigadora ser sensível à cultura da escola em que a professora trabalhava. Os dilemas emergem a partir da análise de um conjunto de temas que intitulam: (1) sobre igualdade e reciprocidade; (2) conflito interno: conduzido pela culpa; (3) negociando a investigação; (4) sobre a relação; e (5) através de uma lente feminista.

Quanto ao primeiro tema, Drake e Basaraba referem que a reciprocidade foi simples, uma vez que ambas reconheciam a existência de recompensas claras pelo facto de se envolverem no projecto. No entanto, não foi tão fácil lidar com questões de igualdade. Segundo as autoras, a igualdade sugere que na relação de colaboração o poder é igualmente partilhado. Ora neste caso, a investigadora sentia-se frequentemente sem autoridade. Não queria sobrecarregar a professora, pois a agenda de investigação era sua e não dela. Esta estava interessada em ser bem sucedida nas actividades de ensino. Por outro lado, para a professora as questões de poder não eram relevantes. Para ela estava muito claro que a sua agenda era ensinar com sucesso os seus alunos e se a colaboração não funcionasse, não continuaria. No entanto, inicialmente, sentiu-se intimidada com o estatuto universitário da investigadora. Ambas se sentiram mutuamente vulneráveis a juízos negativos, tendo esta vulnerabilidade mútua equilibrado o campo de acção. A professora, pelo facto de convidar a investigadora "tanto para a sua aula como para a sua vida" (p. 213) e a investigadora porque sentia necessidade de agradar constantemente à professora para ela não desistir do projecto. A questão da partilha do poder foi ultrapassada estabelecendo que ambas tinham perícia e autoridade em diferentes áreas, desenvolvendo, assim, uma "relação de complementaridade" (p. 213). Esta relação significa que os parceiros colaborantes contribuem de modos diferentes para o desenvolvimento do projecto e recebem dele recompensas também diferentes, sendo interdependentes e necessitando uns dos outros para atingir objectivos pessoais. O dilema relacionado com a partilha do poder foi, assim, ultrapassado através do reconhecimento dos benefícios da complementaridade, que John-Steiner, Weber, e Minnis (1998) consideram constituir um poderoso recurso na colaboração.

Quanto ao segundo tema — conflito interno: conduzido pela culpa — as autoras, embora reconhecendo que os conflitos parecem ser parte necessária do processo de colaboração e que muitos dos que viveram foram provocados por factores externos, destacam que muito do conflito foi interiorizado e emergiu como culpa não expressa. Esta culpa foi proveniente de fontes múltiplas. Por exemplo, a investigadora sentia que não estava a ser suficientemente apoiante para a professora, pois não tinha muito tempo para estar na sala de aula. Por seu turno, a professora sentia-se culpada por não ler todo o material que a investigadora lhe deixava. A culpa, inicialmente não exteriorizada, foi posteriormente expressa permitindo que estabelecessem um patamar confortável para ambas, que possibilitou que comunicassem os conflitos que sentiam de modo a descobrirem o que funcionava melhor para cada uma.

Um outro campo em que Drake e Basaraba experienciaram dilemas foi na negociação da investigação. Neste âmbito surgiram duas áreas problemáticas. O papel como investigador e o processo de escrita. Quanto à primeira, a investigadora, quem propôs a investigação, não queria pedir demasiado à professora que estava já demasiado sobrecarregada com as necessidades do dia-a-dia na escola e com uma vida pessoal extremamente ocupada. Sentia, no entanto, que a voz da professora era essencial para o processo de investigação colaborativa. A professora, por seu lado, embora sabendo que a parceria proposta era uma parte de um plano de investigação e querendo participar nele, não tinha, no início, competências para o fazer. A solução adoptada foi a investigadora guiar o processo de investigação modelando o tipo de reflexões escritas que pensava serem pertinentes para o estudo. A professora respondia a estas reflexões e à medida que o foi fazendo aprendeu algumas das competências de investigação. Relativamente ao processo de escrita, um empreendimento considerado difícil quando se pretende criar uma narrativa que realce diferentes vozes e não apenas uma voz, a investigadora assumiu a responsabilidade de escrever a primeira versão do balanço em que foram apresentados os factores de sucesso do projecto e os dilemas experienciados. Este balanço foi, posteriormente, comentado cuidadosamente pela professora, embora ambas reconheçam que esta opção, se bem que tendo funcionado no seu caso, não se ajusta "ao ideal da igualdade de voz no processo de investigação" (p. 216).

Um aspecto que atravessou todos os temas anteriormente referidos e que constituiu o princípio central que guiou a colaboração foi, na perspectiva das autoras, o cuidado. Foi a ênfase no cuidado que levou Drake e Basaraba para lá de convenções respeitantes ao que constitui uma relação polida e proporcionou um contexto favorável para concordarem que, no seu caso, não podiam trabalhar com uma definição de colaboração que enfatizasse a paridade e a igualdade de responsabilidades. Na análise apresentada, apoiam esta posição numa citação de Feldman que salienta não ser possível que investigadores universitários e professores-investigadores (*school researchers*) partilhem o mesmo conjunto de objectivos e a mesma questão de investigação, a menos que mudem os seus papéis. Assim, as autoras aceitaram que os seus papéis seriam diferentes e que podiam ter uma definição própria de colaboração: uma definição que funcionasse no seu caso, que se ajustasse às suas necessidades e que lhes permitisse construir pontes, efectivas, entre a cultura da universidade e a cultura da escola.

O cuidado enquanto princípio orientador da colaboração, a procura de novos modos de conhecer e investigar onde as vozes dos actores são ouvidas de modos autênticos e a abertura à mudança e ao desenvolvimento através do próprio processo de investigação, são alguns dos aspectos da investigação colaborativa desenvolvida, que Drake e Basaraba consideram ser valorizados pelas teorias feministas. Esta constatação conduz as autoras a questionar se muito da sua história e do sucesso do projecto não se enraizará no facto de serem mulheres. Em particular, interrogam-se se o factor culpa, existente na relação que construíram, não será mais típico de um trabalho conjuntamente desenvolvido por mulheres do que por homens. Suspeitam que sim, afirmando que "a nossa concentração no cuidado e na culpa é parte da nossa socialização" (p. 217). Neste contexto, o desafio que enfrentam é o de manter a ênfase no cuidado, procurando, simultaneamente, manter uma comunicação aberta que permita eliminar culpas desnecessárias. Fazendo um balanço do projecto de investigação colaborativa em que se envolveram, concluem que, no seu caso, a construção de relações e o desenvolvimento de afinidades foi a parte mais importante do processo de investigação.

Em suma, a construção de relações de colaboração parece ser um percurso gradual, longo, complexo, incerto, onde se entrelaçam riscos, vulnerabilidades e dilemas, em que o cuidado (incluindo aqui a confiança, o respeito, a honestidade e o compromisso), enquanto princípio orientador, é um aspecto fundamental, em que importa todos terem oportunidade de mostrar os seus saberes e competências estando, simultaneamente, abertos a diferentes possibilidades. Neste processo, é essencial encontrar, desde o início, processos de negociar e renegociar papéis, compromissos e responsabilidades. Além disso, mais importante do que o diálogo como instrumento de consenso, que serve para reduzir contradições, parece ser, adoptando a terminologia de Christiansen (1999), o diálogo como *instrumento de confronto de ideias e compreensões*.

Investigação colaborativa: Percurso incerto

Uma investigação colaborativa não segue um curso linear onde cada passo é rigorosamente predeterminado. É um processo activo, criativo, mutável, "que envolve passos reflexivos, cíclicos e mesmo regressivos" (Schroeder & Webb, 1997, p. 242) e em que a negociação e a renegociação são componentes centrais. Estas características podem entrar em conflito com o início da colaboração a partir de agendas de investigação determinadas *a priori* onde se estabelecem, de forma detalhada, os objectivos da colaboração e as várias etapas do processo de colaboração, sua sequência e duração. Não é invulgar, por exemplo, que trabalhos académicos conducentes à obtenção de graus de Mestre e Doutor, exijam que o foco e as questões de investigação estejam pré-determinados à apresentação do projecto àqueles que se visa que nele participem.

Se um projecto de investigação colaborativa, pela sua própria natureza, não segue um percurso inteiramente previsto à partida, o papel dos participantes na colaboração poderá sofrer modificações no seu decurso de modos que anteriormente não foram antecipados. Além disso, o interesse de alguns, bem como o seu compromisso com o projecto e as circunstâncias em que a ele aderiram, podem, também, sofrer alterações durante o desenvolvimento. Estes factos, como destacam Schroeder e Webb (1997) referindo-se a investigações colaborativas desenvolvidas com professores no âmbito de estudos doutorais, podem ser incompatíveis com a necessidade dos professores, antes do início da colaboração, darem um consentimento informado e detalhado sobre o(s) papel(éis) que irão desempenhar em cada uma das etapas da investigação. Este consentimento necessita, como referem estas autoras, “de ser renegociado ao longo de todo o projecto” (p. 240).

Objectivos comuns: Chave para a colaboração?

Muito do esforço de compreensão e promoção de relações de colaboração tem sido centrado na análise de se o estabelecimento de objectivos comuns é a chave para a colaboração. Num projecto de investigação colaborativa o estabelecimento destes objectivos não é tarefa fácil. Kapuscinski (1997), por exemplo, chama a atenção para que, no caso dos projectos envolverem professores e investigadores universitários, se os investigadores “se focarem, exclusivamente, nas necessidades e preocupações dos professores, enfrentam a incerteza de não saberem se a investigação ajudará a atingir objectivos tais como a produção de conhecimento proposicional ou a publicação em revistas com revisores (*referees*)” (pp. 10,11). Além disso, se a investigação for dirigida por problemas apenas identificados pelo investigador, “não há garantia de que os seus resultados sejam úteis aos professores” (p. 11).

A resposta à questão de se é imprescindível, ou não, o estabelecimento de um conjunto de objectivos comuns para a existência de uma colaboração bem sucedida não é unânime. Consensual parece ser a ideia de que os participantes num projecto de investigação colaborativa não podem ser considerados como meras fontes de fornecimento de dados que possibilitam a investigação de um problema que é independente dos seus objectivos e que pode nem sequer constituir para si um problema: a investigação deve trazer-lhes benefícios. Igualmente consensual, parece ser a necessidade de se estabelecer uma ampla finalidade global para o projecto de colaboração. As diferenças parecem situar-se relativamente à necessidade, ou não, de mutualidade nos objectivos mais específicos relacionados com as particularidades de cada parceria colaborativa.

Castle (1997) aborda esta questão no âmbito de trabalhos de colaboração desenvolvidos entre escolas e universidades. Na sua perspectiva, a actual ênfase na centralidade de objectivos mútuos nas relações de colaboração é pouco sensata, sendo tempo de se aceitar que mesmo que estes objectivos sejam estabelecidos, são frequentemente prosseguidos através de formas que maximizam as necessidades de uma das partes. Esta situação prende-se, em particular, com as diferenças entre as culturas das escolas e das universidades e, muito especialmente, com as recompensas existentes no âmbito destas culturas. Por exemplo, enquanto que na escola se recompensa a implementação de práticas e programas que melhoram o desempenho dos alunos, não sendo, muitas vezes, reconhecidos professores que se envolvem em projectos de investigação, nas universidades a situação é oposta, havendo uma valorização da investigação tradicional sobre a investigação aplicada.

Para Castle, o sucesso de um projecto colaborativo não exige que todos os participantes partilhem propósitos particulares idênticos, que todos participem de modo igual nas mesmas actividades, ou que todos beneficiem, igualmente, dos mesmos resultados. A chave para a colaboração está, não em objectivos específicos mútuos, mas antes na natureza da interacção entre todos os participantes nas parcerias colaborativas, nos modos pelos quais respondem ao "amplo objectivo comum" (p. 67), "respondem uns aos outros, aprendem uns com os outros, e negoceiam a relação" (p. 60).

A possibilidade de existirem diferenças em objectivos particulares estabelecidos no âmbito de um projecto de colaboração é salientada por muitos outros autores (por exemplo, Bednarz et al., 1999; Hookey et al., 1997; Kapuscinski, 1997; Orr, 1997; Ponte et al., 2003). Orr salienta que a investigação colaborativa deve ter um propósito comum para guiar a relação, mas deve, ao mesmo tempo, permitir aos participantes prosseguirem intenções próprias. Esta ideia é consistente com as observações de Hookey et al., que salientam que um dos aspectos positivos do projecto de colaboração que desenvolveram foi o facto deste projecto — embora tendo oferecido a todas as participantes novos modos de pensarem acerca de si próprias como profissionais — ter um objectivo inicial de partida suficientemente amplo para possibilitar diferentes possibilidades para desenvolvimento profissional individual. Indo no mesmo sentido, Kapuscinski refere que as dificuldades no estabelecimento de objectivos comuns a professores e investigadores poderão ser ultrapassadas através da formulação de um objectivo final comum para todos e, simultaneamente, de objectivos imediatos diferentes. Por exemplo, indica este autor, ambas as partes podem partilhar o objectivo de melhorar o processo de ensino e aprendizagem, embora o investigador procure aumentar o conhecimento científico relacionado com a formação de professores e o professor pretenda melhorar a sua prática. Estas perspectivas são consistentes com o modelo de investigação colaborativa proposto por Bednarz et al. (1999) que admite a possibilidade de, no âmbito de um tema geral negociado entre professores e investigadores, se estabelecerem objectivos diferenciados respeitantes à investigação e ao desenvolvimento profissional e se alcançarem benefícios também diferenciados.

"Parte da promessa da colaboração relaciona-se com as possibilidades que ela contém de satisfazer diferentes necessidades pessoais no interior do mesmo projecto" (Orr, 1997, p. 256). Os projectos de colaboração bem sucedidos parecem, assim, depender não tanto do estabelecimento de um conjunto de objectivos comuns a todos os participantes, mas mais da capacidade de se transformarem "objectivos independentes mas interrelacionados em acções mutuamente benéficas" (Kapuscinski, 1997, p. 8).

Inspirando-se na noção acordo de co-aprendizagem proposta por Wagner (1997), Jaworski (2001) defende o que designa por *co-learning partnership model of mathematics teaching development* (p. 315). Para a autora, "a natureza de uma parceria de co-aprendizagem é que professores e formadores (*educators)* trabalhem e aprendam juntos numa relação recíproca de natureza reflexiva" (p. 315). Nesta parceria os papéis desempenhados pelos participantes não necessitam de ser iguais e raramente são iguais. Vão-se modificando ao longo do tempo, tal como acontece com as relações e responsabilidades. À medida que os papéis se desenvolvem muda também a forma como o poder é partilhado. O que importa é que a parceria envolva "o reconhecimento de, o respeito por, e a responsabilidade na interpretação e desenvolvimento de papéis, de tal modo que cada parceiro maximize as oportunidades de aprendizagem" (p. 315).

Benefícios e custos desiguais

Um dos problemas amplamente difundido entre os autores que se debruçam sobre o desenvolvimento de investigações que envolvem investigadores e professores prende-se com a questão da desigualdade de benefícios e custos que daí advêm para ambas as partes.

John-Steiner et al. (1998) salientam, por exemplo, que na maior parte da investigação escolar iniciada por académicos, os investigadores ganham com o trabalho realizado e as publicações com ele relacionadas "desproporcionalmente em comparação com os professores participantes" (p. 774). Referem, além disso, que, em particular, "as colaborações professor-investigador são percebidas como desiguais e frequentemente penosas por pessoas confrontadas com muitas das responsabilidades da sala de aula" (p. 775).

Indo no mesmo sentido, também Clark et al. (1996) indicam que a literatura sobre investigação colaborativa refere, frequentemente, mudanças no pensamento e práticas de professores como resultado do seu envolvimento em projectos de investigação, embora não seja tão usual uma análise do impacto destes projectos no desenvolvimento profissional dos investigadores. Igualmente frequente, para estes autores, é a adopção de definições de colaboração que põem a ênfase na partilha do trabalho de investigação, mas onde não há referência alguma à partilha do trabalho de ensino. Usual, ainda, é a existência de artigos e seminários de investigação, onde os professores pouco escrevem ou intervêm, embora os seus mundos, a sua cultura e os seus processos de desenvolvimento profissional sejam aí amplamente discutidos e analisados pelos investigadores. É como se a investigação colaborativa fosse algo que apenas afectasse e mudasse os professores ou só servisse os investigadores e propósitos académicos relacionados com o seu trabalho.

É como reacção e resposta a esta situação que Clark et al. (1996) propõem que a colaboração seja conceptualizada não como a realização, pelas pessoas que colaboram, do mesmo trabalho de investigação, mas antes em termos da compreensão recíproca do mundo uns dos outros, alcançada através de conversações e diálogo partilhados. Na perspectiva destes autores, a distinção que propõem na conceptualização de colaboração, embora seja subtil, "serve para equilibrar o campo de acção de um modo que permite a professores e investigadores obter, de modo mais igualitário, os benefícios da colaboração (e partilhar os seus custos)" (pp. 196-7). O diálogo torna-se, assim, um meio de alcançar a paridade na colaboração, ao mesmo tempo que facilita a reflexão mútua, desenvolvimento e mudança: "A reciprocidade é atingida dialogicamente" (idem, p. 228).

Embora reconhecendo a importância do problema da desigualdade de benefícios e custos, John-Steiner, et al. (1998) questionam, no entanto, que o diálogo cubra tudo o que Clark et al. relataram como sendo os seus próprios processos e propósitos colaborativos, e que o caminho a prosseguir seja considerar o diálogo como o factor central da investigação colaborativa: "Focar-se exclusivamente no diálogo é ignorar a complementaridade de destrezas, esforço e papéis nas relações de confiança como uma alternativa à falta de equidade e desigual poder nalgumas colaborações ou a todos realizarem trabalho idêntico" (p. 775). Para estes autores, o diálogo é importante, mas a menos que "esteja ligado aos valores dos participantes, a objectivos partilhados e a trabalho comum, o resultado não é necessariamente colaboração" (pp. 775-6). Assim, preferem, antes, uma definição de colaboração que reconheça a importância da complementaridade e que valorize "tanto o trabalho do grupo como o modo pelo qual os membros o abordam" (p. 776).

A complementaridade de experiência e pontos de vista é também uma das características que Goodson (1993) reconhece como sendo uma mais-valia na colaboração entre professores e investigadores do ensino superior. Para este autor, cada uma destas partes está "diferentemente localizada em termos estruturais (...) [e] vê o mundo através de um prisma diferente de prática e pensamento" (p. 18).

Esta "diferença valiosa" (p. 18) pode proporcionar a possibilidade de ambas contribuírem com dados e ideias que poderão trazer benefícios mútuos.

Interrogando-se sobre a que deve assemelhar-se uma relação de colaboração entre professores e investigadores, Goodson salienta que um "foco restrito na 'prática'" (p. 6), ou seja, naquilo que o professor faz na sala de aula independentemente das razões porque o faz ou do contexto que motivou esse fazer, não nos levará muito longe. Na sua perspectiva, a investigação educacional deve ser reconceptualizada de forma a que a voz do professor seja ouvida, e modos de investigação colaborativa que procuram conceder plena igualdade e estatuto ao professor, mas que têm como foco predominante e inicial de trabalho a sua prática, podem ser problemáticos e "um ponto de entrada profundamente não prometedor para promover um empreendimento colaborativo" (p. 12).

Para fundamentar esta posição, Goodson refere que as salas de aula, e mesmo, embora não tão referidas, as salas de conferências, são contextos de grande ansiedade e insegurança. Assim sendo, embora para os investigadores aqueles modos de investigação possam não levantar problema algum, para os professores poderá parecer que "o ponto de partida para a colaboração se centra no máximo ponto de vulnerabilidade" (p. 12). Deste modo, os custos da colaboração, para o professor, são muito superiores aos custos que ela tem para o investigador. Esta mesma ideia é referida por Blond e Webb (1997) para quem os professores, ao serem "observados" mas não incluídos na interpretação das suas práticas, têm sido frequentemente colocados em risco. Para estas autoras, os investigadores, ao não terem em conta as suas próprias histórias ou práticas em estudos sobre o ensino, "têm evitado as posições vulneráveis em que os professores participantes são frequentemente colocados" (p. 99).

Blond e Webb salientam que a investigação colaborativa desenvolvida por professores em escolas e pessoas que trabalham em universidades, "envolve correr riscos e vulnerabilidade para *ambas* as partes" (p. 98, destaque no original). Reflectindo sobre a sua própria experiência, destacam que, no seu caso, a "vulnerabilidade partilhada" (p. 99) foi necessária à colaboração e fortaleceu a relação que estabeleceram entre si. Estas ideias são frequentemente referidas por muitos outros dos participantes em investigações colaborativas.

Assim, embora a importância da vulnerabilidade mútua não seja amplamente compreendida, sendo, mesmo, considerada estranha nas tradições de investigação feitas *sobre* os professores, experiências partilhadas de risco parecem alterar, significativamente, a relação de colaboração, e contribuírem, como referem Drake e Basaraba (1997), para equilibrarem o campo de acção de professores e investigadores.

Diferentes relações com o conhecimento

O desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa, envolvendo professores e investigadores, põe em causa concepções subjacentes a modelos clássicos de investigação e formação em que, muito frequentemente, os materiais oferecidos aos professores pelos investigadores são desenhados de modo a oferecerem soluções prontas para problemas previsíveis. Considerando que o conhecimento é co-construído na interacção entre todos os participantes no projecto, muitos dos investigadores que defendem a importância do desenvolvimento de projectos de investigação colaborativa com professores, afirmam a necessidade destes serem vistos como parceiros de pesquisa na investigação de questões relacionadas com a sua prática e na produção de conhecimento sobre o ensino.

No entanto, Bednarz (1998) chama a atenção para que não nos podemos iludir acreditando que todos os professores participantes num projecto de investigação subscreverão, de imediato, esta relação com o conhecimento. Segundo esta autora, muitos poderão estar mais à-vontade com uma relação do tipo tecnicista, focada no como fazer, manifestando uma certa relutância em adoptar um posicionamento de tipo diferente que privilegia a reflexão crítica sobre a prática e que, entre outras coisas, é mais exigente em termos do seu envolvimento.

Esta observação não é inconsistente com uma ideia sublinhada por Jaworski (2001) que, recorrendo a uma ironia de Dawson, salienta que os professores de Matemática e os formadores de professores, incluindo aqui os investigadores, parecem dois grupos feitos um para o outro: aqueles precisam de alguém que os dirija e estes necessitam de alguém a quem dirigir. Para Jaworski, apesar de tanto o grupo dos professores como o dos formadores terem ambos, quer conhecimento profissional, quer teórico, o desequilíbrio de poder nas relações entre estes dois grupos coloca os formadores numa posição superior aos professores, como se apenas o seu conhecimento fosse valorizado. Os formadores são vistos como aqueles que sabem o que os professores devem e necessitam de saber. No entanto, segundo esta autora, os formadores apenas podem conjecturar abordagens acerca de como aprendem os professores e testá-las através dos seus programas de investigação. Só que este carácter conjectural nem sempre é claro para os professores.

Trata-se, utilizando uma expressão de Schroeder e Webb (1997), do mito do *investigador-como-perito*. Por um lado, este mito pode causar desconforto aos investigadores ao serem confrontados com expectativas dos professores que vão no sentido de verem o investigador como aquele que é suposto saber e explicar exactamente aquilo que se espera que eles façam. Por outro lado, o mito pode gerar angústias nos professores quando os investigadores admitem não ter as respostas que eles esperam.

O papel do investigador

Ao analisar o desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa, que envolveu professores do ensino básico e investigadores num processo de reflexão respeitante às práticas de ensino dos professores, Bednarz (1998) foca o que designa por "desafio fundamental que é enfrentado pela investigação colaborativa e pelo investigador que a inicia" (p. 55). Este desafio prende-se com o papel do investigador quando o projecto é iniciado por este e propõe uma alternância planeada e regular entre experimentação na sala de aula e reflexão sobre o processo no grupo de participantes[25]. A autora interroga-se sobre como conceptualizar o papel do investigador de modo a, simultaneamente, criar condições para se tornar explícita a compreensão das situações específicas com que o professor tem que lidar — componente fundamental quando se considera a natureza indeterminada das situações de ensino, o que conduz a trazer para primeiro plano "a metáfora do professor como profissional reflexivo" (p. 55) — mas sem resvalar para uma relação mecânica em que o investigador dita a forma de agir do professor.

No caso do projecto colaborativo, "as situações desenvolvidas pelos investigadores deveriam servir como ponto de partida para uma abordagem em que a acção na classe e a reflexão sobre a acção desempenhariam papéis importantes enquanto induziam também os professores a, por um lado, distanciarem-se reflexivamente das situações e, por outro lado, a reapropriarem-se delas e a reconstruírem-nas progressivamente" (Bednarz 1998, p. 55). Neste âmbito, a autora salienta que, tal como os professores devem interpretar constantemente a actividade cognitiva das crianças de modo a proporcionar uma análise de como os alunos funcionam e se desenvolvem em conexão com as actividades implementadas na sala de aula, também o investigador "deve desenvolver uma interpretação da actividade dos professores, do modo como funcionam e se desenvolvem em ligação tanto com as suas práticas (…) como com a sua reflexão sobre a acção" (p. 56).

Torna-se, assim, responsabilidade do investigador elaborar uma reinterpretação da sua própria perspectiva à luz do que os próprios professores fazem e dizem. No contexto do processo de colaboração, a "elaboração do conhecimento-capacidade para ensinar" (Bednarz, 1998, p. 56), surge como uma co-construção para a qual professores e investigadores contribuem interagindo entre si. Para Bednarz é desta forma que "a investigação colaborativa assume significado" (idem).

[25] No caso do projecto referido a experimentação centrava-se no desenvolvimento do raciocínio matemático em crianças e recorria a actividades que podiam ser adaptadas, de acordo com necessidades específicas expressas pelos professores, baseadas numa abordagem sócio-construtivista ao ensino da Matemática.

Temporalidade e colaboração

No desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa, o tempo é uma questão central e significativa para todos os participantes: tempo para conhecimento mútuo, para o desenvolvimento de uma linguagem comum, para reflexão sobre o processo de colaboração, para a análise de experiências, para a construção conjunta de sentido. A importância do tempo prende-se, em particular, com a ideia de que a "colaboração é relacional" (Schroeder & Webb, 1997, p. 243) e com o facto da construção de relações baseadas na confiança ser um processo continuado que evolui lentamente.

Ora o tempo pode ser vivido de modos muito diversos e ser gerido de formas variadas por vezes difíceis de harmonizar. Nalguns casos, o desenvolvimento de um patamar de confiança, essencial para os participantes poderem partilhar descobertas e informações que não poderiam ser partilhadas de outro modo, é um processo muito moroso que é dificilmente compatível com limitações temporais impostas para a conclusão de uma investigação. Noutros casos, podem ser diferentes as prioridades relacionadas com a gestão do tempo estabelecidas pelos participantes no projecto. Por exemplo, Orr (1997), num trabalho de colaboração em que esteve envolvido, destaca que o tempo foi vivido diferentemente por ele próprio, enquanto investigador, e pela professora com quem colaborou. Para a professora, o projecto de investigação era uma pequena parte das suas obrigações profissionais. Embora entusiasmada com a possibilidade de participar numa investigação sobre a sua própria turma, a sua prioridade, em termos de investimento de tempo, eram o ensino e outras responsabilidades relacionadas com o seu trabalho na escola. A investigação estava em segundo lugar. Contrariamente, Orr, para quem o tempo era também importante devido à existência de um esquema de investigação apertado, procurava uma gestão do tempo que privilegiasse tarefas relacionadas com a investigação. Estas diferentes formas de viver o tempo nem sempre foram fáceis de compatibilizar.

Confiança: Pouca compreensão sobre o seu significado

Um problema que pode emergir quando se pretendem desenvolver projectos de investigação colaborativa prende-se com o reconhecimento do valor da confiança nas relações de trabalho de colaboração mas com a pouca compreensão do significado e natureza desta noção (Hargreaves, 1998a).

Hargreaves (1998a) salienta que entre os poucos autores que se debruçam sobre a noção de confiança estão Nias e os seus colegas para quem "a confiança tem duas dimensões: a previsibilidade e objectivos comuns" (p. 285). Ou seja, para que exista confiança as pessoas devem partilhar, fundamentalmente, as mesmas finalidades e sentir que podem visualizar, com antecipação, quer as suas acções, quer as acções de outros. Esta concepção de confiança pode ajudar, como refere Hargreaves, a compreender melhor a dinâmica de relações interpessoais relativamente estáveis e persistentes em colaborações existentes em pequenos grupos, mas não clarifica outras formas de confiança que se podem encontrar, nomeadamente em contextos em que estas relações são bem menos estáveis e persistentes ao longo do tempo.

A transição da modernidade para a pós-modernidade está, segundo Hargreaves, a provocar duas tendências importantes na reconstrução da confiança. Em primeiro lugar, coloca-se a ênfase na "construção de relações de trabalho em colaboração que sejam recompensadoras e produtivas, e que assentem na reconstrução da intimidade, do calor humano e da confiança pessoal" (p. 286). Em segundo lugar, salienta-se a importância da confiança não depender, exclusivamente, da confiança pessoal e das formas de colaboração que nela assentam, sendo necessário investir e confiar em processos que maximizem o saber colectivo das organizações e melhorem as suas capacidades de resolução de problemas. Estes processos incluem, entre outros, "a melhoria da comunicação, a criação de oportunidades para uma aprendizagem colegial, o envolvimento em redes com ambientes externos, [e] o empenhamento na pesquisa constante" (p. 287).

Assim, o desafio que hoje se coloca ao nível da confiança parece consistir em se ser capaz de construir relações de trabalho em colaboração entre pessoas que estão próximas, sem resvalar para paternalismos e dependências, e, simultaneamente, promover ligações e desenvolver a confiança entre pessoas que, embora não se conhecendo muito bem, confiam, mutuamente, na complementaridade das suas qualificações.

A questão da escrita

A questão da escrita nos projectos de colaboração é um dos aspectos recorrentes em muita da literatura sobre o tema. Tudo levaria a presumir, como Reason (1988c) refere, que a pesquisa cooperativa conduziria "à produção cooperativa de relatórios e, por isso, a escrita de qualquer relatório deveria ser um empreendimento partilhado" (p. 38).

No entanto, a situação não é assim tão simples. Reason (1988c) salienta que a sua experiência indica que tentar escrever tal relatório com um grupo de pessoas é "um esforço terrível" (p. 38). E foi a dificuldade de criar um texto escrito sobre um projecto de colaboração que permitisse iluminar as particularidades das diferentes experiências vividas e possibilitasse a criação de espaços para incorporar e respeitar as vozes de cada um dos participantes, que levou Clark et al. (1996) a optarem por um formato de escrita muito particular que designaram por *Readers Theatre*.

O *Readers Theatre* é um enredo escrito, com fortes semelhanças ao guião de uma peça de teatro ou cinematográfica, construído a partir de transcrições de interacções orais e de notas de campo pessoais. Neste guião, cada uma das vozes narradoras é identificada e as palavras usadas são da autoria de quem fala ou escreve. Na versão escrita, a prosa interpretativa aparece em itálico e ocupa um espaço diminuto, comparativamente às elocuções de cada um dos participantes no projecto de colaboração. Foi a escolha deste formato particular de escrita, que não parece ser adequado a qualquer tipo de investigação colaborativa, que permitiu a Clark et al. partilhar a autoria do texto produzido, embora constrangimentos da vida profissional de cada um — relacionados, em particular, com as culturas da escola e da universidade — impedissem que todos dedicassem à tarefa de escrever a mesma quantidade de tempo.

Quão colaborativo pode e deve ser o processo de disseminar, através da escrita, um trabalho que investigadores e professores realizaram em colaboração? A investigação colaborativa exigirá, necessariamente, a co-autoria de relatórios de investigação? A resposta a estas questões, que se inscrevem no problema mais geral da disseminação do trabalho conjuntamente desenvolvido, não é unânime e remete para outras relacionadas com autoridade e autoria, bem como com benefícios, custos e constrangimentos associados à produção dos textos.

Reason (1988c) apresenta algumas soluções, que considera realistas, para lidar com a questão da escrita de textos sobre projectos cooperativamente desenvolvidos. Na perspectiva deste autor, uma delas poderá ser designar um subgrupo, muito pequeno, do grupo de pesquisa, que elaborará a primeira versão, com base num formato e estrutura negociados e estabelecidos por todos, que será posteriormente discutida e comentada por esse grupo. Uma outra possibilidade é o grupo de pesquisa acordar que qualquer um dos seus membros pode escrever sobre o que desejar, desde que indique, claramente, o estatuto da escrita e quem esteve envolvido no projecto. Por exemplo, um dos membros do grupo pode ser autor de um artigo, de que assume completa responsabilidade, onde deve indicar o grupo de pesquisa no âmbito do qual foram obtidos os resultados relatados e incorporar, tanto quanto possível, as modificações sugeridas pelos membros do grupo a uma versão provisória do artigo que entre eles circulou. Reason chama a atenção para que a situação é bastante diferente quando a pesquisa é desenvolvida no âmbito da realização de uma investigação de mestrado ou doutoramento. Segundo este autor, aqui há um conflito ideológico entre os requisitos impostos a tal investigação pelas universidades e os ideais do paradigma colaborativo. Na prática, refere Reason, este problema é, usualmente, ultrapassado, "porque o estudante pode ser visto como o 'investigador principal' e pode escrever a sua perspectiva sobre o projecto nalguma forma de consulta com membros do grupo" (p. 39).

Schroeder e Webb (1997) interrogam-se, contudo, se uma investigação poderá ser designada como colaborativa se apenas a voz do investigador for ouvida no relatório final da investigação. Na perspectiva das autoras, neste tipo de investigação um comportamento ético pode significar que os professores são nomeados na investigação e que o relatório final é apresentado como múltiplas histórias e interpretações e não como uma só verdade em que todas as vozes foram misturadas numa única história.

Se aceitarmos que a disseminação através da escrita, de um trabalho desenvolvido em colaboração por professores e investigadores, deve ser feita através de textos de que todos são co-autores, vários são os problemas que se levantam. Os papéis e responsabilidades destes dois grupos, tal como são definidos pelas instituições a que se encontram associados, são muito diferentes. Clark et al. (1996) indicam que a publicação e a partilha de novo conhecimento é uma parte esperada do trabalho dos investigadores que, muitas vezes, são pressionados para o fazer de maneiras que parecem ir contra o diálogo genuíno que é o factor central da investigação colaborativa, ou seja, contra a partilha da autoridade para descrever o trabalho conjunto. Por outro lado, na sua perspectiva, "embora em termos de investigação ela [a escrita para publicação] possa ser vista como algo que promove a reflexão, profissionalismo ou fortalecimento do professor" (p. 221), esta tarefa não faz parte da definição das suas funções, de quem se espera, antes de mais, que ensine os alunos. Como estas autoras salientam, o dia-a-dia escolar, com as suas rotinas de trabalho, não proporciona aos professores grandes oportunidades para o tipo de escrita que os investigadores praticam e que se espera que produzam. No mundo dos professores são raras as recompensas que esta tarefa lhes traz e muitos poder-se-ão sentir culpados por lhe dedicarem tempo.

O conflito ideológico que Reason refere, a aceitarmos a sua existência, torna natural que os problemas se complexifiquem quando os projectos de investigação colaborativa são desenvolvidos no âmbito de trabalhos conducentes à obtenção de graus académicos. Por exemplo, no campo educativo, proteger a privacidade dos indivíduos participantes e zelar para as suas ideias não serem pessoalmente identificadas é uma exigência que muitas universidades fazem aos investigadores relativamente aos professores com quem trabalham. Contudo, esta exigência dificulta, ou impede mesmo, que os professores, ao ser-lhes escondida a identidade, obtenham méritos da sua contribuição para a investigação. Para alguns dos que trabalham em projectos de investigação colaborativa *com* investigadores, pode parecer injusto que apenas o nome destes apareça em textos referentes a trabalhos que conjuntamente desenvolveram (Schroeder & Webb, 1997). A colaboração que beneficie os professores pode requerer "proporcionar a oportunidade para que mais do que uma pessoa possa ser autora do relatório final do projecto de investigação" (idem, 1997, p. 244), o que, no quadro actual, se torna impossível, quando esse relatório assume a forma de uma tese de mestrado ou doutoramento. É esta a posição assumida por Fiorentini (2004) para quem uma tese académica nunca pode ser uma pesquisa colaborativa pois a escrita não é partilhada.

Encerrando o capítulo. No campo educativo o desenvolvimento de projectos de investigação colaborativa, envolvendo professores e investigadores, constitui uma reacção à hegemonia de uma concepção de conhecimento herdada do positivismo. Esta concepção, subjacente à racionalidade técnica, pressupõe a existência de relações hierárquicas entre universidades e escolas, que conduz a desvalorizar os saberes dos professores e a considerar que devem aplicar aos problemas da prática o conhecimento produzido na universidade, pelos investigadores, sobre o ensino.

Há vários factores que são críticos em qualquer empreendimento colaborativo, seja ele um estudo de investigação ou não. Entre estes incluem-se, em particular, a negociação da situação problema, a determinação, pelas pessoas envolvidas na colaboração, dos caminhos a percorrer e do conhecimento considerado apropriado para os ajudar a encontrar vias para lidar com essa situação, a negociação dos objectivos a prosseguir e a criação e manutenção de relações no interior das quais a construção de sentido tenha lugar. Os problemas e dificuldades agravam-se quando se tem em conta a margem de incerteza associada à investigação colaborativa e o facto de, nalguns casos, os projectos de investigação serem concebidos no âmbito da realização de trabalhos académicos com os constrangimentos e requisitos que, frequentemente, lhes estão associados.

Os caminhos da colaboração podem ser muito diferentes. No entanto, para que um projecto de investigação seja bem sucedido parece ser essencial haver participação voluntária, negociar de uma forma cuidada, honesta, aberta e desde o início, o modo como o grupo irá funcionar, delinear um percurso de trabalho conjunto que se compreenda como apropriado e viável tendo em conta as necessidades, objectivos, interesses, expectativas e desejos de todos e negociar e renegociar as responsabilidades e papéis de cada um, de modo a que os benefícios da complementaridade de experiências, perspectivas e competências governem, para todos, o processo de colaboração. Neste âmbito, não se torna imprescindível a mutualidade na partilha de objectivos, papéis e responsabilidades. O importante é que haja um propósito comum que oriente o trabalho a desenvolver mas que enquadre a possibilidade de interesses e necessidades particulares, que haja uma liderança partilhada e uma relação não hierárquica, e que se crie um clima de à-vontade e respeito mútuo para cada pessoa poder partilhar saberes e experiências e, por esta via, todos poderem aprender.

Capítulo IV

-

Metodologia

Partilho do pressuposto que todos os seres humanos são filósofos no sentido em que são guiados por princípios abstractos que combinam crenças modeladoras do modo como vêm o mundo e agem sobre ele. O que cremos ser a natureza da realidade e o que sobre ela pode ser conhecido (questões ontológicas), o que consideramos ser conhecimento válido sobre esta realidade e as evidências que para ele pensamos serem aceitáveis (questões epistemológicas), como devemos proceder para estudar e compreender aquilo que acreditamos ser possível conhecer (questões metodológicas), constitui, para cada um de nós, um quadro interpretativo, uma visão do mundo, um paradigma, que guia a nossa acção (Denzin & Lincoln, 1994, 2000; Guba & Lincoln, 1994).

É esta visão do mundo que nos indica "o que é importante, legítimo e razoável" (Patton, 2002, p. 69) e, por esta via, nos leva a eleger, ou não, certas questões como problemas que merecem ser investigados e a tomar decisões sobre a forma de o fazer. Assim, o paradigma do investigador informa o paradigma em que a investigação se situa (Guimarães, 2004). O que é fundamental é que os objectivos e questões da investigação, o seu enquadramento teórico, os pressupostos a ele associados e a abordagem metodológica por que se opta, constituam um todo coerente (Santos, 2000).

Pretendia realizar uma investigação cujo foco era o professor e o seu trabalho, ou seja, desejava desenvolver uma investigação com pessoas. Acredito que o ser humano é, num grau significativo, autodeterminado, no sentido em que tem margens de liberdade consideráveis que lhe permitem escolher e ser autor das suas acções. As suas intenções e propósitos, as suas escolhas inteligentes, os seus desejos, os valores e as crenças, os significados que atribui às situações com que se depara e às experiências que vive, são causas daquilo que no seu modo de agir é exteriormente observável. Conhecer este mundo interior a par dos contextos em que se desenvolve a sua acção é, a meu ver, fundamental para poder compreender esta acção e o sentir a ela associado.

Partindo deste pressuposto, queria entender, do ponto de vista do professor, os desafios com que se confronta ao tentar envolver os alunos em actividades de argumentação matemática, conhecer os problemas que enfrenta quando nos seus ambientes de trabalho habituais tenta orientar as suas práticas de ensino neste sentido, compreender que contornos assume o seu trabalho e porque os assume, perceber que aspectos e contextos facilitam ou dificultam, a seu ver, a emergência e desenvolvimento destas actividades.

Este propósito conduziu a opções metodológicas cuja apresentação é o foco deste capítulo. Começo por referir o porquê de uma investigação interpretativa para em seguida me centrar na opção por uma abordagem colaborativa. Termino debruçando-me sobre os procedimentos adoptados na recolha e análise de informação.

Uma investigação interpretativa

Ao analisar a investigação sobre o ensino Erickson (1986) considera que coexistem dois "programas de investigação rivais" (p. 120) cujas diferenças primeiras não se situam no plano dos procedimentos, mas antes no seu foco e propósito. Um destes programas, que designa por positivismo/behaviorismo ou abordagens *standard*, ao delimitar os seus objectos de estudo e ao definir as opções metodológicas, afasta o significado atribuído às acções pelos seus autores. No âmbito das ciências humanas, os postulados ontológicos e epistemológicos que lhes estão associados, conduzem a conceber o objecto de investigação em termos de comportamento, isto é, do "acto físico" (Erickson, 1986, p. 126), pressupondo-se a existência de relações de uniformidade entre comportamentos particulares e os seus significados. Tendo subjacente esta ideia da uniformidade na vida social importada da assunção da uniformidade nas ciências da natureza, para estudar o ensino observam-se comportamentos usando categorias predeterminadas para assegurar a fiabilidade das observações e o "que tem valor é o julgamento do investigador sobre o que significa um comportamento observável e não as definições de significado do actor" (idem). Assim, o mundo subjectivo de quem agiu não é integrado no objecto de investigação, tal como o não são factores relativos ao contexto em que o comportamento ocorreu. Estes aspectos são considerados periféricos ou uma espécie de ruído de fundo de que o investigador deve abstrair-se para poder alcançar a objectividade e descobrir leis gerais explicativas daquilo que observa (Erickson, 1986; Lessard-Hérbert, Goyette, & Boutin, 1990).

Adoptar uma abordagem metodológica informada pelo positivismo/behaviorismo ou pelo pós-positivismo, paradigma sucessor do positivista (Guba & Lincoln, 1994), situar-me na perspectiva da "visão científica ortodoxa" (Reason, 1994, p. 324) daqui oriunda — que coloca o investigador firmemente distanciado e apartado do fenómeno que pretende estudar para, por esta via, alcançar um conhecimento objectivo e, assim, atingir ou aproximar-se *da* verdade — entraria em conflito com o modo como concebo o ser humano e a autodeterminação que lhe reconheço. Entraria, também, em conflito com o propósito de compreender uma prática complexa como é o ensino que requer uma abordagem de análise holística e, além disso, ter em conta a dimensão contextual e temporal das práticas do professor. Não seria consistente, ainda, com o interesse em trazer para primeiro plano e incorporar na investigação intenções do professor, propósitos subjacentes às suas acções, factores de natureza situacional que as influenciam, interpretações que faz dos acontecimentos que neles surgem, aspectos sem os quais não considero ser possível compreender o seu trabalho de ensino. Por último, entraria em conflito com as relações de proximidade que penso serem necessárias para perspectivas pessoais sobre o que se faz e porque se faz poderem ser partilhadas com alguém e com enquadrar as influências recíprocas entre quem investiga e o que é investigado, identificando-as e tendo em conta os seus significados na investigação: "Nenhum fenómeno pode ser compreendido fora da relação com o tempo e o contexto que o gerou, albergou e sustentou" (Lincoln & Guba, 1985, p. 189).

Todos os problemas que vejo no positivismo/behaviorismo no sentido que lhe é atribuído por Erickson (1986), não se colocam se me situar no segundo programa de investigação que este autor indica e que designa por abordagem ou perspectiva interpretativa. Inclui aqui um conjunto de abordagens à investigação sobre o ensino — "etnográfica, qualitativa, observação participante, estudos de caso, interaccionista simbólica, fenomenológica, construtivista ou interpretativa" (p. 119) — que embora tenham especificidades que as distinguem, partilham entre si um aspecto chave: "O interesse central de investigação é o significado humano na vida social e a sua elucidação e exposição pelo investigador" (idem).

Na investigação interpretativa o cerne é a acção e não o comportamento, ou seja, o que importa analisar não é apenas o agir físico observável mas também a sua conjunção com os significados — *meaning-interpretations* (Erickson, 1986, p. 126) — que lhe são atribuídos pelo actor e por aqueles com quem interage. É o conjunto do comportamento com estes significados que constitui a acção. A par da preocupação com o significado atribuído a acções particulares por actores particulares no momento em que elas têm lugar, o investigador que adopta uma abordagem interpretativa interessa-se, também, pela dimensão social da construção destes significados, que corresponde a ter em conta "a relação entre as perspectivas de significado (*meaning-perspectives*) dos actores e as circunstâncias ecológicas da acção na qual se encontram implicados" (idem, p. 127). A investigação interpretativa, no caso do ensino, procura, assim, "compreender os modos pelos quais professores e alunos, nas suas acções conjuntas, constituem ambientes uns para os outros" (idem, p. 128). Grupos de pessoas ao interagirem regularmente constroem normas organizadoras das suas acções e relações que assumem formas particulares consoante o conjunto dos indivíduos envolvidos, pelo que o investigador interpretativo, segundo Erickson, considera que cada sala de aula tem uma micro-cultura distinta da das restantes. Diferenças nestas culturas, que escapam a observações mais distanciadas ou superficiais, podem fazer a diferença entre, por exemplo, ter ou não sentido, para um aluno, envolver-se em determinadas propostas pedagógicas apresentadas pelo professor ou considerar que faz, ou não, parte do seu papel avaliar a pertinência ou correcção das contribuições que surgem no espaço de discurso da aula.

A perspectiva interpretativa interessa-se, assim, "pelas especificidades do significado e acção na vida social que se desenrola em cenários concretos de interacção face a face, e que tem lugar numa sociedade mais ampla que circunda o cenário da acção" (Erickson, p. 156). Desenvolver uma investigação orientada por esta perspectiva é compatível com ver "a sala de aula e o ensino, como um jogo da vida real" (idem, p. 133) que à semelhança do "jogo de xadrez" — metáfora adoptada por Erickson — "é multidimensional, recheado de momento para momento e de dia para dia de paradoxos e contradições" (idem). Perceber este jogo não é possível se se isolar uma das suas peças retirando-a do tabuleiro ou não prestando atenção aos movimentos das outras. Envolve considerar as suas várias dimensões, analisar as suas influências recíprocas, observar cada movimento tendo em conta o contexto em que foi feito e procurando entender porque o foi a partir da perspectiva de quem o fez. Tudo isto passa, em termos metodológicos, nomeadamente por estar no campo em que o jogo é jogado e estabelecer relações de proximidade e confiança com os actores que são parte integrante do jogo e cujas acções se querem compreender.

Face a todas as ideias anteriormente apresentadas, um estudo interpretativo é compatível com o meu próprio paradigma pessoal quanto à forma como concebo o ser humano e a natureza do ensino, bem como com o objectivo de descrever e problematizar, a partir do ponto de vista do professor, o seu trabalho orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, que é um dos objectivos do presente estudo. É também compatível com o compreender perspectivas pessoais sobre a experiência de participação num projecto de colaboração concebido, em particular, para investigar este trabalho, o segundo dos objectivos. O desenvolvimento deste projecto com professores remete para a escolha de uma abordagem compatível com a perspectiva interpretativa mas possibilitadora de um envolvimento activo e significativo do investigador no próprio fenómeno que é objecto de análise.

Uma abordagem colaborativa

É possível misturar elementos de um paradigma com os de outro de modo a envolvermo-nos numa investigação que corresponda àquilo que consideramos ser melhor face à problemática que desejamos abordar e à nossa visão do mundo? Por outras palavras, são os paradigmas comensuráveis? Kuhn (1970) responderia negativamente a estas questões. O seu conceito de incomensurabilidade, que foi talvez a vertente mais criticada do seu pensamento, sustenta que um paradigma ou se aceita ou não se aceita. Não há meio-termo possível.

Esta não é a resposta dada por Lincoln e Guba (2000) embora aconselhem cautela quando se lhes responde afirmativamente. Num artigo ilustrativamente intitulado "Paradigmatic Controversies, Contradictions, and Emerging Confluencies" — em que retomam e expandem as ideias apresentadas em "Competing Paradigms in Qualitative Research" (Guba & Lincoln, 1994) para incorporarem a mudança substancial que ocorreu no âmbito da pesquisa científica social nos seis anos que os separam — afirmam que vários paradigmas pós-modernos estão a começar a "hibridar" (p. 164) de tal modo que argumentos previamente pensados como em conflito irreconciliável começam a aparecer sob novas perspectivas informando-se mutuamente. Consideram, assim, ser possível compatibilizar elementos de vários paradigmas "desde que partilhem elementos axiomáticos semelhantes ou com ressonâncias fortes entre si" (p. 174). Por exemplo, há problemas de comensurabilidade se os investigadores pretenderem "'escolher e eleger' axiomas do modelo positivista e do modelo interpretativo, porque os axiomas são contraditórios e mutuamente exclusivos" (idem). No entanto, na pesquisa participativa e no paradigma construtivista — incluído por Erickson na investigação interpretativa — há elementos que "se ajustam confortavelmente em conjunto" (idem).

Perspectiva geral

Pesquisa participativa é uma expressão muito abrangente e polissémica que inclui várias modalidades de investigação, algumas com diferenças significativas entre si, que têm em comum a existência de uma forte interacção entre investigação e acção. Por exemplo, Reason (1994) inclui aqui três grandes abordagens que designa por *pesquisa cooperativa*, *investigação acção participativa* (*participatory)* e *ciência-acção e pesquisa-acção* indicando que no seu conjunto representam os começos de um "robusto 'paradigma' de investigação com pessoas" (p. 325). Mais tarde, em co-autoria com John Heron, retoma estas abordagens num artigo intitulado "A Participatory Inquiry Paradigm" (Heron & Reason, 1997) onde é referido que só em *pesquisa-acção participativa* foram identificadas 35 variedades. Este artigo é, aliás, um dos trabalhos usados por Lincoln e Guba (2000) para, apoiando-se no pensamento de Heron e Reason, expandirem as tabelas apresentadas em 1994 caracterizadoras dos paradigmas de investigação, de modo a contemplarem o "paradigma participativo/cooperativo" (p. 164), ou simplesmente "paradigma cooperativo" (p. 167) no sentido destes autores.

Partilhando da ideia de que, em certas circunstâncias, há elementos de vários paradigmas que é possível agrupar de modo a constituírem um eixo orientador de um percurso de pesquisa, considero que a investigação que apresento é, para além de interpretativa, também informada por aspectos do "paradigma cooperativo" ou "paradigma colaborativo". Esta última expressão é utilizada por Reason (1988c, p. 18) com o mesmo sentido de "paradigma de pesquisa cooperativa" (idem, 1988b, p. 9).

A pesquisa cooperativa tem raízes na psicologia humanista e, em particular, na ideia de que as pessoas escolhem como vivem as suas vidas sendo esta escolha facilitada pelo trabalho conjunto em grupos regulados por normas de comunicação aberta e autêntica. Considera que os seres humanos co-criam a realidade através da participação, ou seja, através da sua experiência, imaginação, intuição, pensamento e acção. Assume uma ontologia relativista e uma epistemologia alargada que coloca em primeiro plano o conhecimento prático, onde se articulam o conhecimento experiencial, o representativo (*presentational*) e o proposicional para a realização de acções orientadas por propósitos[26]. A metodologia de pesquisa contempla várias fases entrelaçadas de acção e reflexão, que se informam mutuamente, e inclui a criação de condições para que haja lugar para a intersubjectividade crítica a partir da reflexão e problematização de subjectividades pessoais. Daqui resulta uma forma de pesquisa colaborativa em que todos os participantes na investigação se envolvem num diálogo democrático como co-investigadores e co-sujeitos (Heron & Reason, 1997; Reason, 1994). Segundo Reason (1994), esta forma de pesquisa tem mais probabilidades de ser bem sucedida quando é levada a cabo por pequenos grupos de profissionais que se vêem a si próprios como "relativamente fortalecidos (*empowered*) (...) — por exemplo, médicos, professores ou gestores — e que querem explorar e desenvolver a sua prática sistematicamente" (p. 335).

[26] De acordo com Heron e Reason (Heron & Reason, 1997; Reason, 1994), o conhecimento experiencial provém do encontro directo, face a face, com pessoas, lugares ou coisas. O representativo (*presentational*) é o processo pelo qual, em primeiro lugar, ordenamos o nosso conhecimento experiencial tácito; manifesta-se numa compreensão intuitiva e, diferentemente do experiencial, pressupõe uma mediação simbólica através do qual o exprimimos em "imagens, sonho, história, imaginação criativa. O desenvolvimento do conhecimento representativo é uma ponte importante (e frequentemente negligenciada) entre o conhecimento experiencial e o proposicional" (Reason, 1994, p. 326). O conhecimento proposicional é o conhecimento em termos conceptuais, o conhecimento *acerca* de algo, expresso em afirmações e teorias. O conhecimento prático é o conhecimento acerca de *como fazer* algo.

Nem todas as investigações interpretativas, qualitativas, naturalistas ou etnográficas podem considerar-se colaborativas ou orientadas pelos princípios da pesquisa cooperativa. Por exemplo, Erickson (1989) considera que nalguns dos trabalhos que desenvolveu, a assunção do papel de investigador etnográfico que tentava não interferir com as práticas usuais dos professores ou expressar apreciações sobre elas, inibiu um verdadeiro diálogo e, assim, foi uma "barreira à plena colaboração" (p. 433). No mesmo sentido, Heron e Reason (1997) referem que em muita da investigação qualitativa os projectos são modelados unilateralmente pelos investigadores, por mais emergente que o seu desenho possa ser, por mais consentimento informado que procurem e por mais preocupações que tenham em testar os seus resultados junto dos informantes. Ora na pesquisa cooperativa, usando a terminologia destes autores, a investigação é feita pelas pessoas umas *com* as outras e não pelos investigadores *sobre* as pessoas ou *acerca* das pessoas, o que significa que todos têm uma palavra a dizer sobre aspectos importantes do desenho da investigação entre os quais se incluem questões a analisar.

Um projecto de investigação colaborativa

Porque considero que a investigação que desenvolvi foi informada por elementos do paradigma colaborativo? Eu e duas professoras, a partir de uma iniciativa que tomei, desenvolvemos um projecto centrado no envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática em que a acção se entrelaçou com a reflexão e em que procurámos que entre nós existisse um diálogo autêntico e aberto. No capítulo V, dedicado à análise da concepção e desenvolvimento deste projecto, procurarei ilustrar e fundamentar esta ideia. Na sequência do primeiro contacto e de uma troca informal de impressões sobre este tema e de formas de o abordar, delineei, integrando o que ouvi, uma proposta de trabalho a discutir posteriormente que incluía, entre outros aspectos, a gravação em vídeo de algumas das suas aulas que seriam objecto de reflexão colectiva em sessões de trabalho agendadas para o efeito e o percurso de vários ciclos de prática-reflexão-prática.

Para delinear esta proposta inspirei-me no que Wagner (1997) designa por *parceria clínica*, um dos tipos de colaboração entre investigadores e professores em que ambos são agentes de pesquisa, embora os professores sejam, também, objectos de pesquisa, ou seja, são os actores cujo trabalho é descrito e analisado. Inspirei-me, também, no modelo de investigação colaborativa referido por Bednarz, Desgagné, Couture, Lebuis, e Poirier (1999) cujo núcleo central é uma actividade reflexiva sobre aspectos da prática dos professores que constituam assuntos de interesse comum para todos os participantes num projecto. Considerar, neste âmbito, que todas nós seríamos agentes de pesquisa não significava, contudo, aderir à ideia de que o trabalho das professoras deveria ser modelado à luz do meu próprio trabalho enquanto investigadora. Por outras palavras, não considerava necessário nem adequado que houvesse mutualidade na partilha das tarefas de investigação ou igualdade nos papéis que desempenharíamos. O fundamental, a meu ver, seria que todos os elementos do grupo contribuíssem para o pensamento criativo que faz parte dos processos de investigação.

A concretização de um trabalho contemplando actividades do tipo das incluídas na proposta poderia proporcionar, na minha perspectiva, a oportunidade das professoras se envolverem numa *investigação sobre a própria prática profissional*, no sentido atribuído por Ponte (2002) a esta expressão em que integra e expande, em particular, o pensamento de Lytle e Cochran-Smith (1990). Com efeito, considerando, a actividade investigativa como uma "actividade inquiridora, questionante e fundamentada" (Ponte, 2002, p. 6), esperava, através de uma reflexão apoiada na partilha de interpretações de dados empíricos recolhidos nas suas aulas e na discussão de documentos de vários tipos, criar condições para que se envolvessem num trabalho intencional, planeado e problematizador das suas práticas. Este trabalho poderia, por um lado, contribuir para que surgissem olhares mais informados sobre estas práticas e, por outro, ser divulgado no exterior do grupo, se as professoras o desejassem, assumindo, assim, um carácter público gerador de novas oportunidades de reflexão. Este carácter público é, segundo Ponte (2002), "uma característica essencial de uma investigação" (p. 16).

O projecto que viemos a concretizar não excluiu nenhuma das actividades incluídas na proposta que elaborei e que foi sofrendo vários ajustamentos fruto da nossa actividade. Foi a reflexão sobre esta mesma actividade que, por um lado, esteve na base da preparação colectiva dos meios orais e escritos através dos quais tornámos públicas facetas do trabalho desenvolvido e que, por outro lado, nos levou a decidir prolongarmos o projecto para além do que tínhamos inicialmente acordado. No que em particular me diz respeito, foi essa mesma reflexão que me levou a eleger o segundo objectivo da minha investigação, como mencionei na introdução ao presente estudo.

Tendo em conta as ideias que anteriormente apresentei, considero que o projecto desenvolvido foi de investigação colaborativa na medida em que todas nós estivemos envolvidas numa actividade de carácter investigativo, embora a minha investigação tenha características diferentes da das professoras. Neste âmbito podem colocar-se duas questões. A primeira é a de saber se a minha intenção ao contactar com as professoras foi a de propor a realização de uma investição-acção. A segunda é de saber se, *no seu conjunto*, o meu trabalho de investigação se pode considerar uma investigação colaborativa.

A minha resposta à primeira questão é negativa se associar investigação-acção à ideia de investigar uma situação de modo a agir sobre ela e transformá-la (Esteves, 1986) ou à recolha de informações sistemáticas com o objectivo de promover mudanças sociais ou relativas a qualquer outro assunto particular (Bogdan & Biklen, 1994; Miles & Huberman, 1994; Patton, 2002). O meu propósito, ao propor o projecto, era compreender o trabalho de professoras particulares quando intencionalmente o orientam para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. O meu horizonte não era a mudança, a menos que considere que as pessoas não atravessam experiências em que se implicam sem que haja marcas que ficam em si.

Quanto à segunda questão, a resposta não é tão simples. Por um lado, seguindo, por exemplo, ideias de Schroeder e Webb (1997), Erickson (1989) ou

Patton (2002), responder-lhe-ia afirmativamente. Patton, por exemplo, escreve que este tipo de investigação tem o "compromisso de envolver as pessoas no cenário em estudo como co-pesquisadores, pelo menos até um ponto significativo, embora o grau e a natureza do envolvimento variem amplamente" (p. 185). A meu ver, o projecto que desenvolvemos cumpre estes requisitos. Por outro lado, os objectivos e questões da minha investigação foram estabelecidos por mim, embora as professoras os conhecessem. Além disso, para lá das negociações que atravessaram o desenvolvimento de todo o projecto, não estabeleci com elas acordo algum relativamente à análise formal dos dados que originou os capítulos V, VI, VII e VIII deste trabalho, nem as professoras participaram na redacção dos textos preliminares. Apenas conheceram e comentaram uma versão próxima da forma definitiva que vieram a assumir. Ora, segundo Fiorentini (2004) e Heron e Reason (1997), a partilha da escrita do relatório final de uma investigação é condição necessária para que ela seja colaborativa. Assim sendo, nas condições actuais, "uma dissertação ou tese académica nunca poderá ser considerada uma pesquisa colaborativa pois a autoria e o processo de escrita — e, portanto, de análise, (...) são reservados a uma única pessoa" (Fiorentini, p. 66). Esta ideia tem ressonâncias com o conflito ideológico de que fala Reason (1988c) entre os ideais do paradigma cooperativo e os constrangimentos associados à realização de trabalhos académicos. Aceitando este posicionamento, responderia negativamente à segunda questão.

Tendo em conta as duas posições, a literatura sobre colaboração e projectos colaborativos, as características da actividade que individualmente realizei e as daquela em que eu e as professoras colaborámos e aceitando os argumentos de Fiorentini, considero que o meu trabalho, *no seu todo*, não é uma investigação colaborativa, embora tenha havido no percurso que permitiu levá-lo a cabo, como anteriormente procurei fundamentar, uma parte muito significativa e insubstituível que o foi: o projecto que desenvolvemos.

A modalidade estudo de caso

A expressão "estudo de caso" é, de certo modo, ambígua: "Embora a literatura esteja repleta de referências a estudos de caso e de exemplos de relatos de estudos de caso, parece haver pouco acordo sobre o que é um estudo de caso" (Lincoln & Guba, 1985, p. 360). Stake (1994) considera que "um estudo de caso é simultaneamente o processo de aprendizagem acerca do caso e o produto da nossa aprendizagem" (p. 237), posição subscrita por Patton (2002) que, focando-se na análise qualitativa, escreve: "O termo estudo de caso pode referir-se tanto ao processo de análise como ao produto da análise como a ambos" (p. 447). É neste sentido abrangente que considero a expressão "estudo de caso".

No âmbito da abordagem interpretativa-colaborativa no sentido mencionado na secção anterior, optei, dados os objectivos da investigação, pela modalidade estudo de caso. Com efeito, no âmbito de estudos qualitativos, onde se insere o que apresento, a abordagem por estudo de caso constitui, enquanto processo, um modo específico de recolher, organizar e analisar dados que permite obter informação compreensiva, sistemática e em profundidade sobre um caso que constitui objecto de interesse. Esta abordagem, holística e sensível ao contexto, é aconselhável quando se deseja compreender um fenómeno complexo sem escamotear essa complexidade, se acredita que as condições contextuais são fortemente pertinentes para o estudo desse fenómeno, se pretende compreendê-lo em profundidade, se considera ser possível aprender a partir da sua especificidade e carácter único e é possível, para propósitos de investigação, delimitá-lo através de critérios que podem ser de diversos tipos (Creswell, 2002; Patton, 2002; Stake, 1994; Yin, 2003).

Realizar um estudo de caso pressupõe identificar o caso ou os casos sobre os quais incidirá o estudo o que, por sua vez, está intimamente relacionado com a escolha do objecto de estudo: "Um estudo de caso não é uma escolha metodológica, mas a escolha de um objecto a ser estudado" (Stake, 1994, p. 236). Um caso — embora o conceito continue a ser actualmente objecto de debate (idem) — pode definir-se, em termos abstractos, como "um fenómeno de algum tipo que ocorre num contexto limitado (*bounded context*). (...) Há um foco, ou 'coração' do estudo, e uma fronteira de certo modo indeterminada define o limite do caso: o que não será estudado" (Miles & Huberman, 1994, p. 25). Assim, exemplos de casos, podem ser uma pessoa num determinado contexto, a sua experiência de trabalho, um pequeno grupo, um projecto, uma organização ou uma comunidade, um local, acontecimentos ou processos que ocorrem num período de tempo específico (Miles & Huberman, 1994).

Tendo em conta os objectivos da investigação, optei por considerar três estudos de caso: um por cada professora envolvida no projecto e outro cujo foco é o grupo constituído por ambas as pessoas e por mim. Stake (1994) salienta que os estudos de caso podem ser realizados com vários propósitos originando diferentes tipos. Entre os que refere estão o estudo de caso *instrumental* e o *intrínseco*. O primeiro é orientado pelo propósito de iluminar questões particulares que constituam um objecto de interesse do investigador. Aqui a escolha do caso subordina-se ao papel que pode desempenhar para facilitar a compreensão de algo. Num estudo de caso intrínseco são as particularidades do caso que desencadeiam o estudo. Na sua perspectiva, não há demarcações nítidas entre estudos de caso orientados por um ou por outro propósito: "Porque temos, simultaneamente, vários interesses, frequentemente mutantes, não há uma linha que distinga um estudo de caso intrínseco de um instrumental; há antes uma zona de propósitos combinados que os separam" (p. 237). Aceitando esta caracterização e não esquecendo a fluidez da separação referida por este autor, os estudos relativos às professoras são fundamentalmente instrumentais. Foi o desejar compreender o trabalho do professor orientado para o ensino da argumentação matemática que esteve na base da minha opção por procurar pessoas que pudessem desenvolver comigo o projecto, esperando, por esta via, alargar o meu entendimento acerca de um assunto que me interessava. Em contrapartida, o estudo de caso focado no grupo de pesquisa, é sobretudo intrínseco. Foram dúvidas e dilemas relacionados com a melhor forma de levar a cabo o trabalho colaborativo que íamos desenvolvendo e aquilo que escutava das professoras, que motivou o meu interesse pela realização deste estudo de caso.

Procedimentos metodológicos

Apresento nesta secção os procedimentos metodológicos a que recorri para desenvolver o presente estudo. O essencial do trabalho de campo foi realizado ao longo do projecto de investigação colaborativa que se iniciou em Novembro de 2001 e terminou em Agosto de 2003. As duas turmas, uma de cada professora, envolvidas no projecto mantiveram-se durante os dois anos lectivos. No capítulo V abordarei as principais fases e etapas da actividade desenvolvida e sua incidência, a dinâmica do trabalho e suas características e a natureza da relação de colaboração. Indico, em seguida, os critérios que usei para procurar professores que, potencialmente, pudessem participar no projecto.

Em demanda do grupo de pesquisa: Os primeiros passos

Ao decidir enveredar pelo desenvolvimento de um projecto com professores, o primeiro desafio que enfrentei foi o de constituir um grupo que pudesse trabalhar colaborativamente a partir de interesses que, à partida, eram apenas meus. Antes de mais, preocupei-me em identificar critérios que pudessem ajudar-me a fundar um grupo de pesquisa, no sentido de Reason (1988b, 1988c, 1994), ou seja, um grupo "no espírito da colaboração" (idem, 1988b, p. 19) constituído para os propósitos da investigação.

Um dos critérios foi o de contactar com professores que leccionassem turmas do 3º ciclo do ensino básico. Tenho experiência profissional nestes níveis de ensino, quer como docente, quer como formadora. Além disso, atrai-me a ideia de uma educação básica de qualidade para todos e a argumentação inclui-se no conjunto das competências transversais que considero essenciais ao exercício pleno da cidadania. Estava, além disso, interessada em perceber se, como defendem alguns autores (por exemplo, Boero, 1999; Douek, 1998), a formulação e avaliação de conjecturas, pelos alunos, dá sentido e facilita a actividade de produção de provas e, neste processo, com que questões se confronta o professor. No 3º ciclo do ensino básico os alunos já têm alguma maturidade matemática o que me parecia ser favorável à produção de vários tipos de prova.

Adoptei, também, os seguintes critérios: serem professores (a) profissionalizados de nomeação definitiva, com alguma experiência de ensino, (b) interessados pela inovação no ensino da Matemática, (c) que desenvolvessem, ou tivessem desenvolvido, projectos ou actividades profissionais relacionados, ou não, com a sua prática lectiva e (d) que fossem da mesma escola ou de escolas próximas. O critério (d) visava facilitar o encontro de todos os elementos do grupo que tencionava propor ser semanal. Seguindo (a), (b) e (c), esperava encontrar professores empenhados na profissão, com abertura para, se o considerassem pertinente, se aventurarem por caminhos que até ao momento podiam não ter ainda percorrido, e com saberes profissionais relacionados com a construção do currículo de Matemática com alunos do 3º ciclo do ensino básico, níveis de ensino com que há muitos anos não trabalho na sala de aula. Imaginava que professores assim escolhidos poderiam vir a sentir-se motivados pelo desafio que as questões associadas ao ensino e aprendizagem da argumentação matemática colocam e, nesta medida, interessar-se pelo desenvolvimento do projecto.

A decisão de contactar com dois professores prende-se com razões de vários tipos. Reason (1988b, 1988c, 1994) recomenda que os grupos de pesquisa cooperativa, na terminologia que usa, sejam pequenos. Três pessoas, eu e dois professores, satisfaz esta condição. Considerei que este número era adequado para nos podermos debruçar sobre vários momentos da prática de cada um. Este aspecto parecia-me importante pois haveria, assim, oportunidade de reflexões feitas numa determinada altura poderem permitir explorar, questionar, interpretar e informar novas práticas que seriam, por sua vez, objecto de novas reflexões. No que, em particular, me movia, esta característica era propícia à possibilidade de uma compreensão aprofundada das singularidades do trabalho de cada professor e das questões que o atravessam. Adicionalmente, com este número de pessoas no grupo, a proximidade que desejava por considerar ser favorável à construção de uma relação inter-pessoal baseada na confiança, cuidado e compromisso, poderia ser facilitada. A presença de dois professores e não apenas de um só, poderia, além disso, permitir a preparação conjunta de trabalho antes dos encontros colectivos e proporcionar um acréscimo de interacção entre pares. Viabilizaria, também, a possibilidade de cada um deles se confrontar e reflectir sobre práticas que não eram suas, o que poderia contribuir para a interrogação do seu próprio agir. Parecia-me que ambos os aspectos poderiam ser favoráveis a um acréscimo de oportunidades de enriquecimento profissional.

Foi com todas estas ideias em mente que me empenhei em múltiplas conversas com colegas visando identificar possíveis professores a contactar. Uma destas conversas levou-me a assistir a uma comunicação realizada num dos encontros nacionais de professores de Matemática em que uma das apresentadoras era Rebeca. Não a conhecia até essa altura. Sabia que era professora de nomeação definitiva e que tinha participado na concepção e desenvolvimento de projectos ligados à utilização educativa de novas tecnologias. A comunicação incidia, precisamente, numa faceta desta experiência. Sabia, também, que, no conjunto, estes projectos tinham incluído, para além de uma componente mais directamente relacionada com a utilização de tecnologias na aula de Matemática, uma vertente direccionada para a formação de professores. Sabia, ainda, que obstáculos relacionados com a inexistência de financiamento solicitado ao Instituto de Inovação Educacional para o primeiro destes projectos, não a tinham impedido de, com os colegas proponentes, levarem a cabo diversas iniciativas de carácter pedagógico que mais tarde constituíram uma mais-valia na apresentação de novos projectos que vieram a ser financiados.

Suspeitei que Rebeca satisfizesse todos os critérios e o modo como se expressou na referida comunicação reforçou a minha intuição. No final, uma troca de impressões com uma colega da sua escola que muito prezo como profissional e pessoa, contribuiu para que viesse a tomar a decisão de a contactar no sentido de integrar o grupo de pesquisa, embora tivesse uma experiência de ensino um pouco inferior à que considerava desejável. Caso aceitasse participar no projecto, decidi que lhe comunicaria os "meus" critérios e possibilitaria que escolhesse, se o quisesse, o segundo professor a contactar. Tinha-me apercebido que era frequente trabalhar com uma colega de quem era amiga de longa data, também professora de nomeação definitiva numa escola próxima da sua e que, tal como ela, gostava de se envolver em projectos. Foi a conversa que uns dias mais tarde tive com Rebeca que me conduziu até essa colega, Anita, que eu também não conhecia. Por esta via constituímos um grupo para o desenvolvimento do projecto que, com o passar do tempo e o conhecimento recíproco, se veio a transformar num grupo de pesquisa colaborativa. Anita e Rebeca foram os pseudónimos que as professoras escolheram para si próprias perto do final do nosso trabalho conjunto.

Recolha, organização e análise de informação: Perspectiva geral

Clandinin e Connely (1994) designam por *field texts* (p. 419) o conjunto de textos usados para representar aspectos da experiência de campo, expressão que consideram ser preferível ao que usualmente é designado por dados. Incluem aqui, por exemplo, transcrições de registos áudio e vídeo ou notas de campo. No mesmo sentido, também Erickson (1986) considera que "o *corpus* de materiais recolhidos no campo não são em si mesmo dados, mas recursos para dados" (p. 149). Subjacente a esta perspectiva está a ideia de que os dados são construídos a partir destes recursos "através de algum meio formal de análise" (idem). Utilizo a expressão material empírico para designar o conjunto de materiais oriundos do trabalho de campo, onde incluo os *field texts* referidos por Clandinin e Connely, bem como as gravações aí incluídas por Erickson.

A recolha de material empírico decorreu entre Novembro de 2001 e Novembro de 2003 e foi inteiramente feita por mim. Apoiando-me nos meus "cinco sentidos (...) intuição, pensamentos e sentimentos" (Erlandson, Harris, Skipper, & Allen, 1993, p. 82), fui o "principal instrumento" de recolha e análise de informação, tal como indicam diversos autores ao referirem o papel do investigador nas pesquisas naturalistas ou qualitativas (Erlandson et al., 1993; Lincoln & Guba, 1985; McCracken, 1988; Patton, 2002). A recolha iniciou-se no primeiro contacto que estabeleci com Anita e Rebeca destinado a averiguar o seu interesse pelo desenvolvimento do projecto e prolongou-se durante cerca de três meses após a conclusão deste projecto. No anexo 1 apresento o calendário dos *principais* momentos de recolha desse material. Uso a palavra "principais" por duas razões. Em primeiro lugar, porque foi frequente haver entre nós conversas telefónicas ou trocas de *e-mails* relacionados com o desenvolvimento do projecto que não incluí no calendário, embora as tenha considerado durante a fase de análise de dados. Em segundo lugar, porque depois de Novembro de 2003, mantive contactos com as professoras destinados seja a clarificar dúvidas pontuais surgidas durante o processo de escrita dos casos, seja a conversar sobre versões preliminares dos capítulos V, VI, VII e VIII.

A recolha de informação decorreu, sobretudo, nas escolas de Anita e Rebeca e, também, a partir de certa altura, nas suas residências, mais concretamente nos espaços que habitualmente usam para prepararem a sua actividade profissional. A opção por nos reunirmos nas suas casas começou por ser tomada por sugestão de Rebeca devido à maior simplicidade e facilidade na observação dos registos de aulas em vídeo por todos os elementos do grupo de pesquisa. Posteriormente manteve-se, por indicação das professoras, independentemente de haver ou não necessidade de proceder a observações deste tipo. Sistematizo na tabela 3 os métodos utilizados para recolher material empírico, as suas principais fontes de proveniência, formas de registo adoptadas e textos escritos resultantes.

Tabela 3: Recolha de Material Empírico — Métodos, Fontes e Formas de Registo

Métodos	Fontes principais	Formas de registo	Material empírico: Textos
Recolha de documentos	Professoras	—	• Materiais de apoio às aulas • Trabalhos dos alunos • Documentos DEA e DER
Observação	Aulas	• Gravação áudio e vídeo	• Relatório de observação descritivo/analítico • Transcrição
Conversação dialógica	Sessões de trabalho do grupo de pesquisa	• Gravação áudio • Notas de campo	• Memorando descritivo/analítico • Transcrição
Entrevista	Encontros agendados com cada professora	• Gravação áudio	• Transcrição

A tabela 3 ilustra que a informação foi obtida a partir de quatro métodos de recolha, diversificados consoante a fonte de proveniência. Esta diversificação está associada, também, ao papel dominante que assumi em cada um. A recolha de documentos envolveu uma participação pequena da minha parte. Os materiais de apoio às aulas e os trabalhos dos alunos foram-me entregues por iniciativa das professoras, tal como o foram *alguns* dos documentos que designo por DEA ou DER: documentos elaborados, respectivamente, por Anita e Rebeca, que constituem descrições/reflexões escritas relativas a aspectos da sua actividade ou da da colega. Outros documentos deste tipo foram escritos na sequência de acordos estabelecidos no grupo de pesquisa.

Nas aulas que presenciei fui, sobretudo, observadora participante dominando o pólo da observação, se bem que, ocasionalmente, tenha estabelecido alguma interacção com os alunos. Nas entrevistas preocupei-me, sobretudo, em interagir com cada uma das professoras, embora a observação tenha atravessado, também, a sua realização. Como salientam diversos autores (por exemplo, Guimarães, 2003; Patton, 2002) ela é imprescindível, nomeadamente para "ler" mensagens não verbais e captar aspectos contextuais que poderão ser importantes para compreender o que é dito. Pelas mesmas razões, fui também observadora no que designo por conversações dialógicas, embora aqui o meu papel tenha ido muito para além da observação. Tendo por referência a tipologia clássica de classificação dos papéis de um investigador naturalista[27] — participante completo, participante como observador, observador como participante e observador completo (Adler & Adler, 1994) —, poderia dizer que nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa onde estas conversações ocorreram, o meu papel tendeu para o de participante completo e, assim, que recolhi informação através da observação participante.

Considero, no entanto, que a expressão "conversação dialógica" traduz melhor o método através do qual foi obtido o material empírico proveniente destas sessões

[27] Uma investigação qualitativa é naturalista na medida em que tem lugar em cenários da vida real e o investigador não tenta manipular o fenómeno que pretende investigar. Ou seja, este fenómeno desenvolve-se naturalmente no sentido em que não tem um percurso previamente estabelecido por e para o investigador, tal como ocorreria num laboratório ou outros cenários controlados (Patton, 2002).

e a natureza da relação existente entre mim, Anita e Rebeca. Clandinin e Connely (1994) incluem as conversações (*conversations*) no conjunto de métodos para obter *field texts*. Na perspectiva destes autores, as conversações são caracterizadas pela igualdade entre os participantes de um grupo e pela flexibilidade que lhes permite estabelecerem tópicos importantes para a sua pesquisa. A palavra "conversação" é, também, frequentemente usada no âmbito de projectos colaborativamente desenvolvidos, para designar o tipo de interacção que ocorre entre quem neles participa e cujo registo permite apoiar o desenvolvimento de uma investigação (por exemplo, Christiansen & Devitt 1997; Drake & Basaraba,1997; Olson, 1997).

Associo o adjectivo "dialógico" ao substantivo "conversação" para sublinhar que a troca de ideias no grupo de pesquisa foi uma conversação com certas qualidades que vão no sentido do significado atribuído a diálogo por Alrø e Skovsmose (2002), bem como do pensamento de Paulo Freire (1975), educador para quem não pode existir diálogo em relações de dominação e em que não há respeito pelo outro. De acordo com Alrø e Skovsmose, "etimologicamente a palavra diálogo provém do Grego 'dia' que significa 'através' e 'logos' que pode traduzir-se por 'significado'" (p. 115). A expressão "conversação dialógica" visa evidenciar que a conversação se revestiu da forma de um diálogo — não entendido no sentido socrático[28] — orientado pelo propósito de "construir novo significado num processo colaborativo de pesquisa" (idem, p. 116) e que envolveu a exploração de perspectivas e sua problematização, o correr riscos "tanto no sentido epistemológico como emocional" (idem, p. 122) e a manutenção da igualdade entre todos os elementos do grupo o que significa, nomeadamente lidar com a diversidade e as diferenças e não negá-las.

A etimologia da palavra diálogo permitiria, também, designar por conversações dialógicas a troca de ideias que ocorreu entre mim e cada professora

[28] Alrø e Skovsmose (2002) referem-se ao diálogo socrático como aquele em que há alguém que conduz e estrutura a parte fundamental da conversação através das perguntas que faz e outros que pouco contribuem para o diálogo pela brevidade das respostas que o tipo de perguntas permite e pela ausência de questões por si formuladas ou sugestão de outras perspectivas. Para estes autores o diálogo socrático assim considerado, não é um diálogo no sentido em que usam este termo.

durante as entrevistas. Foram “viagens” através do significado nas quais procurei compreender perspectivas pessoais de Anita e Rebeca e entender como viveram a experiência de participação no projecto. Há, aliás, autores que referem que numa pesquisa colaborativa “a recolha de dados envolve mais um diálogo do que uma entrevista” (Patton, 2002, p. 412), posição que tem subjacente a ideia de que na relação de entrevista há uma partilha desigual de poder em que a balança pende a favor do entrevistador. Este, de acordo com “técnicas tradicionais, tenta evitar envolver-se numa conversação ‘genuína’ em que responde a questões formuladas pelo entrevistado ou apresenta opiniões pessoais sobre os assuntos em discussão” (Fontana & Frey, 1994). Há também autores que, embora reconhecendo esta assimetria na partilha de poder, encaram a “entrevista de investigação como uma forma específica de conversação” (Kvale, 1996, p. 19) acerca de um tema em que o conhecimento evolui através de um diálogo entre pessoas.

Optei pela designação “entrevista” para indicar o modo de recolha de informação nos encontros formalmente agendados com cada uma das professoras (tabela 3, 4ª linha) devido a diferenças nos papéis que assumi nestes encontros e nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa. Em ambos os casos, senti-me com liberdade para expressar pontos de vista pessoais e partilhar aspectos da minha experiência. Distanciei-me, assim, de uma técnica de entrevista mais tradicional no sentido que lhe é atribuído por Fontana e Frey (1994). As entrevistas admitem esta possibilidade, como é referido não só por estes autores, mas também, por exemplo, por Bogdan e Biklen (1994) ou por investigadores que as utilizam como meio de elaboração de histórias de vida ou de construção de narrativas biográficas (Guimarães, 2004). No entanto, contrariamente ao que aconteceu nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa, nas entrevistas houve um maior controlo da minha parte em relação ao assumir da palavra para exprimir o que pensava sobre aspectos relativamente aos quais pretendia fazer emergir o mundo pessoal de cada uma das professoras e os seus pontos de vista sobre esse mundo. Utilizando uma expressão de Seidman (1998), procurei que a minha relação com Anita e Rebeca nestes encontros fosse uma relação “eu-tu” — *“I-thou”* (p. 80) — tendendo para o “nós”, mas não me empenhei em que fosse preenchida pelo “nós”. Procurei, assim, encontrar um equilíbrio entre conservar a atenção focada nas suas experiências, e não na minha, e preservar a autonomia e liberdade para enunciarem o que pensavam por palavras por si escolhidas e elaborarem o seu pensamento tão independentemente quanto possível.

A partir da segunda entrevista existia entre nós uma relação de colaboração já construída que, naturalmente, não se esbateu nem foi suspensa devido à especificidade da situação. Não considero, no entanto, que a proximidade e intimidade existentes obscurecessem ou complicassem a realização das entrevistas, que Anita ou Rebeca tentassem “servir” os meus interesses de acordo com aquilo que imaginavam que eu pretendia ouvir, ou que fossem impeditivas de abordar questões mais delicadas ou explorá-las em profundidade. Foi, precisamente, a existência desta relação que facilitou a fluidez e autenticidade do diálogo e também a possibilidade de uma compreensão profunda dos mundos pessoais que referi. Esta experiência vai, de algum modo, em sentido contrário à perspectiva de McCracken (1988) sobre a realização de entrevistas onde a relação entre as pessoas é de colaboração: “Mas há algo na entrevista qualitativa que contraria a colaboração total. (...) O perigo mais óbvio é não ser provável que o respondente, na posse dos termos e objectivos da investigação, dê respostas completamente espontâneas e não estudadas” (pp. 26-7).

Tal como acontece, usualmente, com as investigações interpretativas, naturalistas ou qualitativas, também aquela que desenvolvi originou uma grande quantidade de material empírico. Dada a diversidade de fontes de proveniência, tipos de textos escritos resultantes, o amplo período de tempo ao longo do qual estes textos foram sendo reunidos e o ter iniciado actividades de análise antes da recolha ter sido concluída, um dos desafios com que me confrontei foi o de encontrar uma forma de organização que me permitisse manipulá-los facilmente e “viajar” entre eles de uma forma orientada. Pretendia que esta organização fosse suficientemente flexível para permitir enquadrar novos materiais com relações de familiaridade com outros já existentes: por exemplo, relatório de observação de uma aula, transcrição da mesma aula e trabalhos de alunos apresentados na sua sequência. Pretendia, também, que fosse possível referenciar, sem ambiguidade, cada um dos documentos escritos e ter coordenadas que me permitissem identificar, rapidamente, a proveniência e localização de extractos a incluir nos textos analíticos que fosse elaborando. Pretendia, ainda, que possibilitasse destacar temas ou ideias recorrentemente abordados e/ou aspectos singulares considerados pertinentes face aos objectivos da investigação, bem como situá-los temporal e contextualmente. Tendo em conta estes propósitos, fui tomando, ao longo do percurso de investigação, várias decisões.

Em primeiro lugar constituí três tipos de dossiers. Um tipo destinado ao arquivo de materiais relacionados com a actividade desenvolvida nos encontros do grupo de pesquisa: memorandos e transcrições, precedidas por sumários dos temas abordados, agrupados cronologicamente por sessão de trabalho. Outro tipo continha documentos escritos associados a aulas que presenciei: relatórios de observação, transcrições, materiais de apoio à leccionação e trabalhos dos alunos e/ou *e-mails* trocados entre mim e Anita ou Rebeca, quando existiam, organizados cronologicamente por aula e por professora. O terceiro tipo incluía três secções: as duas primeiras com as transcrições das quatro entrevistas a cada professora organizadas por data de realização e notas pessoais focadas em aspectos relativos ao ambiente em que decorreram; a última tinha os documentos DEA e DER também agrupados cronologicamente por professora. Associados a estes existiam mais dois dossiers de apoio: um com os materiais relativos à preparação das sessões de trabalho em que arquivava também as notas de campo aí registadas; outro com documentos de natureza diversa em que incluí, por exemplo, a descrição de uma reunião com encarregados de educação em que participei parcialmente, cartas de tipo diverso relacionadas com a criação de condições para o desenvolvimento do projecto, notas provenientes de contactos com os presidentes dos conselhos executivos das escolas de Anita e de Rebeca e os materiais coproduzidos por todas nós para divulgar o trabalho desenvolvido.

Em segundo lugar, defini um sistema de identificação e codificação dos vários tipos de documentos. Comecei por atribuir títulos diferenciados a cada tipo e associei-lhes uma sigla ilustrativa da sua incidência. Os documentos relativos a sessões de trabalho foram identificados, individualmente, através da sigla e de uma numeração sequencial que respeitou a localização temporal do encontro. Os associados a aulas (relatórios de observação e transcrições) e as descrições/reflexões escritas elaboradas pelas professoras, com a sigla e data de leccionação ou produção. Nos dois casos em que presenciei, na mesma data, aulas de Anita e Rebeca acrescentei ao código o nome de quem as leccionou. As transcrições das entrevistas foram representadas através da sigla e de uma numeração sequencial atribuída por professora. Por exemplo, *ROA 31/10/02* e *TA 31/10/02* indicam, respectivamente, *Relatório de Observação* da *Aula* e *Transcrição* da *Aula* leccionada em *31/10/02*. Além disso, defini um conjunto de critérios para referenciar os extractos do discurso das professoras ou do meu próprio discurso a incluir nos textos analíticos que possibilitassem, se necessário, localizá-los rapidamente e reler informações respeitantes ao que os antecedeu ou sucedeu: em particular, associar *(TST 14, p. 15)* a um extracto num destes textos, significa que ele se localiza na *página 15* da *transcrição da sessão de trabalho* número *14*. Apresento no anexo 2 o sistema de codificação e os critérios utilizados.

Por último, já perto de iniciar uma análise de dados mais sistemática, aprofundada e formal, senti necessidade de arranjar um "sistema de navegação" que me permitisse ter uma visão holística e diacrónica de toda a informação reunida e, ao mesmo tempo, mover-me eficientemente entre os vários documentos de acordo com o que pretendesse analisar. Em lugar de recorrer a um *software* para análise de dados, decidi criar um sistema constituído por tabelas organizadoras de incidência variada e elaboradas em alturas diversas consoante a necessidade do momento, algumas das quais conduziram, mais tarde, a documentos expandidos que me permitiram ter uma perspectiva mais precisa e ampla sobre vertentes de temas abordados.

No seu conjunto, as três decisões indicadas relacionam-se com o que Huberman e Miles (1994) designam por "gestão de dados", que definem pragmaticamente como "as operações necessárias para um processo sistemático e coerente de recolha, armazenagem e recuperação" (p. 428) de informação. Várias das tarefas que realizei, associadas a estas decisões, pertencem ao campo da análise que, segundo estes autores, envolve "três fluxos concomitantes de actividade: redução de dados, apresentação de dados (*data display*), e formulação/verificação de conclusões" (Miles & Huberman, 1994, p. 10) que interactuam ao longo de todo o desenvolvimento de um projecto. A redução é "um processo de seleccionar, focar, simplificar, abstrair e transformar dados" (idem) que atravessa "qualquer projecto qualitativamente orientado" (idem) e começa mesmo antes de se iniciar a recolha de material empírico — redução antecipada— a partir de opções relativas ao enquadramento teórico, de questões de investigação e de abordagens metodológicas. Escrever sumários ou memorandos, codificar, identificar temas, fazer partições ou agrupamentos, escolher extractos de material empírico, são formas de redução de dados. Os relatórios de observação de aulas, os memorandos das sessões de trabalho do grupo de pesquisa e os sumários associados à transcrição destas sessões, são exemplos de actividades de análise incluídas na redução de dados que acompanharam a recolha de material empírico.

O desenho do "sistema de navegação" anteriormente referido, conduziu, também, a actividades diversas de redução de dados resultantes do formato adoptado — fundamentalmente tabelas — e de decisões sobre o que incluir em cada linha, coluna e célula. Estas tabelas têm semelhanças com as matrizes referidas por Miles e Huberman (1994) que as incluem no conjunto de formas possíveis de "apresentação de dados", considerada como "o segundo maior fluxo de actividade analítica" (p. 11). Segundo estes autores, a "apresentação" (*display*) consiste em agrupar e comprimir organizadamente informação de uma maneira acessível que permita ao analista seja formular conclusões justificadas, seja mover-se para novas fases de análise, seja ainda observar dados de um modo exploratório. Um modo típico de apresentação para os investigadores qualitativos é, na sua perspectiva, textos longos, não reduzidos e pouco estruturados, que se atingem, por exemplo, milhares de páginas, podem não só dificultar a percepção global, mas também levar a perder não intencionalmente informações importantes para a compreensão do significado dos dados e/ou a formulação de conclusões.

Os itens que incluí nas linhas e colunas das tabelas foram diversificados de acordo com o objectivo com que as construía e a fase de análise de dados em que me encontrava. Apresento um exemplo que pode esclarecer o significado que atribuo à expressão "sistema de navegação" e de que modo o utilizei.

Para elaborar as primeiras versões dos capítulos VI e VII e dada a incidência principal destes capítulos — análise detalhada de um pequeno número de aulas leccionadas por cada professora — trabalhei, mais em profundidade, com uma parte muito restrita do conjunto das transcrições, relatórios de observação de aulas e memorandos das sessões de trabalho focadas na reflexão sobre aulas. No caso das entrevistas e documentos DEA, DER, apenas seleccionei dados associados às aulas em análise. O processo que veio a conduzir à escrita dessas versões fez emergir um conjunto de categorias e subcategorias de análise relacionadas com o trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Pretendia, no entanto, apresentar uma visão mais abrangente do trabalho de Anita e Rebeca do que a possibilitada pela análise das referidas aulas. Para me ajudar a olhar, simultaneamente, para a actividade de ambas as professoras, ter uma visão global dos caminhos percorridos, das ideias que recorrentemente e/ou comummente abordaram e do que é específico no trabalho de cada uma, construí, para cada categoria, uma tabela com três colunas e tantas linhas quantas as subcategorias identificadas até à altura: uma coluna destinada às subcategorias, outra a Anita e outra a Rebeca. Li, seguindo uma ordem cronológica, todas as transcrições das sessões de trabalho e entrevistas realizadas após o início da reflexão sobre aulas que presenciei, os memorandos destas sessões e os documentos DEA e DER. Durante a leitura fui deixando nas várias células das tabelas "traços" evocativos do conteúdo do que lia respeitando a cronologia: extractos do discurso das professoras, resumos de ideias apresentadas, palavras-chave e localização. Este processo fez emergir aspectos que não podiam ser incluídos nas subcategorias identificadas, o que conduziu à introdução de novas linhas na tabela e, assim, permitiu o aperfeiçoamento do sistema de categorias. Simultaneamente, possibilitou uma "navegação" fácil entre vários documentos o que facilitou significativamente a escrita do capítulo VIII. Quando quis, por exemplo, escrever sobre o trabalho que foi sendo desenvolvido por ambas ou cada uma das professoras para negociar normas de acção e interacção consideradas favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, o formato e organização das tabelas simplificou a comparação, permitiu uma visão temporal e foi eficaz para localizar as fontes donde extraí a informação que nelas incluí e rever o contexto em que foi proferida.

A par do exemplo que apresentei, organizei várias outras tabelas destinadas a diversos fins. Miles e Huberman (1994) indicam que as matrizes, enquanto forma de apresentação de dados, permitem a formulação de conclusões. A menos que considere, tal como o fazem estes autores, que desde o início da análise se começam a formular "conclusões" no sentido em que se está a decidir o que as coisas significam mesmo que o posterior teste conduza a alterações, não utilizei as tabelas para extrair conclusões. Fundamentalmente, usei-as para observar dados de um modo exploratório, combiná-los e intuir percursos de análise. A sua construção resultou da necessidade de encontrar formas que me permitissem lidar com o elevado número de páginas do conjunto de documentos escritos oriundos do trabalho de campo e com a dispersão de informações sobre o mesmo fenómeno (por exemplo, uma aula) ou tema, por vários documentos. Foram muito importantes, mas sublinho que não dispensaram a leitura recorrente dos documentos "em bruto" donde extraí a informação que incluí nas suas células durante o processo de escrita dos casos. Como procurei salientar, permitiam-se identificar os vários "locais" em que eram abordadas determinadas ideias, notar semelhanças e diferenças e ter uma visão temporal dos acontecimentos e actividades desenvolvidas. No entanto, durante a redacção dos casos foi na consulta dos documentos que me apoiei e não foi invulgar as novas leituras levarem à introdução de aspectos não incluídos aquando da elaboração das tabelas.

As ideias anteriormente apresentadas permitem salientar três aspectos associados à perspectiva geral adoptada para recolher e analisar informação. O primeiro aspecto prende-se com a interdependência existente entre a recolha de material empírico e a análise de dados, ideia que encontra eco não apenas em Miles e Huberman (1994), mas também em vários outros autores que se debruçam sobre investigação interpretativa/qualitativa (por exemplo Erickson, 1986; Patton, 2002). Esta interdependência foi útil para delinear direcções a prosseguir quanto ao meu próprio trabalho de investigação e para apoiar o desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa. Contudo, a análise mais formal, ou seja, mais directamente direccionada para a escrita dos casos, só foi iniciada depois da terceira entrevista, altura em que já tínhamos dado por terminados os encontros do grupo de pesquisa. Anteriormente predominou a recolha e a partir daqui a análise. Tomei esta opção por duas razões. A primeira, porque pretendia ter uma visão ampla do trabalho de Anita e Rebeca e não contaminada por "conclusões" excessivamente prematuras, para poder decidir mais informadamente sobre a forma mais adequada de estruturar os casos. Patton (2002) salienta que um foco excessivo na análise enquanto decorre o trabalho de campo pode interferir com a abertura das investigações de natureza naturalista que é uma das suas forças, ideia que merece o meu acordo. A segunda razão, prende-se com as exigências de tempo e concentração que o próprio processo de análise mais formal acarreta, a meu ver, não facilmente compatíveis com o forte envolvimento na acção que o desenvolvimento do projecto requereu.

O segundo aspecto que marca a perspectiva de recolha e análise de informação, relaciona-se com a constituição do *corpus* (Bardin, 1997), ou seja, com o conjunto de todos os documentos provenientes do trabalho de campo sobre os quais incide a análise de conteúdo. No caso da investigação que desenvolvi reveste-se da forma de textos escritos incluídos nos *dossiers* anteriormente referidos e em que os significativamente mais longos provêm de transcrições: entrevistas, sessões de trabalho e aulas. Exceptuando o caso de uma entrevista, todas as restantes transcrições foram feitas por mim a partir da audição e/ou visionamento dos registos magnéticos.

Transcrever "envolve traduzir de uma forma oral de linguagem, com o seu conjunto próprio de regras, para uma linguagem escrita com outro conjunto de regras" (Kvale, 1996, p. 165). Assim, qualquer transcrição é uma construção artificial que pressupõe uma série de juízos e decisões e que, tal como um mapa, é uma abstracção derivada da realidade que a originou e não uma cópia "exacta" dessa realidade. Pode, no entanto, haver maior ou menor ligação entre o discurso oral produzido em interacções face a face e o discurso escrito que o representa. No caso das transcrições que elaborei há, neste campo, diferenças significativas entre as oriundas dos registos magnéticos de entrevistas e as provenientes das gravações de aulas ou sessões de trabalho.

Nas entrevistas há um forte paralelismo entre os dois tipos de discurso relativamente à globalidade de cada uma. Numa primeira audição, efectuada tão próximo quanto possível da realização da entrevista para as memórias do não dizível não se esbaterem, transcrevi literalmente todas as elocuções pronunciadas, assinalei risos, pausas prolongadas, entoações, dúvidas associadas a extractos não inteligíveis e introduzi a pontuação de modo a tornar compreensível o discurso procurando não deturpar o significado. Estas mesmas indicações foram dadas à pessoa contratada para transcrever aquela cuja primeira versão escrita não construí. Depois de impressos os textos resultantes deste processo ou obtida esta versão, procedi a uma segunda audição destinada a avaliar a sua fidelidade. Ajustei a pontuação, introduzi correcções quando foi necessário, eliminei algumas dúvidas porque entendi palavras que antes não tinha conseguido compreender e mantive assinalados os locais onde esta compreensão não foi possível, tentando, assim, que o texto escrito traduzisse o mais fielmente possível a oralidade. Fazendo minhas as palavras de Guimarães (2003), procurei elaborar "uma reconstrução de natureza factual, puramente descritiva onde, por via de regra, não intervém interpretação que ultrapasse a que a composição do texto obriga, em particular e quase exclusivamente, no que se refere à sua pontuação" (p. 24). Os documentos assim obtidos foram enviados a Anita ou Rebeca, consoante a entrevista, para leitura, rectificação e/ou possíveis anotações e comentários. Tive em conta todas as suas sugestões, que embora de carácter pontual, permitiram eliminar a maior parte das dúvidas e tornar certas passagens mais claras. Os textos corrigidos por esta via foram integrados no *corpus*.

Quanto às aulas e sessões de trabalho, é menor a ligação entre a globalidade do discurso oral e as transcrições construídas. Em qualquer dos tipos de situação, há momentos em que o discurso não é transcrito mas condensado em resumos através dos quais procurei sintetizar o essencial das interacções existentes. Nos restantes momentos, segui um procedimento análogo ao das entrevistas exceptuando, no caso das sessões de trabalho, a leitura posterior por Anita e Rebeca. Considero, assim, que estas transcrições foram parciais, contrariamente ao que aconteceu com as provenientes das entrevistas.

Relativamente às aulas, transcrevi os episódios relacionados com actividades de argumentação matemática localizados nas fases de trabalho com toda a turma. Quando foi possível escutar interacções associadas a estas actividades entre as professoras e os alunos durante o trabalho de pares/grupos, transcrevi-as também. Os restantes momentos foram resumidos. As transcrições foram partilhadas com as professoras, que também contribuíram para a identificação do que deveria ser transcrito, e serviram de apoio à reflexão sobre aulas que presenciei. Abordarei este aspecto com mais detalhe no capítulo V (secção *Observação e reflexão sobre aulas*). Em relação às conversações localizadas nas sessões de trabalho, transcrevi as associadas a reflexões sobre aulas ou sua preparação, as focadas na experiência de participação no projecto e as relativas a outros aspectos que considerei relevantes para poder analisar a dinâmica de colaboração e o trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Sintetizei os restantes diálogos e anotei indicações possibilitadoras de os localizar nas cassetes de gravação se pretendesse voltar a ouvi-los, o que veio, por vezes, a acontecer. Em qualquer dos casos — aulas e sessões de trabalho —, recorri a *itálico* e cores diferenciadas para distinguir os segmentos transcritos dos segmentos resumidos.

O terceiro aspecto que saliento sobre a perspectiva geral de recolha e análise de informação, prende-se com o processo de construção do sistema de categorias. Ao iniciar o trabalho de campo, possuía um património de saberes de diverso tipo relacionados com a problemática de investigação que, naturalmente, não "deixei à porta". Assim, e partilhando das perspectivas de Popper e Kuhn sobre os processos de produção da ciência, não abordei os fenómenos que pretendia investigar com o "espírito em branco" esperando que me "falassem": as observações que fiz estão elas próprias impregnadas de teoria no sentido em que o meu quadro interpretativo pessoal as influenciou. Abordei, no entanto, esses fenómenos, não para provar teorias ou testar hipóteses prévias à investigação, mas procurando compreendê-los e esforçando-me, conscientemente, para que as minhas próprias perspectivas não boicotassem ou limitassem esta possibilidade. Assim, o presente estudo não se situa no que Lessard-Hérbert et al. (1990) designam por "contexto da prova" (p. 95) ou seja, um contexto em que "a actividade de investigação tem como objectivo primordial a verificação de uma dada teoria, independentemente da maneira como esta foi elaborada ou formulada" (idem).

O referencial teórico contribuiu para, previamente ao trabalho de campo, identificar um pequeno conjunto de temas amplos que considerei pertinentes para me ajudar a observar e analisar o trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática: (1) "apoio à formulação e avaliação de conjecturas", (2) "ensino do discurso de prova" e (3) "exploração de situações de desacordo". O primeiro ano do projecto e, sobretudo, a actividade de reflexão sobre aulas, reforçou, por um lado, a pertinência destes temas e, por outro lado, fez sobressair a relevância de um quarto, que designei por "constituição de uma comunidade de discurso matemático". Além disso, reforçou, relativamente a cada um, a necessidade de dedicar uma atenção especial aos problemas experienciados por Anita e Rebeca. Mais tarde, estes temas, a "leitura flutuante" (Bardin, 1997, p. 75) do material empírico, a construção do "sistema de navegação", o enquadramento teórico da investigação e os seus objectivos e questões, interagindo entre si, fizeram emergir, através um critério de categorização semântico (Bardin, 1997), as categorias de análise do trabalho do professor, bem como as subcategorias a considerar.

A identificação de categorias para analisar a actividade do grupo de pesquisa de modo a elaborar o caso focado neste grupo, não seguiu um processo diferente do que acabei de descrever, exceptuando não ter partido para o trabalho de campo com alguns temas orientadores de observação e análise estabelecidos *a priori*. No entanto, estas categorias não foram "totalmente definidas *a posteriori*, sem que qualquer pressuposto teórico oriente a sua elaboração" (Vala, 1986, p. 113). Com efeito, foi da leitura do material empírico informada pela teoria sobre trabalho e projectos colaborativos que emergiram intuições sobre aspectos relevantes, ideias significativas de início pouco estruturadas, reflexões, hipóteses, que originaram as primeiras categorias temáticas, posteriormente aperfeiçoadas pela sua utilização numa primeira fase de análise dos dados e por novas leituras desse material. No anexo 3 incluo o quadro de leitura do *corpus* orientador do processo de análise.

Debruço-me, em seguida, sobre aspectos particulares associados à recolha de material empírico e análise de dados.

Recolha documental

Um modo de obtenção de dados com menor expressão que os restantes e que desempenhou uma função complementar, foi a análise de documentos que recolhi durante o trabalho de campo: materiais de apoio às aulas que presenciei, trabalhos de alunos e textos elaborados por Anita ou Rebeca. De entre estes, tiveram um maior peso os documentos DEA e DER, embora tenha tido em conta os materiais de apoio às aulas e, muito em particular, as fichas de trabalho. Esta situação prendeu-se com a relevância da informação neles incluída que me permitiu clarificar dados pertinentes para a compreensão do trabalho realizado pelas professoras obtidos através de outras vias.

Os trabalhos dos alunos que Anita e Rebeca me entregaram foram objecto de troca de ideias nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa e, tal como aconteceu com outros, originaram reflexões diversas focadas na análise de dificuldades dos alunos e delineamento de estratégias de acção futura para tentar ajudá-los a ultrapassarem-nas. Quando foi pertinente fazê-lo face às categorias estabelecidas, foram os comentários das professoras a seu propósito que seleccionei.

Um outro tipo de documentos que considerei no processo de análise do trabalho do grupo de pesquisa, diz respeito aos materiais relativos à divulgação de vertentes da actividade desenvolvida no âmbito do projecto e de que todos os elementos do grupo são co-autores.

Aulas

Ao longo do projecto de investigação colaborativa presenciei, relativamente a cada uma das professoras, dois conjuntos de aulas diferenciados entre si pela localização, número e propósito associado à observação. O primeiro conjunto tem, no total, quatro elementos e designo-o por aulas de familiarização. O propósito exclusivo da minha presença nestas aulas foi o de conhecer as turmas e proporcionar aos alunos alguma familiaridade comigo e com os materiais de gravação que incluíam uma câmara de filmar, factor significativamente obstrusivo da naturalidade. O seu registo em vídeo foi entregue a Anita ou Rebeca no final de cada aula e, contrariamente a todas as outras que presenciei, não foram instituídas intencionalmente como objecto de reflexão: "Quando se usa equipamento de filmagem, pode ser necessário um período de ajustamento, um tempo inicial no qual não são recolhidos dados" (Erlandson et al., 1993, p. 98).

O segundo conjunto é constituído por trinta aulas de Anita ou de Rebeca, vinte e quatro das quais também observadas[29] por ambas as professoras. Estas aulas

[29] A palavra "observação" deve ser entendida como observação presencial de aulas ou dos seus registos em vídeo e/ou respectivas transcrições. Neste sentido, considero que todos os elementos do grupo de pesquisa estiveram envolvidos na observação destas aulas, se bem que nenhuma das professoras tenha assistido presencialmente às aulas da colega.

foram, intencionalmente, seleccionadas no âmbito das actividades do projecto, porque se esperava que nelas viessem a surgir episódios significativos de argumentação matemática, o que veio a acontecer em todos os casos excepto um[30]. Durante o ano lectivo de 2001/02, a duração de cada uma das cinco aulas leccionadas, semanalmente, por Rebeca foi de 50 minutos. Duas destas aulas eram sequenciais, embora separadas por um pequeno intervalo, o que originou o que designo por *aula dupla* representada por *(D)*. Em 2002/03 uma das aulas desta professora tinha a duração de 90 minutos e as três restantes de 45 minutos. Em qualquer dos anos lectivos, Rebeca leccionou no laboratório de Matemática uma aula semanal a cada um dos dois turnos em que a turma se dividia, onde os alunos trabalhavam, usualmente, com o computador. Ao longo de todo o projecto, as duas aulas semanais de Anita foram sempre de 90 minutos. A tabela 4 ilustra a distribuição das aulas que presenciei após a fase de familiarização.

Tabela 4: Aulas Presenciadas e sua Distribuição no Tempo

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Março a Junho de 2002</th><th>Outubro 2002 a Janeiro 2003</th><th>Maio 2003</th></tr>
<tr><td>Anita</td><td colspan="2">7</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rebeca</td><td>Turno</td><td>4</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Turma</td><td>3 + 4(D)</td></tr>
</table>

Na tabela 4 o somatório dos números existentes na zona sombreada a cinza mais escuro (24), representa as aulas sobre as quais se debruçou *principalmente* o grupo de pesquisa durante as sessões de trabalho do projecto. Uso a palavra “principalmente” por três razões. A primeira é que para além destas, analisámos, também, uma aula de Rebeca gravada por um colega, que não presenciei[31]. A segunda é que cada professora se responsabilizou pela gravação em áudio da sua primeira aula do ano lectivo de 2002/03 para a qual estava planeada uma actividade

[30] Não transcrevi extractos da gravação desta aula por nenhum dos elementos do grupo de pesquisa considerar que nela existiam episódios relevantes de argumentação matemática.

[31] No capítulo V indicarei o porquê desta gravação não ter sido, intencionalmente, feita por mim.

considerada relevante face ao tema do projecto[32]. A partir da audição desta gravação ambas seleccionaram aspectos que consideram significativos, relatados numa das sessões de trabalho e objecto de análise conjunta. A terceira razão é que a reflexão das professoras sobre a sua prática não se restringiu, exclusivamente, às aulas registadas magneticamente. Com efeito, em encontros colectivos, Anita e Rebeca, espontaneamente ou fruto de interpelações minhas, relataram e interpretaram episódios diversos ocorridos em várias outras.

O processo adoptado para analisar as vinte e quatro aulas foi partir da observação/reflexão individual prévia à sessão de trabalho dedicada a cada uma, tendo como materiais de apoio o registo em vídeo e/ou transcrição, para a observação/reflexão colectiva que ocorria na sessão[33]. O tom cinza mais claro usado na tabela 4 (quatro aulas de turno), significa que Anita não pôde reflectir, individualmente, sobre estas aulas. Presenciei-as sobretudo com o objectivo de melhor compreender as aulas de discussão que se lhes seguiram. Face ao que observei na primeira aula, a uma conversa com Rebeca e aos objectivos do meu próprio trabalho, não nos pareceu relevante proceder à sua gravação em vídeo. Assim, Anita teve acesso aos acontecimentos destas aulas apenas indirectamente. É por estas razões que não as incluí no conjunto daquelas sobre as quais considero ter incidido a reflexão do grupo. Esta opção não significa, no entanto, que não tenha havido aspectos destas aulas analisados colectivamente. Rebeca referiu-se-lhes, com frequência, nomeadamente para explicar e fundamentar como organizou as aulas de discussão. A zona não sombreada da tabela 4 indica aulas (duas) não analisadas nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa. Localizaram-se na última etapa da segunda fase do projecto, ocasião em que tínhamos já decidido encerrar o trabalho

[32] Por sugestão de Anita e Rebeca, decidimos que eu não estaria presente em nenhuma destas aulas precisamente por ser a primeira. Concretamente, acordámos que seria apresentada uma tarefa potencialmente favorável ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, de exploração não muito longa, e cuja discussão seria usada para "dar o tom" às normas de acção e interacção que regulariam a actividade da aula de Matemática ao longo do ano lectivo que se iniciava e, simultaneamente, para averiguar o grau de apropriação dos alunos de normas que as professoras procuraram negociar no ano lectivo anterior. Rebeca seleccionou uma tarefa de carácter investigativo escolhida entre as existentes num dossier que fomos construindo ao longo do projecto e Anita decidiu usá-la também na sua turma.

[33] Na subsecção *Observação e reflexão sobre aulas* incluída no capítulo V descreverei e analisarei o processo que adoptámos e as principais alterações introduzidas ao longo do desenvolvimento do projecto.

conjunto. Qualquer uma destas aulas foi objecto de reflexão pela professora que a leccionou durante a quarta entrevista, tal como acordámos ao delinear o trabalho a realizar nesta etapa (capítulo V). Contrariamente às restantes (excepto uma), esta aula não foi transcrita e a actividade reflexiva teve por suporte, apenas, as memórias e o registo em vídeo que lhe foi entregue pouco após a leccionação e anteriormente à entrevista.

Das vinte e quatro aulas referentes à zona sombreada a cinza mais escuro na tabela 4, vinte e duas foram, simultaneamente, registadas em áudio e vídeo. Problemas técnicos impossibilitaram esta simultaneidade, que era desejada, no caso de duas aulas de que apenas existiu um dos tipos de registo. Optei por montar a câmara de vídeo num tripé e movimentá-la de modo a conseguir uma boa imagem e som dos acontecimentos e interacções que ocorriam. O registo em áudio, que funcionava como apoio à gravação em vídeo, foi obtido a partir de um mini-gravador a que estava acoplado um microfone de lapela, que as professoras transportavam discretamente consigo. Este último tipo de registo foi fundamental em várias ocasiões. Por exemplo, permitiu-me compreender e/ou transcrever extractos que não eram perceptíveis na gravação em vídeo, aspecto muito relevante, sobretudo, nas aulas de Anita leccionadas em salas com condições acústicas particularmente más. No caso daquela que não filmei por impedimento técnico, possibilitou, também, completar as anotações detalhadas que fui fazendo durante a aula[34]. Procurei, assim, elaborar uma "reconstituição" escrita dos acontecimentos, que enviei às professoras previamente à sessão de reflexão que lhe foi dedicada. Foi através desta via — e não através da gravação em vídeo como aconteceu nos restantes casos — que os observou Anita. Exceptuando esta aula, nas restantes quase não registei notas de observação, se bem que tivesse junto de mim um caderno que me foi útil, nalgumas ocasiões, para anotar aspectos sobre os quais pretendia conversar com as professoras.

[34] Considerando as várias modalidades possíveis de observação de aulas, procurei fazer uma observação não focada, anotando, o mais exaustivamente que consegui, o desenvolvimento de toda a aula.

Como anteriormente referi, nas aulas que presenciei o meu papel foi, fundamentalmente, o de observadora participante não interveniente. Quando delineei a primeira proposta de trabalho do projecto ou quando a negociámos, não imaginei interagir com as professoras durante as aulas ou com os restantes elementos das turmas, tal como veio a acontecer embora com pouca expressão. Por vezes, Anita ou Rebeca, enquanto os alunos trabalhavam entre si, dirigiram-se ao local onde me encontrava e trocámos breves impressões. A primeira vez que conversei com os alunos foi durante um trabalho de grupo por sugestão de Anita. O comentário desta ocorrência numa das sessões de trabalho, revelou-me que, também para Rebeca, era natural eu desempenhar este papel se o desejasse. Fi-lo, por vezes, quando as solicitações às professoras eram em número elevado, quando os alunos me interpelavam insistentemente como se eu fosse uma outra docente da turma, ou quando quis compreender situações que me intrigavam. Numa aula de Anita e duas de Rebeca, leccionadas em ocasiões em que o à-vontade entre nós já era muito grande, fiz um conjunto de quatro intervenções dirigidas ao colectivo da turma. Três tiveram por objectivo ajudar a ultrapassar situações de impasse. Na outra lancei um desafio, enraizado na contribuição de um aluno, cujo propósito foi incentivar o aprofundamento da exploração da tarefa que tinham em mãos. Em qualquer dos casos, as intervenções foram muito breves e surgiram na sequência de ter obtido o aval das professoras a cargo de quem ficou a condução e organização de toda a actividade subsequente.

Elaborei, para cada aula, um relatório de observação incluindo uma componente descritiva e outra analítica. Fi-lo, no próprio dia da leccionação, apoiada nas minhas memórias e num primeiro visionamento da gravação em vídeo. A componente descrita organizava-se em torno de cinco pontos[35] principais:

(a) objectivos e estrutura da aula (início, fases de desenvolvimento e encerramento);

[35] Para conceber a primeira versão do documento orientador da observação das aulas em que incluí estes pontos, apelei à minha própria experiência profissional de acompanhamento da prática pedagógica de professores e futuros professores e tive por referência o anexo IV existente em Santos (2000, pp. 746-8).

(b) tarefa(s) proposta(s) e metodologia de trabalho: origem, natureza e conteúdo da tarefa; modalidades de trabalho e sua articulação; materiais de apoio;

(c) discurso da aula: características principais e papéis desempenhados pela professora e pelos alunos;

(d) episódios de argumentação matemática significativos: emergência, tipologia, desenvolvimento;

(e) ambiente da aula: ritmo, grau de envolvimento dos alunos, atitude da professora e dos alunos, relações interpessoais.

No campo destinado aos comentários analíticos, incluí questões a analisar durante a sessão de reflexão sobre a aula, aspectos que se tinham destacado como parecendo facilitar ou dificultar a emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática e movimentos de ensino particulares sobre os quais pretendia conversar com as professoras.

Depois de feita a transcrição da aula e previamente à sessão de trabalho em que seria analisada, cada uma das componentes do relatório foi revista e ampliada. Foi frequente, por exemplo, introduzir nos pontos (c) e (d) extractos da transcrição que ilustravam ideias aí incluídas. Noutras alturas optei por incluir, com o mesmo propósito, anotações que remetiam para páginas do próprio documento da transcrição.

Mantive os cinco pontos anteriormente indicados em todos os relatórios de observação de aulas, embora os itens de discriminação de (c), (d) e (e) tivessem sido ampliados de modo a enquadrar aspectos que se foram evidenciando como sendo relevantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Normas reguladoras de acção e interacção, processos de negociação de normas e evidências da sua apropriação e transgressão pelos alunos são, entre outros, exemplos destes aspectos. O que designei por componente descritiva dos relatórios foi ficando mais extensa e detalhada à medida que o projecto progredia.

Apercebi-me de que havia vantagens em que o texto referente aos episódios de argumentação matemática tivesse "vida autónoma", isto é, que a sua leitura me permitisse reviver os acontecimentos a eles respeitantes sem necessitar, de imediato, de consultar outros documentos para compreender o essencial. Este aspecto facilitou, em particular, o processo mais formal de análise do trabalho das professoras. Nalguns casos, relacionados sobretudo com as aulas observadas na segunda fase do projecto (2002/03), estes textos têm pontos de contacto com o que Erickson (1986) designa por *narrative vignette* (p. 149) no sentido em que mantive a sequência cronológica dos episódios, para cada um descrevi o que foi dito e feito respeitando a ordem por que o foi na realidade e procurei construir um retrato claro e expressivo destes momentos particulares das aulas.

Sessões de trabalho

Ao longo do desenvolvimento do projecto existiram 42 sessões de trabalho cuja duração oscilou entre duas e quatro horas. Por vezes, houve necessidade de alguns reajustamentos em datas previamente acordadas, devido a situações imprevistas ou incompatibilidades oriundas de outros compromissos profissionais. O que privilegiámos foi a possibilidade de todos os elementos do grupo de pesquisa poderem participar, o que sempre aconteceu.

Estas sessões começaram por se realizar na escola de Rebeca onde havia salas disponíveis e alguma garantia de podermos trabalhar sem interrupções. A partir do décimo encontro, esta professora disponibilizou a sua casa, situada nas proximidades da escola, e passámos, na quase totalidade das vezes, a reunir ora aqui, ora na casa de Anita que também manifestou o desejo de aí nos encontrarmos. Duas, destinadas à troca de ideias sobre versões preliminares de materiais a usar na divulgação do trabalho, realizaram-se noutros locais: uma em minha casa e outra num local público escolhido por conveniência das professoras.

As sessões tiveram objectivos diversificados consoante a fase do projecto e a actividade planeada para cada momento: por exemplo, análise e discussão de documentos de diverso tipo, análise de episódios de sala de aula de origem variada, selecção, análise e elaboração de tarefas matemáticas e reflexão colectiva sobre aulas presenciadas por mim. Neste âmbito, predominaram as sessões de carácter reflexivo sobre estas aulas. Aprofundarei estas ideias no capítulo V em que procurarei, também, ilustrar relações existentes entre várias das actividades desenvolvidas.

Das 42 sessões de trabalho, 39 foram registadas em áudio. Não o foi a primeira, a quarta e a trigésima terceira. A primeira porque não me pareceu conveniente fazê-lo. Anteriormente a ela tinha conversado só uma vez com Anita e Rebeca para averiguar do seu interesse pela participação no projecto. Nessa ocasião referi a necessidade de proceder à gravação das sessões e nenhuma das professoras se manifestou contra a possibilidade. Pareceu-me, no entanto, adequado retomar este assunto depois de terem tido oportunidade de reflectir individualmente sobre a nossa conversa sem a presença do gravador. Foi um problema técnico que impediu o registo magnético da quarta. A partir daí comecei a levar comigo dois gravadores, embora só começasse a usá-los, simultaneamente, mais tarde. A trigésima terceira foi a realizada no local público e a especificidade da conversa planeada não me pareceu justificar a gravação, como vim a confirmar depois. As 39 sessões gravadas deram origem a 36 documentos de transcrição elaborados segundo o processo descrito numa secção anterior. Três destas sessões, duas das quais destinadas a ultimar aspectos relativos à divulgação do trabalho, não foram transcritas, tal como não o foi uma outra de carácter organizativo. Depois de ouvida a gravação não considerei relevante transcrever extractos, pois o essencial estava incluído nos respectivos memorandos. Finalizada cada transcrição, reli-a com o propósito de identificar os principais temas abordados ao longo da sessão. Estes temas davam origem a títulos que introduzia ao longo do documento numa cor diferente das aí existentes e usava-os para elaborar o sumário de cada encontro. Obtinha, assim, um registo da conversação que respeitava a sua sequência temporal mas que tinha uma estrutura identificada por um primeiro processo de análise.

Durante o decurso das 42 sessões, registei notas de campo e, para cada uma, redigi um memorando que elaborei o mais proximamente possível da sua data (no mesmo dia ou dia seguinte). A exemplo dos relatórios de observação de aulas, estruturei os memorandos em duas partes principais que intitulei *O trabalho* e *Impressões gerais*. O registo da primeira é, sobretudo, descritivo. Apoiando-me nas anotações e, se necessário, numa primeira audição da gravação destinada a evocar memórias ou clarificar/confirmar detalhes, relatei o essencial da actividade desenvolvida, as principais decisões tomadas, o que as fundamentou e resumos de ideias apresentadas por Anita ou Rebeca consideradas por si significativas quanto ao tema do projecto e ao seu desenvolvimento. Tal como fiz nos relatórios de aulas, incluí, por vezes, extractos de transcrição das sessões com o propósito de ilustrar aspectos da descrição. A segunda parte — *Impressões gerais* — é um balanço reflexivo sobre a actividade desenvolvida no encontro. A ênfase foi a especulação, sentimentos, problemas, ideias, intuições, dúvidas existentes e/ou clarificadas, correcções de interpretações anteriores, planos de trabalho futuro (Bogdan & Biklen, 1994). Registava as ideias que, no momento, se me afiguravam como relevantes para iluminar o trabalho das professoras orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, conjecturas sobre padrões que me pareciam emergir, aspectos que para mim não eram claros relativamente a vertentes desse trabalho, questões a debater que pudessem ajudar a problematizá-lo e a delinear hipóteses de actividade futura e conexões entre ideias referidas na sessão e outras anteriormente abordadas. Além disso, a reflexão focava-se no próprio processo de trabalho colaborativo, em problemas ou dificuldades que pessoalmente sentia ou intuía em Anita ou Rebeca, em estratégias para lhes fazer face, no ambiente existente e contornos da relação interpessoal, em interrogações que se me colocavam para a prossecução do trabalho conjunto e em potencialidades que ia percepcionando neste trabalho. Esta componente reflexiva dos memorandos foi particularmente útil para preparar sessões de trabalho subsequentes, para delinear aspectos a abordar na segunda e terceira entrevistas e para construir o caso focado no grupo de pesquisa.

Entrevistas

Uma investigação que pressupõe que nem tudo aquilo que é importante se pode observar, que pensamentos, sentimentos e intenções estão subjacentes ao agir do ser humano e que conhecer o significado atribuído por cada um à sua experiência é fundamental para se poder entendê-la, traz para primeiro plano a necessidade de encontrar modos de aceder a pontos de vista pessoais sem os predeterminar através de categorias seleccionadas *a priori* (Patton, 2002). Entre estes modos estão certas formas de entrevista: "Se o objectivo do investigador, contudo, é compreender o significado que as pessoas envolvidas na educação atribuem à sua experiência, então a entrevista proporciona uma necessária, se não sempre completamente suficiente, via de pesquisa" (Seidman, 1998, pp. 4-5).

Há vários tipos de entrevista que se distinguem entre si quanto ao grau de estruturação e partilha do controle do discurso, profundidade, extensão, abertura das questões e presença ou ausência de uma relação face a face. Questões abertas ou de resposta aberta estabelecem territórios a ser explorados e, simultaneamente, permitem a quem é entrevistado escolher a direcção que a resposta tomará. A questão não influencia a resposta e, assim, entrevistas com perguntas abertas possibilitam compreender o mundo tal como ele é visto pelo entrevistado. Entrevistas semi-estruturadas situam-se na interface entre as orientadas por questões previamente redigidas e colocadas na situação de entrevista respeitando integralmente a sua formulação e sequência (entrevistas estruturadas) e aquelas em que a maior parte das questões emergem do fluxo da conversação e em que existe uma flexibilidade máxima para seguir qualquer direcção que pareça apropriada (não estruturadas) (Patton, 2002).

Realizei durante o percurso de investigação quatro entrevistas a cada professora. Querendo assegurar que certos temas seriam abordados, ter a liberdade de conversar a seu propósito sem restrições de ordem sequencial ou de formatação das perguntas, integrar no diálogo questões não antecipadas, explorar direcções não previstas e garantir a possibilidade de Anita e Rebeca organizarem o seu discurso como entendessem, optei por entrevistas semi-estruturadas. Preparei-me para cada uma elaborando um guião, intencionalmente intitulado *Tópicos de conversa*, com questões de resposta aberta ou aspectos que pretendia abordar. Na tabela 5 apresento a data, duração *(D)* e local de realização *(L)* de cada entrevista *(E)*, bem como a sua articulação com as fases do projecto que desenvolvemos.

Como a tabela 5 ilustra, a duração das entrevistas oscilou entre uma hora e três horas e trinta minutos. Foram, assim, entrevistas longas e a de maior duração foi sempre a terceira. Em todos os casos, o local de realização foi indicado pelas professoras de acordo com as suas preferências. Exceptuando a primeira, que decorreu no laboratório de Matemática da escola de Rebeca, as restantes realizaram-se na sala de trabalho pessoal das suas residências. O ambiente foi sempre sossegado e agradável, o que permitiu que a conversa fluísse naturalmente, com à-vontade e sem interferências. Procurei assumir uma atitude de "neutralidade empática" (Patton, 2002, p. 50), o que não significa distanciamento ou abstenção de resposta a algumas interpelações que as professoras me dirigiram: "neutralidade (...) significa simplesmente que o investigador não parte para provar uma perspectiva particular ou manipular os dados de modo a chegar a verdades preestabelecidas. (...) Empatia combina compreensão cognitiva com ligação afectiva" (idem, pp. 51-2).

Tabela 5: Entrevistas Realizadas

	Primeira fase do projecto 2001/2002		Segunda fase do projecto 2002/2003	
Anita	E1: 23/11/01 D: 1 hora L: Escola de Rebeca	E2: 22/07/02 D: 2 horas L: Residência	E3: 18/03/03 D: 3,5 horas L: Residência	E4: 31/07/03 D: 2 horas L: Residência
Rebeca	E1: 23/11/01 D: 1 hora L: Escola de Rebeca	E2: 19/07/02 D: 1,5 horas L: Residência	E3: 12/03/03 D: 2,5 horas L: Residência	E4: 04/08/03 D: 2 horas L: Residência

A incidência das entrevistas foi diversa, embora nas três últimas tenha havido aspectos recorrentemente abordados, quer por minha iniciativa, quer por iniciativa das professoras. Foram, assim, cíclicas e cumulativas no sentido em que a anterior permitiu identificar tópicos para a seguinte e as informações obtidas se complementaram (Guimarães, 2004). A primeira teve características diferentes das restantes. Incidiu sobre o percurso profissional de Anita e Rebeca, relação com a profissão e com a Matemática, motivações para o envolvimento no projecto, significados atribuídos a argumentação e argumentação matemática, tentativas feitas no sentido do envolvimento dos alunos em actividades deste tipo, dificuldades experienciadas e perspectivas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática (anexo 4). As seguintes foram entrevistas de reflexão sobre a experiência de participação no projecto e em qualquer uma foi incluída a dimensão temporal, ou seja, procurei que fosse analisado o presente, o passado e o futuro com o olhar do presente associado a cada momento. A segunda realizou-se cerca de oito meses após o início do projecto e a terceira depois de mais oito meses, isto é, no final de encerrarmos as sessões de trabalho de todo o grupo de pesquisa. O conteúdo de uma parte significativa de ambas as entrevistas incidiu sobre o próprio processo de desenvolvimento do projecto e o trabalho colaborativo que lhe esteve associado: o que representou a experiência de participação, mais-valias existentes e o que contribuiu para que surgissem, factores que influenciaram o desenrolar do trabalho, aspectos que o facilitaram, enriqueceram ou dificultaram, fontes de satisfação, dificuldades, problemas ou vulnerabilidades, perspectivas sobre a relação de colaboração e visões sobre a articulação entre os nossos papéis e objectivos (anexos 5 e 6). Este conteúdo não foi abordado na quarta entrevista, realizada quatro meses após a terceira. Uma análise preliminar do material recolhido até à data, revelou-me que as informações obtidas eram suficientemente claras e detalhadas para me permitir compreender os pontos de vista de Anita e Rebeca sobre este tema.

O mesmo não aconteceu com o segundo tema dominante em qualquer das três entrevistas subsequentes à primeira: o trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática tendo como referência a experiência vivida durante o projecto. A segunda entrevista foi uma primeira aproximação às perspectivas de cada uma das professoras sobre este tema: aspectos considerados importantes para o sucesso de uma aula orientada para este envolvimento e cuidados a ter, dúvidas, dificuldades, problemas experienciados, estratégias adoptadas para lhes fazer face, questões ultrapassadas, ou não, o que contribuiu para que o fossem e confronto entre perspectivas existentes no início do projecto e perspectivas actuais (anexo 5). A terceira entrevista (anexo 6) focou-se, por um lado, na actividade desenvolvida no tempo que a separou da segunda e incidiu, em particular, sobre alterações/mudanças introduzidas nas práticas e sobre ideias pré-existentes que ganharam força, ou novas ideias surgidas, consideradas relevantes para compreender o trabalho do professor. Por outro lado, esta entrevista centrou-se na globalidade da experiência desde o início do projecto. Neste âmbito, foram retomados aspectos abordados na segunda entrevista, o que permitiu clarificar e/ou aprofundar ideias aí referidas e foram, de novo, confrontadas perspectivas passadas com presentes, relacionando estas últimas com o percurso colaborativo. A quarta entrevista (anexo 7) foi orientada, fundamentalmente, por dois propósitos. O primeiro foi complementar a informação recolhida através de outras vias, de modo a ter uma perspectiva mais ampla e precisa sobre aspectos que uma primeira análise desta informação me levou a considerar pertinentes mas não detalhada e suficientemente explorados: trabalho associado à emergência e exploração de situações desacordo, preparação de aulas intencionalmente orientadas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e pontos de vista pessoais sobre a Escola e as turmas envolvidas no projecto. O segundo propósito foi o de averiguar que problemas se mantiveram ou surgiram após a conclusão das sessões de trabalho e aperceber-me dos aspectos destacados pelas professoras como sendo particularmente relevantes para o referido envolvimento. Algumas das questões associadas a este propósito foram contextualizadas pela análise individual de duas aulas que presenciei: a última de cada professora, que não foi objecto de reflexão no grupo de pesquisa, e a primeira, também de cada uma, que o foi.

Previamente às quartas entrevistas acordei com Anita e Rebeca que, relativamente a estas aulas, cada uma revisitaria as que tinha leccionado a partir do respectivo registo em vídeo. Ambas o fizeram quanto à última. Rebeca fê-lo, também, relativamente à primeira, acompanhando o visionamento com a transcrição existente. Anita, por motivos imprevistos de última hora, apenas teve tempo de reler e reflectir sobre a aula a partir da sua transcrição. Decidimos, durante a entrevista, que posteriormente observaria a gravação em vídeo e que seriam acrescentadas ou alteradas ideias referidas se o entendesse. Como me indicou mais tarde, não considerou necessário fazê-lo.

Embora recomendado por alguns autores, não efectuei anotações em nenhuma das entrevistas, excepto, pontualmente, uma ou outra palavra evocativa de um aspecto aflorado pelas professoras a explorar com maior profundidade. Estas palavras funcionavam como "auxiliares de memória" que me ajudavam a não interromper o seu discurso e me libertavam para melhor poder concentrar-me na substância do que ouvia e atentar em aspectos da comunicação não verbal. Por estas mesmas razões, ou seja, para me poder entregar completamente à escuta e à observação, e também para conseguir articular naturalmente os aspectos que queria abordar com o diálogo existente, procurei apropriar-me, no caso das duas primeiras entrevistas, do conteúdo dos documentos *Tópicos de conversa* de modo a não precisar de os consultar em situação. Esta estratégia não foi necessária na terceira e na quarta entrevistas porque enviei os respectivos documentos a Anita e Rebeca anteriormente à data que para elas acordámos. Tomei esta decisão por duas razões. Em primeiro lugar dada a natureza das entrevistas: reflexão sobre a experiência vivida. Em segundo lugar, devido às potencialidades que fui percepcionando na escrita pessoal para o desenvolvimento do diálogo, aspecto especialmente relevante em Anita.

Durante a segunda entrevista dei-me conta destas potencialidades. Na sessão de trabalho que a antecedeu recordei o conteúdo da informação incluída no plano de trabalho negociado no início do projecto a propósito desta entrevista (anexo 8) e trocámos breves impressões sobre o assunto. Rebeca, por iniciativa pessoal, elaborou, previamente à realização da entrevista, um documento escrito de carácter reflexivo onde sistematizou o que considerou ser pertinente e que, no final, me entregou. A existência deste documento não impediu a naturalidade do diálogo e apercebi-me que o esforço investido na sistematização prévia de ideias contribuiu para o enriquecer. Simultaneamente, à medida que fui conhecendo melhor Anita, dei-me conta que a escrita pessoal funciona para si como um forte elemento de organização de ideias. Foi frequente, por exemplo, preparar-se para as sessões de reflexão sobre aulas suas ou da colega elaborando anotações extensas e detalhadas sobre aspectos a partilhar ou discutir. Compreendi que gosta de ter um tempo pessoal para reflectir individualmente sobre aquilo que faz, pensa ou sente, e para registar os frutos destas reflexões.

Ao preparar a terceira entrevista equacionei possíveis efeitos perversos e mais-valias de enviar às professoras um documento com tópicos de conversa previamente à sua realização. Um dos inconvenientes encontrados foi o de condicionar o conteúdo do que seria dito pela exclusão, por Anita e/ou Rebeca, de aspectos que na ausência destes tópicos abordariam. Entre as vantagens poderia estar a profundidade da reflexão. Decidi enviá-los por três razões que se reforçaram mutuamente. Em primeiro lugar, porque os tópicos eram suficientemente abrangentes e abertos para permitir elaborações diferenciadas do pensamento e a emergência de perspectivas e significados pessoais. Em segundo lugar, porque na altura havia já uma significativa relação de colaboração entre nós que me dava a confiança suficiente para supor que Anita e Rebeca estariam à-vontade para introduzirem aspectos considerados por si importantes independentemente de eu os abordar ou não. Por último, porque numa conversa telefónica que tive com cada professora, percebi que, do seu ponto de vista, haveria vantagens em reflectirem sobre os aspectos em que incidiria a entrevista antes de conversarem comigo. Como Rebeca referiu, "assim até posso pensar melhor". Tanto nestas ocasiões, como nos *e-mails* que enviei com os *Tópicos de conversa*, ficou claro que eram *apenas* tópicos, que não deveriam determinar o conteúdo da entrevista, que poderiam abordá-los pela forma e ordem que quisessem, relacioná-los, ou não, como desejassem e que teriam liberdade para dar início às entrevistas como entendessem.

Olhando para a globalidade de todas as entrevistas, não considero que o envio dos documentos com os *Tópicos de conversa* tivesse empobrecido, enviesado ou dificultado o diálogo. Antes pelo contrário. Por exemplo, Anita para a terceira entrevista elaborou um documento escrito com nove páginas em que incluiu aspectos diversos, alguns dos quais não me tinham ocorrido, que foi desenvolvendo ao longo da conversa de mais de três horas que tivemos, o que originou uma transcrição de perto de 100 páginas. Estes documentos não conduziram, assim, a que eu detivesse, enquanto entrevistadora, "o controle no decurso de todo o processo" (p. 162), aspecto que Lessard-Hérbert et al., (1990) consideram caracterizar a "entrevista *orientada para a resposta*" que contrapõem a "entrevista *orientada para a informação*"[36]. As entrevistas que realizei, a meu ver, aproximam-se mais deste último tipo que "permite ao entrevistado exprimir os seus sentimentos e os seus interesses sem receio de estar a ser manipulado pelo entrevistador" (idem, p. 163).

Análise de dados: Aspectos particulares

A análise qualitativa é uma tarefa complexa e multifacetada, que envolve reduzir a informação recolhida, separar o trivial do significativo, identificar padrões relevantes, encontrar sentido nos dados e construir uma forma de comunicar o essencial do que eles revelam face aos propósitos da investigação. Não há fórmulas nem receitas para nenhuma destas actividades, embora possa haver orientações. "Porque cada estudo qualitativo é único, a abordagem analítica será única" (Patton, 2002, p. 433) também.

Apresento, em seguida, aspectos particulares do meu percurso de análise, incluindo aqui os três fluxos de actividade indicados por Miles e Huberman (1994), de modo a ilustrar e completar ideias incluídas na subsecção *Recolha, organização e análise de informação: Perspectiva geral*. Refiro também os tipos de triangulação a que recorri durante o processo de análise do material empírico. Considerando globalmente o percurso de análise distingo três fases principais.

[36] O destaque existente em "entrevista *orientada para a resposta*" e "entrevista *orientada para a informação*" surge no texto de Lessard-Hérbert et al. (1990, p. 162). Estes autores referem estas duas amplas categorias de entrevista apoiando-se no pensamento de Powney e Watts.

A primeira fase é concomitante com o essencial da recolha de material empírico. Excluindo a redução antecipada de dados no sentido de Miles e Huberman (1994), inicia-se com o projecto de investigação colaborativa (Novembro de 2001) e prolonga-se até à realização das terceiras entrevistas (Março de 2003). Algumas das actividades analíticas incluídas nesta fase foram já referidas: relatórios de observação de aulas, memorandos e sumários das sessões de trabalho e análises preliminares destes documentos ou de transcrições tendo em vista delinear tópicos a abordar em novas entrevistas. O próprio processo de construção das transcrições das sessões de trabalho e das aulas envolveu também uma actividade de análise significativa. Implicou distinguir o essencial do acessório tendo em conta os objectivos da minha investigação e, no caso particular das aulas, um dos fins a que se destinavam — partilhá-las com as professoras como meio de apoio à reflexão —, para decidir o que transcreveria ou resumiria.

Nesta primeira fase, o meu processo pessoal de análise de dados entrelaçou-se e foi alimentado pela análise feita pelas próprias professoras sobre material empírico oriundo das suas aulas. As reflexões individuais de cada uma de nós possibilitaram intuições, interpretações, hipóteses explicativas, formulação de questões, identificação de relações, observação de semelhanças e diferenças ou recorte de informação considerada significativa, cuja partilha e discussão nas sessões de trabalho contribuiu para a construção de novos significados sobre os fenómenos em estudo. Destaco, neste âmbito, a preparação de uma das formas de divulgação das actividades do projecto — grupo de discussão — que envolveu actividades analíticas de redução e apresentação de dados e de formulação de conclusões, em que todos os elementos do grupo de pesquisa se envolveram a nível individual e colectivo[37].

[37] Preparar o grupo de discussão implicou, em particular, seleccionar de entre todas as transcrições e/ou gravações em vídeo coligidas até ao momento, extractos que pudessem permitir ilustrar aspectos significativos do trabalho do professor relacionado com o tema do projecto, problemas a ele associados, questões em aberto e ideias consideradas na altura relevantes para facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. No capítulo V, subsecção *Divulgação do trabalho: Preparação e concretização*, retomarei este aspecto.

A segunda fase do percurso analítico iniciou-se na sequência imediata da terceira entrevista e incluiu a realização da quarta. Teve em vista a construção dos casos e organizou-se em duas etapas em que adoptei estratégias diferenciadas. Na primeira centrei-me, fundamentalmente, na análise "microscópica" de quatro aulas de cada uma das professoras. Na segunda etapa foquei-me na análise de todos os dados relativos ao trabalho desenvolvido no grupo de pesquisa.

Comecei a primeira etapa por Rebeca, a professora com quem iniciei a observação de aulas analisadas no grupo de pesquisa, com quem realizei mais cedo a terceira entrevista e de quem obtive, também mais cedo, os comentários às transcrições, quer desta entrevista quer da segunda. No início desta etapa analisei material empírico respeitante a *todas* as suas aulas: (1) transcrições, (2) respectivos relatórios de observação, (3) memorandos das sessões de trabalho em que foram objecto de reflexão e (4) respectivas transcrições. Segui a ordem cronológica das datas em que foram leccionadas e analisei em paralelo os quatro documentos relativos a cada uma. Fui, assim, identificando "unidades básicas de análise" (Erickson, 1986, p. 149) associando-as às categorias temáticas (a) "apoio à formulação e avaliação de conjecturas", (b) "ensino do discurso de prova", (c) "exploração de situações de desacordo", (d) "constituição de uma comunidade de discurso matemático" e (e) "preparação da prática lectiva". Usei um processo simples consistindo na colagem, nos vários textos, de pedaços de *post-it* de cores diferenciadas consoante a categoria. Na margem direita destes textos, intencionalmente ampla, fui anotando ligações entre os vários documentos, comentários analíticos e subcategorias a considerar, algumas das quais vieram a originar, mais tarde, novas categorias: "negociação de significados (de conjectura, contra-exemplo e prova)" e "problemas experienciados". Foi nesta última que incluí todos os dados relativos a dúvidas, dificuldades, problemas ou dilemas referidos por Rebeca.

Iniciei, em seguida, um processo de construção de várias tabelas do tipo das referidas a propósito do "sistema de navegação", uma das quais destinada ao levantamento, por aula, dos episódios significativos associados a argumentação matemática e relações entre episódios. O anexo 9 representa uma das páginas desta tabela. A análise do conteúdo desta e das restantes tabelas conduziu à opção de analisar em detalhe um pequeno conjunto de aulas de cada professora. As relações entre episódios de uma aula ou aulas associadas à exploração de uma mesma tarefa eram frequentes como, aliás, o anexo 9 revela. Considerei significativo não perder estas relações. Preocupações ou decisões subjacentes a movimentos de ensino de Rebeca ou intervenções de alunos associados a um determinado episódio, só podiam ser entendidos tendo em conta o que até aí se passou na aula e o que se lhe seguiu. Além disso, há interacções relevantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, apenas visíveis quando se observa "ao microscópio" o que professor diz aos alunos e como o diz na sequência do que ouve: por exemplo, *redizer* de certa forma as suas contribuições (Forman, Larreamendy-Joerns, Stein, & Brown, 1998), usar acontecimentos em que são transgredidas normas reguladoras da acção e interacção consideradas favoráveis a este envolvimento para as renegociar, ou devolver ou não, à turma, intervenções que lhe são endereçadas pelos alunos. Analisar, em particular, movimentos das professoras no decurso de interacções deste tipo, contextualizando-os na globalidade da aula que tem, em si mesmo, uma unidade, poderia permitir iluminar melhor a natureza do seu trabalho e destacar os problemas que ele coloca.

Os critérios usados para seleccionar as aulas foram os seguintes:

- considerar, relativamente a cada professora: o mesmo número de aulas e de tarefas exploradas;
- existirem em cada aula ou no conjunto de aulas associadas à exploração de uma mesma tarefa, momentos de trabalho colectivo focados na apresentação/análise/discussão de frutos do trabalho dos alunos;
- haver em cada aula ou no conjunto de aulas associadas à exploração de uma mesma tarefa, episódios associados à (a) formulação/avaliação de conjecturas, (b) produção de provas de conjecturas não refutadas (c) e emergência/exploração de situações de desacordo;

- localizarem-se nas duas fases do projecto;
- terem, entre si, diferenças significativas quanto ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática;
- terem sido observadas por todos os elementos do grupo de pesquisa e objecto de reflexão individual e colectiva.

Seguindo estes critérios e após uma primeira leitura das transcrições das aulas de Anita e respectivos relatórios de observação, a escolha caiu na primeira aula de cada uma das professoras analisada nas sessões de trabalho (primeira fase do projecto) e num conjunto de três aulas leccionadas na segunda fase dedicadas à exploração de uma só e mesma tarefa.

Dediquei-me, em seguida, a complementar os dados já sistematizados e organizados nas tabelas sobre a primeira das aulas de Rebeca a partir da leitura das entrevistas de reflexão realizadas até ao momento e dos documentos DER. Orientando-me por estas tabelas e apoiando-me nos documentos usados para as elaborar, fui construindo, através de um processo em que a análise se entrelaçou com a escrita e a indução com a dedução, a primeira versão do "retrato" do trabalho de Rebeca nesta aula, que, posteriormente, originou a segunda secção do capítulo VI. Obtida esta versão, e por um processo globalmente idêntico ao que descrevi, analisei o conjunto das restantes três aulas desta professora e elaborei o respectivo texto analítico. Durante o processo de construção destes "retratos", tomei algumas decisões mantidas na análise "microscópica" das quatro aulas leccionadas por Anita:

- incluir na categoria "apoio à formulação e avaliação de conjecturas" todos os dados relativos à refutação de conjecturas pelo seu teste, embora esta actividade, no que se prende com o trabalho do professor, seja uma vertente do ensino da prova[38]; esta opção prende-se com o facto das

[38] Por exemplo, Veloso (1998) refere: "Um tipo de demonstração que pode surgir muito cedo é aquela que consiste na apresentação de um contra-exemplo para demonstrar a falsidade de uma afirmação" (p. 372).

actividades de partilha, avaliação e refutação de conjecturas estarem, com frequência, fortemente entrelaçadas;

- considerar para cada uma das categorias “formulação e avaliação de conjecturas”, “ensino do discurso de prova”, “exploração de situações de desacordo” e “constituição de uma comunidade de discurso matemático” a subcategoria “problemas experienciados” associando-lhe os dados cuja incidência principal é a da categoria;
- escolher para designar cada “problema experienciado” um extracto do discurso da professora revelador da incidência do problema, fazendo, se necessário, pequenos ajustamentos de forma; usar o mesmo critério na designação de episódios de sala de aula alargando-o de modo a contemplar extractos do discurso dos alunos;
- para efeitos de apresentação de episódios de aulas manter a ordem pela qual as intervenções surgem na aula, mas alterar a numeração atribuída a cada uma no documento de transcrição da aula de onde os episódios foram extraídos; em cada episódio atribuir à primeira intervenção o número 1, excepto quando os episódios apresentados forem sequenciais, ou seja, no caso de não ter sido omitida, entre eles, nenhuma intervenção registada na transcrição; nestes casos, e só nestes, incluir o símbolo “(...)” no final do primeiro episódio e início do seguinte e atribuir à primeira intervenção deste, o número consecutivo ao atribuído à última daquele.

As actividades de análise e interpretação realizadas a propósito das aulas de Rebeca foram inspiradoras do estudo do trabalho de Anita nas quatro aulas seleccionadas e, nesse sentido, influenciaram-no. No entanto, este estudo também influenciou a análise anteriormente feita. Contribuiu para me aperceber de aspectos relevantes não considerados ou insuficientemente desenvolvidos, o que conduziu a novas leituras de algum do material empírico associado às aulas de Rebeca e, nalguns casos, à reformulação de partes dos textos analíticos já produzidos.

Iniciei a segunda etapa da segunda fase do percurso de análise, após a conclusão da análise "microscópica" das aulas de ambas as professoras. O propósito desta etapa foi, como anteriormente referi, a construção do caso cujo foco é o grupo de pesquisa. Não me alongo sobre o processo de análise seguido que tem muitas semelhanças com o adoptado na primeira etapa. Uma das diferenças reside, naturalmente, nos itens incluídos no quadro orientador da análise (anexo 3). Uma outra diferença prende-se com o conjunto de materiais empíricos donde foram extraídos os dados. Não considerei transcrições de aulas, respectivos relatórios ou materiais de apoio à leccionação, pois nenhum deles incluía informação significativa face ao foco da análise. Por esta razão e, contrariamente à análise das aulas, nas "unidades básicas" do tipo "exemplos de acção" (Erickson, 1986, p. 149), não se encontram episódios de aulas. Uma última diferença prende-se com a maior relevância dos memorandos das sessões de trabalho e entrevistas, enquanto fontes de proveniência de dados, relativamente à que tiveram na análise "microscópica" de aulas. Por opção, foi apenas depois de obter uma versão preliminar do documento relativo ao caso focado no grupo de pesquisa, que elaborei a primeira versão da primeira parte dos capítulos VI e VII.

A terceira fase do percurso analítico, incidiu sobre a análise do trabalho de ambas as professoras orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, considerando a globalidade de todas as aulas por si leccionadas que foram objecto de reflexão no grupo de pesquisa. Visou apresentá-lo numa perspectiva diacrónica e holística, ausente na análise "microscópica" de aulas situadas em momentos muito particulares do percurso, de modo a evidenciar aspectos que, ao longo do projecto, se destacaram como particularmente relevantes ou problemáticos. Visou, também, identificar mais-valias associadas, pelas professoras, à experiência de participação no projecto e consideradas por si relevantes para equacionarem práticas de ensino em que a argumentação matemática não é relegada para plano secundário.

O exemplo apresentado na subsecção *Recolha, organização e análise de informação: Perspectiva geral* para ilustrar o significado de "sistema de navegação", revela o início do processo de análise levada a cabo nesta fase, que me permitiu obter, a partir de materiais incluídos no *corpus*, um conjunto de dados organizados por categorias e subcategorias. Confrontei-os com todos os textos analíticos produzidos até ao momento — versões preliminares dos capítulos V, VI e VII— ou seja, efectuei, relativamente a estes textos, uma análise de segunda ordem. Orientando-me pelas questões de investigação, procurei identificar tendências, relações, semelhanças, aspectos particulares significativos, testar interpretações pela procura de dados que as invalidassem e relacionar aprendizagens ou mudanças referidas pelas professoras com a actividade desenvolvida no âmbito do projecto. Tal como aconteceu com a produção dos textos analíticos anteriores, também a redacção dos resultados desta análise se entrelaçou com o próprio processo de análise, envolveu recorrentes leituras de material empírico e contribuiu para a reformulação de aspectos destes textos. Foi da terceira fase de análise que emergiram os itens que estruturam as conclusões.

Passando agora aos tipos de triangulação usados durante o processo de análise de material empírico. Patton (2002) distingue quatro tipos de triangulação sublinhando que podem contribuir para a verificação e validação da análise qualitativa. Entres estes, está a *triangulação analítica* que consiste nos resultados serem revistos por vários analistas. Uma das possíveis abordagens de triangulação analítica é, segundo este autor, a revisão feita pelos participantes numa investigação. Adoptando a tipologia de Patton, recorri a *triangulação de métodos* e *triangulação de fontes*, ou seja, testei a consistência de dados provenientes de diferentes métodos de recolha e também diferentes dados obtidos através do mesmo método. Além disso, como referi anteriormente, as versões preliminares dos capítulos V, VI, VII e VIII foram lidas e comentadas pelas professoras. Entreguei a cada uma o capítulo focado na análise "microscópica" das quatro aulas por si leccionadas — a Rebeca o VI e a Anita o VII — e os restantes a ambas. Este procedimento inclui-se na formulação/verificação de conclusões, no sentido de Miles e Huberman (1994), e corresponde, segundo Patton (2002) a uma forma de *triangulação analítica* segundo. Solicitei a Anita e Rebeca que lessem integralmente os textos, que avaliassem a fidelidade da análise tendo em conta as suas memórias das situações, que analisassem se as interpretações feitas correspondiam ao seu pensar, que reflectissem sobre o grau de identificação das ideias apresentadas a propósito de si e que registassem todos os aspectos considerados pouco claros, pouco precisos, incompletos ou constrangedores.

A conversa com cada professora sobre os textos provisórios dos capítulos centralmente focados na análise "microscópica" das suas aulas e no caso do grupo de pesquisa (V e VI/VII), foi presencial e ocorreu na sua residência. Algum tempo depois, enviei-lhes a versão preliminar do capítulo VIII sobre a qual conversamos telefonicamente após ter recebido *e-mails* com os seus comentários. No essencial, o conteúdo das várias conversas não foi muito diferente e deixou-me muito satisfeita e sossegada.

Reuni-me primeiro com Rebeca. Começou por me indicar algumas "gralhas" detectadas, o que, nas suas palavras, "me podia ajudar", e propôs duas sugestões de alteração: uma relacionada com o tornar mais preciso o seu tempo de serviço e outra com a inclusão do nome de dois alunos no conjunto daqueles que indiquei como sendo mais participativos nas suas aulas. Ultrapassada esta parte, começa a dizer "gostei, conseguiste traduzir muito bem o que aconteceu" e eu tento tomar notas. Com a espontaneidade que a caracteriza, pergunta-me: "Não queres que eu vá buscar o gravador?" E, assim, a conversa com Rebeca fica magneticamente registada. Apresento, em seguida, extractos da transcrição:

> Conseguiste identificar bem aquelas coisas menos bem conseguidas, mas de uma maneira não... é crítica mas uma crítica construtiva, aquilo que eu sempre tenho dito que tu tens essa capacidade de fazer. (...) Não me senti nada melindrada com estas coisas, eu própria as identifiquei na altura e depois no resto também conseguiste interpretar bem, de uma maneira... (risos) Como é que eu te hei-de dizer? Que fico um bocadinho... Não é bem... eu não queria usar esta palavra... Fico satisfeita... Fico com o Ego melhor nas outras partes, pela forma como tu analisas e pela forma como vês isso. Gostei. (...) Não me custou nada ler as montes de páginas. (...) Estava-te a dizer que até houve umas alturas em que não me apetecia largar. Estava entusiasmada e então queria continuar (risos) e ver os episódios (...) Pronto, tu querias a minha opinião, não era? (...) gostei e identifico-me. (...) não omitiste as dificuldades, não fugiste a nada do que correu menos bem, estão lá as coisas todas que correram menos bem mas estão ditas de uma forma... Que mostra que, realmente, não correram

> bem porque as coisas nem sempre correm bem, mas não está a criticar no aspecto negativo. Está mesmo a ser analisado imparcialmente e de uma forma que faz perceber que as coisas nem sempre correm bem mas que a culpa não tem que ser só do professor, não é? (Rebeca, 14/08/04)

O comentário de Rebeca à versão preliminar do capítulo VIII permitiu, a exemplo do que este extracto ilustra relativamente às restantes análises, validar também a análise feita. "Parece-me tudo bem", diz-me no *e-mail* enviado, salientando que "de facto houve alterações em mim com o projecto". O caso que apresenta para ilustrar esta ideia prende-se com a partilha da liderança das situações didácticas: "Por exemplo, agora dou muito mais o lugar no quadro aos alunos para a prova de conjecturas e já não me lembrava que antes não era assim".

Anita aborda a conversa sobre a análise "microscópica das suas aulas" e a do caso focado no grupo de pesquisa, num sentido inverso ao de Rebeca. Começa-a pela apreciação global e apenas no fim apresenta indicações específicas que não ultrapassaram sugestões muito pontuais de forma e o completar de informações sobre um projecto que coordenou. Sobre esta apreciação fiz anotações enquanto decorria o diálogo. Diz-me: "gostei da maneira como escreveste, gostei de ler. Sinto-me bem com a forma como falas de mim e do meu trabalho, com a descrição e com a análise". Pelo meio da conversa vai-me contanto como se organizou para a leitura "no meio da confusão da transformação da casa": "arranjei condições de trabalho; encontrei um tempo de leitura prolongada para me concentrar no que lia; não é ler aos bocadinhos; ler aos bocadinhos faz perder o fio condutor". Confessa que se sentiu "um pouco perturbada" quando se reconheceu na sua própria timidez referida na análise, mas salienta que encarou o facto "como uma confirmação dessa mesma timidez". Interpelei-a, insistentemente, sobre se deveria excluir essa faceta mas recorrentemente afirma: "não quero que alteres absolutamente nada nem aí nem nos outros lados". A propósito da versão preliminar do capítulo VIII escreve no *e-mail* que recebi: "Tal como anteriormente, li com atenção e dedicação (o capítulo), gostei da forma como está escrito, senti-me confortável e identifiquei-me (reflecte a minha perspectiva), portanto está validado". Na conversa telefónica reafirma o que aqui escreveu. Assim, também no caso de Anita a análise ficou validada.

Termino referindo um aspecto relacionado com a questão do anonimato dos participantes numa investigação. Acordámos, no início do projecto, que seriam tomadas providências para que a privacidade de Anita e Rebeca fosse protegida. No final, ao solicitar às professoras que me indicassem os pseudónimos pelos quais gostariam de ser identificadas, dei-me conta, que embora o fizessem, a questão do anonimato não era relevante para si. Esconder a identidade do professor impede que ele beneficie do reconhecimento que pode advir do contributo dado para a investigação. Esta questão, pertinente em qualquer projecto que envolva a participação de professores, torna-se mais significativa no âmbito de projectos desenvolvidos colaborativamente o que, a meu ver, torna premente que a comunidade de investigação lhe dedique uma atenção especial quando se trata do desenvolvimento de trabalhos académicos.

Capítulo V

-

Projecto de investigação colaborativa: Concepção e desenvolvimento

Este capítulo foca-se no projecto de investigação colaborativa desenvolvido no decurso de dois anos lectivos. Organizo-o em quatro secções principais. A primeira centrada na fundação do grupo pesquisa colaborativa, expressão que adopto para designar o grupo formado por mim, Anita e Rebeca, as duas professoras que o integraram. Na segunda secção abordo aspectos relativos às fases e etapas em torno das quais se organizou o projecto e as negociações que ocorreram no seu processo de desenvolvimento. A terceira e a quarta secções incidem sobre a dinâmica colaborativa analisada a partir de duas perspectivas diferentes e complementares. Começo por considerar o trabalho que, efectivamente, realizámos e como o realizámos, terminando com uma reflexão sobre a construção da relação de colaboração e inquietações experienciadas pelos vários elementos do grupo de pesquisa.

Fundação do grupo de pesquisa colaborativa

Uma das minhas preocupações ao reflectir sobre os contactos destinados a constituir o grupo de pesquisa, foi delinear os principais traços de uma conversa, que pretendia franca e que me permitisse intuir se o tema do projecto faria sentido para os professores e precaver a ideia de que seria eu a "ditar" o caminho a ser percorrido. Foi esta conversa que tive com Rebeca num encontro que lhe solicitei e que decorreu na sua escola.

Apresentei-lhe uma ideia geral sobre o projecto, referindo centrar-se na dinâmica da aula de Matemática quando os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática e através de várias questões que explicitei, procurei problematizar o tema visando tornar visível e destacar que poderia ser abordado a partir de perspectivas diversas. Neste âmbito, preocupei-me em clarificar o que, particularmente, me interessava no respeitante à minha própria investigação, as técnicas de recolha de dados a que necessitaria de recorrer e a existência de anonimato caso os professores o desejassem. Tentei, também, fundamentar a relevância, do meu ponto de vista, das questões da argumentação matemática quando se equaciona o ensino e aprendizagem da Matemática no ensino básico e clarificar as razões porque me parecia importante desenvolver um projecto de investigação colaborativa com professores. Em relação a este último aspecto, enfatizei a ideia, em que acredito, de que as suas vozes, perspectivas e saberes são fundamentais para a produção de conhecimento significativo sobre o ensino. Apresentei, além disso, uma previsão da duração do projecto, do tempo que me parecia ser necessário disponibilizar semanalmente e de algumas possibilidades de trabalho a realizar nas sessões conjuntas. Intencionalmente, salientei que estas possibilidades eram apenas meras hipóteses, uma vez que este trabalho deveria ser objecto de sistemática negociação e acordo entre todos os participantes.

Rebeca aderiu de imediato e com entusiasmo à ideia de integrar a equipa do projecto. Considerou o tema muito pertinente, tanto mais que, como referiu, tentativas de envolvimento dos alunos em actividades de argumentação, já a tinham levado a confrontar-se com dificuldades diversas. A possibilidade de ter alguém com quem reflectir cativou-a bastante. Simultaneamente, fazendo parte dos seus planos de trabalho futuro, a frequência de um curso de mestrado na área da Didáctica da Matemática, agradava-lhe a ideia de estar envolvida num projecto de investigação que poderia vir a ser-lhe útil. Quando lhe referi os critérios que defini, espontaneamente, mencionou Anita, parecendo-me ter ficado satisfeita em ter no grupo alguém com quem tem uma boa relação e com quem gosta de trabalhar. Contactou-a, telefonicamente, e marcámos, de imediato, um encontro a três que se veio a realizar cerca de meia hora mais tarde.

Tive com Anita uma conversa muito próxima da que tive com Rebeca. Mostrou-se, prontamente, interessada e disponível, por razões muito próximas das apresentadas pela colega, incluindo a candidatura futura a um mestrado. Pareceu-me algo preocupada com o encontrar um modo de reorganizar o seu tempo para, sem deixar de lado os compromissos profissionais já assumidos, encontrar um "espaço" para o projecto. No entanto, em momento algum pôs em causa consegui-lo, mesmo, como me fui dando conta ao longo do desenrolar da conversa, sendo múltiplos estes compromissos, de natureza muito diversa, percorrendo todo o ano lectivo e, sobretudo alguns, envolvendo funções de coordenação, bastante exigentes em termos de tempo. Pressentindo existir em Anita uma certa curiosidade mas, ao mesmo tempo, inquietude com a gravação de aulas suas, aproveitei para destacar que era importante e desejável encontrarmos patamares de trabalho em que todas nos sentíssemos confortáveis, que era fundamental, do meu ponto de vista, que a procura destes patamares atravessasse o desenvolvimento de todo o projecto e que considerava ser possível encontrá-los em conjunto.

Anita e Rebeca são jovens docentes do quadro de, respectivamente, uma escola básica 2,3 e uma escola secundária situadas numa localidade próxima de Lisboa. Na altura do nosso primeiro encontro, 9/11/2001, Anita iniciava o seu quinto ano de ensino e Rebeca estava muito perto de começar o sétimo. Ambas leccionavam turmas do 8º ano de escolaridade e acordámos que cada uma escolheria uma destas turmas para o desenvolvimento do projecto. A data da primeira sessão de trabalho foi agendada. Todas nos comprometemos a reflectir sobre possibilidades de acção de modo a nela podermos negociar um plano de trabalho que correspondesse às nossas expectativas e necessidades. Estava fundado o grupo de pesquisa.

Esboçando, negociando e renegociando o plano de trabalho

O projecto de investigação colaborativa decorreu em duas fases organizadas em várias etapas diferenciadas entre si pelos principais objectivos que lhe estiveram associados. A primeira fase inicia-se em Novembro de 2001 e corresponde, globalmente, ao ano lectivo de 2001/2002. Na altura do primeiro contacto com Anita e Rebeca era a única que estava prevista. A segunda é referente ao ano lectivo seguinte. Apresento, em seguida, os principais aspectos dos planos de trabalho que negociámos em cada uma destas fases, bem como o porquê da decisão de prolongarmos o projecto para um novo ano lectivo.

A primeira fase do projecto

O arranque do projecto foi orientado no que, em particular, me diz respeito, por dois tipos de intenções:

- criar condições que facilitassem a minha acessibilidade aos contextos em que se desenvolveria;
- negociar com as professoras um plano de trabalho que permitisse clarificar (a) as exigências que a realização do projecto acarretaria, (b) o envolvimento, papéis e responsabilidades de cada uma de nós e (c) a possibilidade de se ir renegociando a actividade conjunta de modo a que esta correspondesse às vontades e necessidades do grupo e de cada um dos seus membros.

Os contextos de desenvolvimento do projecto não dependeram de mim. Resultaram, naturalmente, do interesse por ele manifestado pelas professoras. As escolas em que se concretizou são aquelas em que trabalham e foram as suas escolhas que conduziram à indicação das turmas. Contrariamente ao que acontecia com a escola de Anita, a de Rebeca não me era totalmente estranha. Conhecia alguns dos professores do grupo de Matemática e recordava-me de ter lá estado duas ou três vezes no âmbito das minhas funções profissionais. Articulando o meu conhecimento sobre o funcionamento de escolas de ensino não superior com as ideias de Reason (1988c) referentes a contactos a estabelecer, no início de um projecto, com membros-chave das instituições em que ele terá lugar, considerei que era importante abordar, pessoalmente, os presidentes dos Conselhos Executivos. Durante a primeira conversa que tive com as professoras, expressei este desejo e decidimos que cada uma, na sua escola, faria o primeiro contacto visando referir a existência do projecto e agendar uma reunião futura com a minha participação.

Qualquer destes encontros veio a concretizar-se. Na troca de ideias que ocorreu, explicámos[39] o propósito do projecto, sua relevância e principais características. Procurámos, também, indagar se seria adequado, e através de que vias e formas, contactar com outros órgãos ou pessoas das escolas e, uma vez que havia necessidade de proceder à gravação de aulas, o que era importante fazer relativamente aos contactos a estabelecer com os encarregados de educação dos alunos. Os presidentes dos Conselhos Executivos anuíram e mostraram agrado com o desenvolvimento do projecto na escola, disponibilizando-se para colaborar no que fosse necessário.

Estes contactos foram fundamentais por razões de três tipos. Em primeiro lugar, pelo apoio que nos foi oferecido. Por exemplo, no caso da escola de Rebeca, sabíamos que, se necessário, podíamos contar com uma câmara de vídeo para a gravação das aulas. Em segundo lugar, porque vieram a permitir que o projecto se tornasse público nas escolas, o que contribuiu para que eu não me sentisse intrusa nos seus espaços, mesmo naqueles que, por excelência, são de encontro informal

[39] No encontro com o presidente do Conselho Executivo da escola de Rebeca esteve presente também Anita, por razões circunstanciais. A primeira sessão de trabalho do grupo de pesquisa realizou-se nesta escola em que Anita já tinha sido docente. O presidente do Conselho Executivo deslocou-se à sala em que estávamos reunidas e foi aí que o encontro decorreu.

para os professores. Por último e, mais importante, porque foram úteis para delinearmos um conjunto de acções diferenciadamente adaptadas a cada contexto que, do meu ponto de vista, facilitaram a receptividade e adesão ao projecto por parte das escolas e encarregados de educação. Globalmente, estas acções incluíram conversas com as directoras das turmas a que pertenciam os alunos em que este se iria desenvolver, a minha participação numa reunião com encarregados de educação de uma destas turmas e a elaboração de notas informativas destinadas aos encarregados de educação e também ao Conselho Executivo ou ao Conselho Pedagógico. Estas notas explicavam, em traços largos, o propósito do projecto, as pessoas envolvidas e os cuidados que seriam tomados em relação aos registos em vídeo das aulas para prevenir que os alunos fossem lesados e garantir a sua privacidade. No caso das notas destinadas aos encarregados de educação, solicitava-se, também, autorização para proceder às gravações que concedida em todos os casos.

No que se prende com a negociação do plano de trabalho colaborativo, preparei, previamente à primeira sessão de trabalho do grupo de pesquisa, uma proposta escrita, a discutir com Anita e Rebeca, que elaborei tendo em conta o que ouvi e observei no nosso primeiro encontro e em que integrei ideias que oralmente tinha apresentado e a que me parecia terem aderido. Tentei, através desta via, organizar-me para uma conversa não ambígua nem excessivamente vaga — que poderia gerar problemas delicados, e mesmo intransponíveis, no relacionamento futuro — mas que, ao mesmo tempo, permitisse espaço e abertura para que pudessem ocorrer negociações. Esta proposta incluía várias possibilidades de acção, organizadas em quatro etapas, que percorriam o ano lectivo de 2001/2002 e que requeriam a realização de sessões de trabalho, de todo o grupo de pesquisa, em média semanais e com a duração aproximada de duas horas.

A primeira etapa, muito breve, visava a negociação inicial do trabalho a realizar durante este período. Intitulei a segunda etapa por *Período de construção de uma linguagem comum e de conhecimento recíproco*. Este título permite destacar, precisamente, os objectivos que considerei prioritários para os perto de dois meses que separaram a primeira etapa da terceira. Nesta segunda etapa incluí actividades que poderiam permitir debruçarmo-nos sobre, por exemplo, (a) diálogos de sala de aula exteriores às práticas de Anita e Rebeca, (b) narrativas, feitas pelas professoras, de episódios de argumentação matemática ocorridos nas suas aulas, (c) documentos incluídos num dossier, de constituição progressiva, em que iríamos incluindo materiais de natureza diversa cuja discussão considerássemos poder vir a ser útil ao desenvolvimento do projecto e (d) o registo, em vídeo, de uma aula escolhida por Anita ou por Rebeca.

A terceira etapa, a mais longa, teria a duração de cerca de quatro meses: de Fevereiro a Maio de 2002. Embora prevendo que pudesse continuar a discussão de materiais incluídos no referido dossier de acordo com interesses ou necessidades sentidas por algum dos elementos do grupo de pesquisa, esta etapa seria, fundamentalmente, dedicada à preparação, observação e reflexão sobre aulas orientadas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Propunha, em particular, que algum do tempo das sessões de trabalho, fosse investido na análise e discussão de tarefas a explorar nestas aulas, seleccionadas, adaptadas e/ou elaboradas por algum dos elementos da equipa do projecto. Na base desta proposta está a ideia de que embora as tarefas que o professor apresenta aos alunos não determinem a actividade matemática que se desenvolve na aula, há algumas tarefas cuja natureza é, potencialmente, mais propícia a que aí possam vir a surgir episódios de argumentação matemática. Propunha, também, para cada professora, 3/4 momentos de reflexão sobre aulas leccionadas por si, gravadas em vídeo por mim e observadas, se Anita e Rebeca o entendessem, também pela colega. Visando começar a criar, com os alunos de cada uma das turmas, uma relação de proximidade e, ao mesmo tempo, uma certa familiarização comigo e com a câmara de filmar — um instrumento de registo que tinha a consciência de poder obstruir a naturalidade desejada — propunha ainda que, previamente a essas aulas, eu estivesse presente nalgumas outras[40].

Na última etapa, incluí, como possibilidades de acção, a análise de processos de divulgação do trabalho realizado, a preparação desta divulgação caso as professoras aderissem à ideia, e reflexões individuais feitas por Anita e Rebeca tendo por referência a experiência vivida. Propunha que estas reflexões surgissem no âmbito de entrevistas da minha responsabilidade focadas, por um lado, no processo de desenvolvimento do projecto e, por outro, no trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática.

Na primeira sessão de trabalho, que concluiu a primeira das etapas anteriormente referidas, as ideias pensadas por Anita e Rebeca para a concretização do projecto foram confrontadas com as minhas próprias ideias incluídas na proposta de plano de trabalho cujo conteúdo acabei de descrever. Ambas concordaram com a organização geral da terceira etapa, que acordámos negociar, mais detalhadamente, perto do seu início. Mostraram-se, também, muito interessadas, quer na divulgação do trabalho que desenvolveríamos, quer em qualquer uma das possibilidades de acção que sugeri no âmbito da segunda etapa. Em relação a esta etapa, responsabilizei-me pela procura e disponibilização de diálogos de sala de aula, por transcrever as narrativas de episódios de argumentação matemática que apresentassem, por lhes enviar esta transcrição previamente à análise que faríamos em conjunto, por dar início à constituição do dossier e por procurar documentação sobre questões que considerassem importante discutir. Rebeca mostrou-se prontamente disponível para que fosse gravada uma das suas aulas cujo registo veio a ser feito por um colega de grupo com quem costuma trabalhar. A incompatibilidade de horários impediu que Anita realizasse a gravação, tal como

[40] Estas aulas, que serão designadas por aulas de familiarização, não foram objecto de reflexão no grupo de pesquisa. Como indiquei, a minha presença nestas aulas visava, exclusivamente, facilitar o trabalho a realizar no futuro. Por este motivo, não serão consideradas ou contabilizadas quando me referir às aulas gravadas no âmbito de qualquer uma das etapas incluídas no desenvolvimento do projecto.

impediu a observação recíproca de aulas que eu tinha previsto ser uma hipótese na terceira etapa.

Acordámos que a discussão de tarefas consideradas potencialmente favoráveis à emergência, nas aulas, de episódios de argumentação matemática, se iniciaria na segunda etapa. Assumimos, também, que aquelas que os alunos explorariam no âmbito do desenvolvimento do projecto se deveriam articular naturalmente com os temas curriculares relativos ao 8º ano de escolaridade. Combinámos, ainda, que as decisões finais relativas aos momentos de leccionação das aulas a gravar na terceira etapa, às tarefas a propor aos alunos e aos modos de organização e gestão do ensino caberiam a cada uma das professoras, embora prevendo a possibilidade de haver nas sessões de trabalho, se o desejassem, momentos de partilha de ideias sobre estes aspectos.

Em suma, fizemos os reajustamentos necessários na proposta de plano de trabalho preparada por mim para que uma versão posterior deste documento (ver anexo 8), que me comprometi a enviar às professoras, integrasse possibilidades de acção traduzindo o que, no momento, queríamos e necessitávamos; conversámos abertamente sobre como trabalharíamos e sobre os compromissos que assumiríamos; estabelecemos acordos sobre as formas de registo da actividade que viria a ser desenvolvida nas sessões de trabalho e nas aulas; calendarizámos, globalmente, esta actividade e ajustámos locais, tempos e dias de encontro. Deste modo, definimos mais clara e concretamente as bases para a nossa colaboração tendo, no entanto, consciência de que algumas das decisões tomadas poderiam ter que vir a ser repensadas e de que os passos que tínhamos dado para estabelecer essas bases, embora fundamentais, não substituíam novas negociações que teriam que ir sendo feitas ao longo de todo o percurso colaborativo de modo a termos em conta o que fossemos vivenciando.

Considero a primeira sessão de trabalho do grupo de pesquisa decisiva para o desenvolvimento do projecto e dando o tom para a relação de colaboração que construímos. Terminámo-la a decidir o que faríamos na segunda, traço que foi comum a todas as outras sessões de trabalho que se lhe seguiram. Frequentemente, estas decisões eram tomadas na sequência da análise de uma ou várias propostas apresentadas por mim e que eram preparadas previamente a cada encontro ou que emergiam como relevantes no seu decurso. Estas propostas tinham por referência o plano que tínhamos negociado, embora este não as tivesse determinado. Por exemplo, na terceira etapa iniciámos a análise do processo de divulgação do trabalho apenas agendada para a quarta. Além disso, acordámos reflectir sobre aulas que inicialmente não tínhamos previsto e, sobretudo, a partir do momento em que iniciámos a actividade reflexiva sobre as aulas, as duas horas combinadas para cada sessão de trabalho revelaram-se insuficientes. Em várias ocasiões tivemos necessidade de as ultrapassar significativamente. Por último, perto do final do ano lectivo começa a tomar forma a ideia de prolongarmos o projecto para um novo ano, decisão que viemos a tomar. O que, permanentemente, procurei fazer, através das referidas propostas, foi cuidar de que as actividades do projecto fossem ao encontro de interesses, preocupações e necessidades de todas nós, organizando-as e coordenando-as de modo a integrar o que ia escutando de Anita e Rebeca e as reflexões que eu própria ia fazendo.

A segunda fase do projecto

Embora a tomada concertada de decisões tenha atravessado todo o percurso colaborativo, há uma decisão, negociada na primeira fase do projecto, que se destaca no conjunto das múltiplas que existiram: o seu prolongamento para um novo ano lectivo — 2002/03 — que corresponde à sua segunda fase.

A hipótese de darmos continuidade ao projecto foi levantada por mim, pela primeira vez, numa conversa informal que mantinha com Anita e Rebeca no final de uma das sessões de trabalho do grupo de pesquisa. Estávamos em Abril de 2001. O ano lectivo aproximava-se do final a passos largos e ambas as professoras estavam muito preocupadas com os temas do currículo ainda não leccionados. Durante este encontro, Anita referiu, a exemplo do que tinha feito em anteriores ocasiões, que a minha presença nas aulas com a câmara de filmar parecia perturbar os seus alunos:

"Eles ficam inibidos" (TST 17, p. 25, 09/04/02). Quando procurei averiguar se haveria possibilidades de agendarmos a gravação de algumas das suas aulas até ao final do ano lectivo, respondeu afirmativamente mas considerou mais prudente adiar a indicação das suas datas.

Senti-me preocupada. É neste contexto, que indago se vêem alguma possibilidade, se todas considerarmos vantajoso, de prolongarmos o projecto para uma parte do ano lectivo seguinte. Nenhuma das professoras a exclui. Trocam-se algumas ideias sobre o que fazer, na hipótese de virmos a enveredar por este caminho, para garantir a manutenção das turmas onde este se concretiza e decidimos dar-nos algum tempo para pensarmos melhor sobre o assunto e para termos em conta as actividades desenvolvidas até ao final do ano lectivo.

A exemplo do que aconteceu com a conversa atrás descrita, grande parte do processo de negociação que conduziu à decisão de prolongarmos o projecto decorreu em espaços informais de conversação e foi, fortemente, facilitado pelo à-vontade com que fomos aprendendo a dialogar e pela relação de proximidade construída entre nós. Começámos a considerar este prolongamento natural e relevante. Eu porque uma primeira análise dos dados empíricos recolhidos até ao final do ano lectivo, me fazia suspeitar que, sobretudo no caso de Anita, o material era insuficiente para conseguir obter uma representação adequada do seu trabalho no que se prende com o ensino da argumentação matemática. Anita e Rebeca porque queriam aprofundar a sua compreensão sobre o tema do projecto, dar continuidade a ideias que tinham procurado pôr em prática com as mesmas turmas e experimentar abordagens discutidas no âmbito de *sessões de reflexão*[41] que consideravam poder ser úteis para incentivar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e ajudá-los a ultrapassar dificuldades que ainda sentiam terem. Neste espaço de tempo, ambas concorrem a um mestrado e a sua candidatura é aceite, o que origina significativos constrangimentos de tempo e

[41] Uso a expressão *sessões de reflexão* para designar os encontros entre mim e as professoras cujo foco principal foi a actividade reflexiva sobre aulas por si leccionadas que foram gravadas por mim e que instituímos como objecto de discussão colectiva nas sessões de trabalho no grupo de pesquisa.

de organização do trabalho. Acordámos ter estes aspectos em conta na prossecução do projecto.

Com os dados obtidos a partir destas conversas, elaborei, tal como tinha feito no início do projecto, um documento escrito com uma proposta de plano de trabalho que orientasse a actividade a desenvolver em 2002/2003 (ver anexo 10). Esta proposta estava estruturada em duas partes. A primeira explicitava o conjunto de pressupostos que serviu de base à concepção da segunda que, por seu lado, incluía possibilidades de acção conjunta e de organização desta acção. Os pressupostos traduziam acordos oralmente estabelecidos no grupo de pesquisa, necessidades que o meu trabalho de investigação originava e expectativas e limitações expressas pelas professoras. Sistematizavam, também, problemas relacionados com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, referidos por Anita e Rebeca durante as sessões de trabalho e que consideraram poder originar campos de investimento futuro.

Centrei a segunda parte da proposta na reflexão sobre aulas leccionadas por Anita e Rebeca e gravadas por mim. Neste âmbito, sugeri um conjunto de acções para o período de Setembro a Dezembro de 2002 que previam encontros, em média, de três em três semanas. Este conjunto incluía reflexões individuais apresentadas pelas professoras no decurso de entrevistas da minha responsabilidade e a conclusão da preparação de uma actividade de divulgação do projecto iniciada na sua primeira fase. Quanto às restantes, seguiam de perto, relativamente a um total de seis aulas, a actividade que tínhamos desenvolvido na terceira etapa desta fase. A partilha de responsabilidades e papéis mantinha-se também. Além disso, incluí no documento, a ideia hipotética de prolongarmos o trabalho do grupo de pesquisa até Maio de 2003 diminuindo a frequência dos encontros, mas mantendo a ênfase na reflexão individual e colectiva sobre aulas que gravaria e que as professoras me indicariam tendo por referência a relevância que nelas imaginavam face ao tema do projecto.

A centralidade que atribuí, em qualquer dos casos, à actividade reflexiva sobre práticas de Anita e Rebeca orientadas para o ensino da argumentação matemática, decorre das potencialidades que percepcionei nesta actividade, no decurso da primeira fase do projecto, enquanto fonte de dados empíricos relevantes para o meu trabalho de investigação. Ao mesmo tempo, provém do interesse, recorrentemente expresso pelas professoras, em prosseguirem o trabalho de reflexão sobre aulas suas seguindo o processo que tínhamos usado, um dos aspectos que valorizaram. Os extractos que a seguir apresento, oriundos das transcrições da segunda entrevista realizada no final da referida fase, tornam visível este interesse:

> Para já passei a reflectir mais sobre a minha prática e isso depois reflecte-se, tem consequências. Estou mais atenta a certas coisas e mais sensível a determinadas situações. Portanto, houve um processo, pronto, de interiorização e mais reflexão sobre a prática que fez... Agora lá vem a argumentação... (risos) que fez com que eu estivesse mais atenta a determinados aspectos que facilitam o processo da argumentação matemática na sala de aula. (...) [reflexão sobre as aulas] Isso traz mais-valias depois para o que vem a seguir, as mais-valias naquele sentido que eu disse de reflectir para depois alterar a prática. (...) Também gostei dessa parte do confronto, apesar de me custar mais ao princípio ver a gravação das minhas aulas. (Rebeca, E2, p. 10-2, 19/07/02)

> É assim, quando nós queremos reflectir sobre as coisas, sozinhos também se reflecte, mas estar a interagir com outras pessoas e ouvir opiniões diferentes das nossas, ou iguais, depende, mas no fundo comparar e discutir só traz vantagens à própria pessoa, em termos de evolução, em termos de como é que hei-de fazer as coisas de maneira diferente, discutir, principalmente quando as pessoas se entendem, que é o nosso caso, pronto! E penso que... Eu com a Rebeca já estava habituada a trabalhar, e não tenho problemas, contigo também acho que não, acho que vale bem a pena falarmos, gosto muito... Pronto é... E pronto, *eu acho que isto é importante para a evolução de uma pessoa!.. Eu ganho com isto também! Aprendo!...* (risos) [as palavras destacadas foram pronunciadas com muita ênfase] (Anita, E2, p. 10, 22/07/02)

Analisámos a proposta de plano de trabalho que elaborei na primeira sessão de trabalho do grupo de pesquisa referente ao ano lectivo de 2002/2003. Salientei, como, aliás, procurei fazer através do subtítulo atribuído ao documento entregue às professoras — *"Proposta de continuação [do projecto] no ano lectivo de 2002/2003: Algumas ideias"* (ver anexo 10) —, que se tratava de ideias a ponderar e discutir, de modo a que o trabalho imaginado para o futuro tivesse em conta os constrangimentos existentes e correspondesse aos desejos e objectivos de todas nós. Anita e Rebeca expressaram o seu acordo quanto a qualquer dos pressupostos de que parti, às actividades localizadas no período de Setembro e Dezembro de 2002 e à frequência dos encontros. Interessaram-se, também, pela hipótese de prolongarmos o projecto até Maio de 2003, pelo que decidimos avançar com esta possibilidade.

Apesar da informalidade que caracterizou o processo de negociação da continuidade do projecto, foi importante termos investido tempo numa discussão organizada de um plano de trabalho para a sua segunda fase. Na minha perspectiva, esta discussão foi facilitada pela existência de um documento escrito que contribuiu para trazer uma maior clareza aos compromissos que assumíamos e para agilizar a tomada de decisões. Desta discussão emergiu uma versão ajustada do documento que funcionou como um elemento orientador do trabalho conjunto mas que, a exemplo do negociado no início da actividade do grupo de pesquisa, não o determinou.

Na realidade, o projecto prolongou-se até Agosto de 2003 com uma periodicidade de encontros, em média, mensal. Foram mais frequentes entre Setembro de 2002 e Março de 2003 e bastante espaçados depois desta data. Nas primeiras cinco semanas — espaço de tempo em que incluo a negociação da proposta do 2º plano de trabalho — reunimos para finalizar a preparação de um grupo de discussão que se realizou num encontro nacional de professores de Matemática. A elaboração de materiais de apoio à dinamização deste grupo conduziu-nos, individual e colectivamente, a revisitarmos aulas de Anita e Rebeca e documentos que tínhamos analisado.

A este período, que pode considerar-se como a primeira etapa da segunda fase do projecto, seguiu-se um outro que se encerrou em Março de 2003 com as reflexões individuais, apresentadas pelas professoras, nas entrevistas. Nesta segunda etapa, a central, demos continuidade ao trabalho de reflexão sobre aulas, à semelhança do que tínhamos feito durante a terceira etapa da primeira fase do projecto. No entanto, o tempo dedicado nas sessões de trabalho à análise de tarefas a propor aos alunos, foi menor do que o investido nesta etapa e, contrariamente ao que antes aconteceu, nenhum dos encontros se destinou à discussão de documentos de carácter teórico. A partir de uma proposta minha, elaborámos, também, um artigo baseado no trabalho que realizámos no âmbito da preparação do grupo de discussão anteriormente referido. Este artigo veio a ser publicado numa revista cujo público destinatário é, maioritariamente, constituído por professores de Matemática.

A segunda etapa da segunda fase foi bem mais exigente em termos de esforços e de tempo do que, no início do ano lectivo, previmos que seria. Com efeito, no seu decurso surgiram situações que nos levaram a considerar relevante debruçarmo-nos sobre um número de aulas superior ao acordado: por exemplo, a necessidade, face às dificuldades dos alunos, de se prolongar a exploração e discussão de uma das tarefas. Estas situações tiveram por consequência um aumento do tempo investido na análise individual destas aulas e um acréscimo de sessões de trabalho destinadas à reflexão colectiva. No final desta etapa decidimos, por vontade de todos os elementos do grupo de pesquisa, dar por encerrada a actividade conjunta da globalidade do grupo mantendo, no entanto, a existência de encontros entre mim e cada uma das professoras que ocorreriam entre Maio de 2003 e o final do ano lectivo. Este período é a última etapa do projecto de investigação colaborativa e corresponde à terceira da sua segunda fase.

Neste âmbito, acordámos que, por indicação de Anita e de Rebeca, eu registaria em vídeo uma das suas aulas escolhidas entre aquelas em que suspeitavam poderem ocorrer episódios significativos de argumentação matemática. As tarefas a propor nestas aulas seriam seleccionadas pelas professoras. Manifestei-me, no entanto, disponível para, se o desejassem, conversarmos sobre elas o que, de facto, veio a acontecer. Assumi, também, a responsabilidade de fazer uma cópia da gravação de cada uma destas aulas, a entregar a quem a leccionou, possibilitando, assim, a sua análise. Combinámos, ainda, que num encontro que agendaríamos, ela seria objecto de reflexão no decurso de uma entrevista individual. Estes encontros vieram a concretizar-se de acordo com o planeado: com Anita, no final de Julho de 2003 e com Rebeca uns dias mais tarde.

Desenvolvimento do projecto

A secção anterior focou-se, globalmente, em aspectos relacionados com a concepção do projecto que desenvolvemos. Referi, neste âmbito, acções planeadas que resultaram de acordos que estabelecemos. No entanto, não abordei a articulação destas acções nem a forma como foram concretizadas. É sobre estes aspectos que incide esta secção, ou seja, focar-me-ei no trabalho, efectivamente, realizado pelo grupo de pesquisa durante as duas fases do projecto. Anita e Rebeca negociaram, nas respectivas escolas, a manutenção das turmas envolvidas. Consequentemente, na segunda fase os alunos frequentavam o 9º ano de escolaridade. A composição das turmas sofreu, apenas, ligeiras alterações.

Campos de colaboração

Para ilustrar o trabalho colectivamente desenvolvido pelo grupo de pesquisa, procurei construir um modelo que permitisse visualizar as várias acções em torno das quais este trabalho se organizou, as relações entre estas acções e a sua articulação com outras que, consoante os papéis e compromissos acordados, eram da responsabilidade individual dos membros do grupo. Não foi fácil encontrar uma representação que traduzisse o conjunto de todas estas acções, que desse conta, adequadamente, da complexidade das múltiplas interacções que entre elas existiram e, ao mesmo tempo, suficientemente simples para não comprometer a clareza ou dificultar a leitura. Tentando encontrar um equilíbrio entre estes aspectos, elaborei um esquema representativo da macroestrutura da actividade do grupo de pesquisa e suas relações com a actividade que eu, Anita e Rebeca individualmente desenvolvemos e através da qual contribuímos para o trabalho conjunto (figura 6). Neste esquema não incluí reflexões individuais apresentadas pelas professoras no âmbito das entrevistas, uma vez que não envolveram o grupo no seu todo nem, directamente, foram mobilizadas em acções que colectivamente concretizámos.

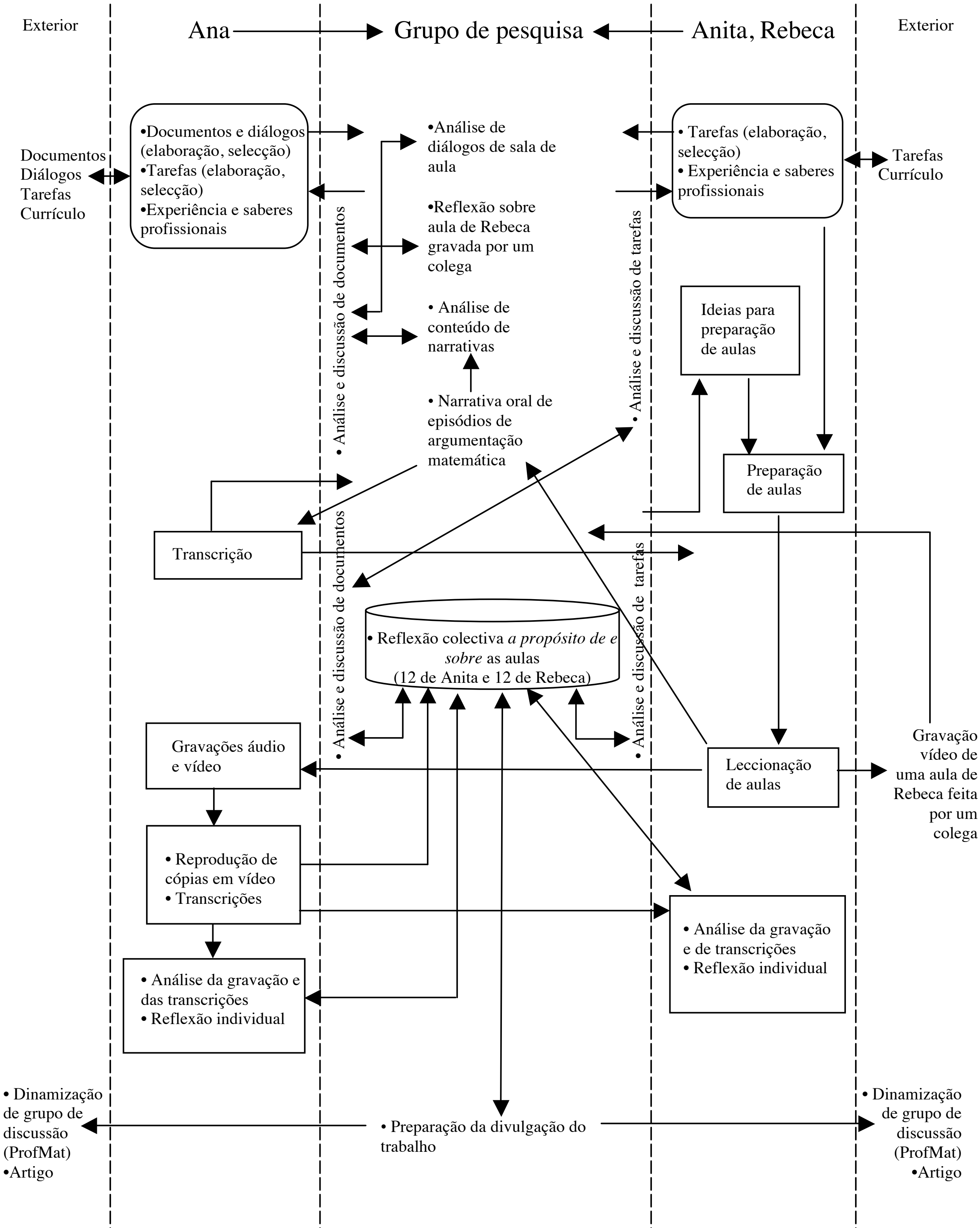


Figura 6: Macroestrutura da actividade do grupo de pesquisa e sua relação com a actividade individual dos seus membros

Na parte central da figura 6, organizei as principais actividades que desenvolvemos durante as sessões de trabalho do grupo de pesquisa. Lateralmente, destinei dois espaços para a indicação de papéis que os membros do grupo desempenharam. Como aqueles que assumi foram, nalguns aspectos, diferenciados dos de Anita e de Rebeca e estes últimos muito semelhantes, considerei vantajoso, em termos de organização gráfica, "associar" as professoras e "separá-las" de mim. Na periferia surgem, também, dois espaços, que designei por "exterior", que representam a envolvente do grupo de pesquisa. As setas bidireccionais que ligam estes espaços àqueles que me são destinados ou destinados a Anita e Rebeca, significam que a procura de materiais no exterior ou a consulta do currículo foi intencional e orientada por propósitos particulares e, simultaneamente, que há um trabalho que é feito sobre o que recolhemos antes de se passar à actividade colectiva. A designação "tarefas", que surge no "exterior", deve ser entendida como uma pesquisa feita em várias publicações ou através de diversos meios — por exemplo, manuais escolares, publicações da APM ou do NCTM, internet, materiais da responsabilidade do Ministério da Educação — com o objectivo de identificarmos tarefas, potencialmente, relevantes para o desenvolvimento do projecto. Este mesmo processo foi seguido para "documentos, diálogos", palavras incluídas na periferia do espaço que me foi destinado.

O símbolo cilíndrico com que enquadrei uma das actividades do grupo de pesquisa — reflexão colectiva *a propósito de e sobre* aulas leccionadas por Anita ou Rebeca e gravadas por mim — visa destacá-la entre as restantes. Com efeito, constituiu o núcleo central do trabalho que, conjuntamente, desenvolvemos, aquele a que dedicámos mais tempo e esforço e de que muitas outras actividades foram subsidiárias. Uso a expressão *"a propósito de e sobre"* para significar que a actividade reflexiva incidiu não apenas sobre a acção das professoras nas aulas que gravei, mas também sobre a preparação desta acção.

Algumas das actividades do grupo de pesquisa são representadas em texto vertical, em duplicado e lateralmente às restantes. Adoptei esta forma de representação por duas razões: evidenciar que acompanharam o desenvolvimento de todo o projecto, contrariamente a outras que se situaram em momentos particulares (por exemplo, a análise de conteúdo de narrativas); facilitar a indicação das interacções que existiram entre estas e outras actividades. Por exemplo, não tem significado algum ter colocado (a) *análise e discussão de tarefas* junto ao espaço destinado às professoras e (b) *análise e discussão de documentos* junto ao espaço a mim destinado. Todas nos envolvemos em ambas as actividades. Do mesmo modo, a forma que utilizei para ligar (a) a (b) ou o facto de ter sido o texto em duplicado do enunciado destas actividades a ser unido a *reflexão colectiva a propósito de e sobre as aula*, apenas se destinou a evitar uma sobreposição excessiva de setas e não mais do que isso.

Como qualquer outro modelo, também o representado na figura 6 é redutor da realidade. Em particular, há várias interacções que não representei por considerar que introduziriam uma complicação excessiva, obscurecendo a sua compreensão. Sem a preocupação de ser exaustiva apresento exemplos de interacções deste tipo:

- As que ocorreram, a propósito do desenvolvimento do projecto, entre as professoras ou entre mim e uma delas e que não se situaram no interior do grupo de pesquisa[42.]
- As existentes entre actividades localizadas na segunda etapa da primeira fase do projecto e a actividade reflexiva relativa a aulas sobre as quais, posteriormente, nos debruçámos. Apresentarei exemplos destas relações quando focar o processo de concretização destas actividades.
- A influência da dinamização do grupo de discussão realizado no ProfMat na reflexão de Anita e Rebeca não directamente focada em aulas que leccionaram. Esta influência transparece nalguns dos comentários que tecem sobre esta experiência no decurso da terceira entrevista. Referi-los-ei quando me debruçar sobre a divulgação do trabalho realizado.

[42] Anita e Rebeca conversaram entre si sobre tarefas ou outros aspectos relacionados com a preparação de aulas, que mais tarde vieram a ser discutidas em sessões de trabalho conjunto. Além disso, e sobretudo a partir da altura em que começámos a conhecer-nos melhor, houve frequentes conversas telefónicas e/ou troca de e-mails entre mim e Anita ou Rebeca em que debatíamos ideias várias relacionadas com aulas em que eu estaria presente.

A observação da figura 6, a par das considerações que apresentei, permite destacar que, no âmbito do projecto, a colaboração entre todos os membros do grupo de pesquisa se situou no que considero terem sido quatro campos interligados. A tabela 6 refere estes campos, as actividades que neles incluí e as fases e etapas do projecto em que estas actividades foram desenvolvidas ou tiveram uma expressão significativa.

Tabela 6*:* Campos de Colaboração, Actividades e Fases do Projecto

<table>
<tr><th>Campos de colaboração</th><th colspan="2">Actividades</th><th>Fase(s), etapa(s) do projecto</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1: Análise e discussão de documentos de natureza diversa.</td><td colspan="2">A: Análise de diálogos de sala de aula exteriores às práticas das professoras.</td><td>1A: 1ª fase: 2ª etapa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">B: Análise/discussão de documentos de carácter teórico ou teórico/prático considerados relevantes para o desenvolvimento do projecto.</td><td>1B: 1ª fase, 2ª e 3ª etapas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">C: Análise de conteúdo da transcrição de narrativas de episódios de argumentação matemática seleccionados pelas professoras.</td><td>1C: 1ª fase, 2ª etapa.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2: Preparação de aulas orientadas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática.</td><td rowspan="2">A: Selecção, análise, adaptação ou criação de tarefas.</td><td>A1: Constituição de uma “base de dados” (selecção provisória).</td><td>2A1: 1ª fase, 2ª e 3ª etapas.</td></tr>
<tr><td>A2: Tarefas a propor nas aulas que seriam objecto de reflexão no grupo de pesquisa.</td><td>2A2:
• 1ª fase, 3ª etapa
• 2ª fase, 2ª etapa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">B: Trocas de ideias relacionadas com a preparação de aulas.</td><td>2B:
• 1ª fase, 3ª etapa
• 2ª fase, 2ª etapa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3: Observação e reflexão sobre aulas leccionadas pelas professoras</td><td colspan="2">A: Reflexão sobre a aula leccionada por Rebeca gravada por um colega.</td><td>3A: 1ª fase, 2ª etapa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">B: Reflexão sobre as aulas das professoras por cujo registo fui responsável e que foram objecto de análise no grupo de pesquisa.</td><td>3B:
• 1ª fase, 3ª e 4ª etapas.
• 2ª fase, 1ª e 2ª etapas.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4: Preparação e concretização de formas de divulgação do trabalho.</td><td colspan="2">A: Toda a actividade desenvolvida com o propósito de dinamizar o grupo de discussão realizado no ProfMat, depois de elaborado o resumo.</td><td>4A:
• 1ª fase, 4ª etapa.
• 2ª fase, 1ª etapa.</td></tr>
<tr><td colspan="2">B: Elaboração do artigo que foi, posteriormente, publicado.</td><td>4B: 2ª fase, 2ª etapa.</td></tr>
</table>

Visando clarificar opções que tomei para referenciar as fases/etapas do projecto associadas a algumas das actividades incluídas nos campos de colaboração, observo:

- Campo 1, actividade B: Na célula 1B não incluí as fases/etapas do projecto em que documentos discutidos no grupo foram mobilizados para desenvolver outro trabalho[43].
- Campo 2, actividade A1: Esta actividade esteve presente na 2ª e 3ª etapas da primeira fase do projecto (célula 2A1) mas não foi para além dela, embora a selecção e análise de tarefas se tenha mantido até darmos o trabalho conjunto por concluído. Procurarei fundamentar esta ideia quando me debruçar sobre o trabalho que foi desenvolvido no âmbito deste campo.
- Campo 2, actividade A2: Não incluí a 2ª fase, 3ª etapa do projecto na célula 2A2, pelo facto das aulas gravadas nesta etapa[44] não terem sido objecto de reflexão colectiva por todo o grupo de pesquisa. Pela mesma razão essa fase/etapa não foi incluída na célula 3B.
- Campo 2, actividade B: Não incluí a 2ª etapa da 1ª fase do projecto na célula 2B, embora a atenção do grupo de pesquisa tenha incidido em aspectos diversos relacionados com a preparação da aula leccionada por Rebeca e gravada por um colega que se localizou nesta etapa. Esta opção deriva da actividade 2B não ter tido, nesta altura, uma presença forte face a outras que desenvolvemos.
- Campo 4, actividade A: Os aspectos relativos à preparação do grupo de discussão em que nos focámos anteriormente à 4ª fase da primeira etapa, embora importantes, não foram objecto de um grande investimento e esforço da nossa parte, contrariamente ao que aconteceu mais tarde. É esta

[43] Por exemplo, reflexão sobre aulas não localizadas nas etapas referidas ou preparação da divulgação do trabalho.

[44] Embora, por proposta das professoras, tenha analisado e contribuído com sugestões para o enunciado das tarefas que decidiram explorar com os alunos nestas aulas.

a razão que me levou a considerar na tabela apenas a actividade desenvolvida depois da elaboração do seu resumo.

Delineando e concretizando o trabalho

Foco-me, em seguida, em cada um campos de colaboração anteriormente referidos com o propósito de ilustrar aspectos que se prendem com a concretização de actividades desenvolvidas e fundamentar relações representadas na figura 6.

Análise e discussão de documentos de natureza diversa

Como se depreende da observação da tabela 6, foram usados nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa três tipos de documentos: diálogos de sala de aula, documentos de carácter teórico ou teórico/prático e narrativas de episódios de argumentação matemática. Apresento, em seguida, a sua origem e uma breve caracterização. Refiro, também, alguns exemplos que visam ilustrar o propósito e o processo de análise/discussão, o que a motivou, as interacções que existiram entre o trabalho realizado com vários documentos e como se relacionou este trabalho com actividades incluídas noutros campos de colaboração.

Diálogos de sala de aula

Uso a expressão "diálogos de sala de aula" para designar um texto cujo conteúdo principal consiste num conjunto de interacções entre professores e alunos ou entre alunos ocorridas em aulas de Matemática. O texto inicia-se com uma breve contextualização da aula em que incluí a tarefa que originou o diálogo.

No conjunto debruçámo-nos sobre três destes textos que, de acordo com o negociado na primeira fase do projecto, foram seleccionados por mim: 1: *Chove mais em Lisboa do que no Porto?*; 2: *Explorações com números*; 3: *Como dividir nove chocolates por oito pessoas?* O terceiro é uma tradução pessoal de um episódio incluído em *Standards 2000 - Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000, p. 186). Os outros dois têm origem em recolhas de dados feitas no âmbito das teses de mestrado de Guimarães (1996) e Segurado (1997). O primeiro foi usado por mim e Fátima Guimarães na dinamização de um grupo de discussão realizado no ProfMat 2000. *Explorações com números* é uma expansão que fiz de materiais entregues aos participantes do grupo temático 13 realizado no ProfMat 96. Incluí nestes materiais a transcrição de parte da discussão que ocorreu na turma a propósito da exploração da tarefa com o mesmo título. Fi-la a partir da gravação em vídeo da aula que me foi, gentilmente, emprestada por Irene Segurado, uma das co-responsáveis pelo grupo temático.

A análise de diálogos de sala de aula ocupou a maior parte do tempo da 2ª, 3ª e 4ª sessões de trabalho e entrelaçou-se com a discussão de dois documentos de carácter teórico/prático. Na primeira fase de análise de cada um destes diálogos, procurei que as professoras recorressem à sua experiência e saberes para reflectirem sobre aspectos do discurso da aula relacionados com o tema do projecto. Em seguida, debruçámo-nos sobre as ideias teóricas incluídas num dos documentos. Posteriormente, essas ideias foram mobilizadas numa nova fase de análise do(s) diálogo(s). Este processo foi precedido por uma observação ou exploração da tarefa que originou as interacções.

Concretizo estas ideias a partir da descrição do trabalho desenvolvido com base nos diálogos 1 e 2. O primeiro documento analisado foi *Chove mais em Lisboa do que no Porto?* Depois de uma breve observação da tarefa, procedemos à leitura do diálogo com o objectivo de identificar e analisar segmentos relacionados com argumentação matemática. Entre as questões que orientaram este trabalho estão por exemplo: Há, ou não, segmentos deste tipo? Em caso afirmativo, o que os originou? O que facilitou a sua emergência e desenvolvimento? Que papéis assumiram os alunos? Que papéis desempenhou a professora? Há momentos da aula que, se geridos de outro modo, poderiam ser, potencialmente, favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática? Depois de terminada esta fase, debruçámo-nos, por proposta minha, sobre um texto que elaborei com base nas ideias de Forman, Larreamendy - Joerns, Stein, e Brown (1998) que, do meu ponto de vista, poderia ser útil para problematizar o papel do professor no desenvolvimento de argumentações colectivas. No final sugeri que pesquisássemos, no diálogo, estratégias discursivas referidas por estes autores e analisássemos o seu reflexo no discurso da aula, o que viemos a concretizar.

Na mesma linha, a primeira fase de trabalho com o diálogo *Explorações com números* (diálogo 2) foi precedida por uma exploração da tarefa a ele associada feita por Anita e Rebeca que a desconheciam. Sugeri que a análise deste diálogo incluísse a pesquisa de situações de desacordo e do modo como foram ultrapassadas e, também, uma reflexão sobre mensagens que, implicitamente ou explicitamente, pareciam estar a ser veiculadas pela professora relativamente aos papéis que os alunos devem desempenhar no discurso da aula. Através desta sugestão, procurei que a análise do diálogo não deixasse de lado uma questão que, do meu ponto de vista, é crucial quando se equaciona o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática: a cultura de sala de aula. A essa fase seguiu-se a discussão do texto *Dinâmica da argumentação na sala de aula de Matemática: Normas sociais e normas sociomatemáticas* que preparei com base nas ideias de Cobb, Yackel e Wood sobre este tema (por exemplo, Cobb & Yackel, 1998; Yackel, 1997; Yackel & Cobb, 1996; Yackel, Cobb, & Wood, 1999). Por último, revisitámos os diálogos 1 e 2 tendo por referência as ideias discutidas.

Do meu ponto de vista, a análise de diálogos de sala de aula possibilitou uma boa entrada ao processo de colaboração e permitiu uma abordagem frutuosa ao tema do projecto. Apresento dois casos que, a meu ver, clarificam e apoiam esta ideia.

Quando analisámos o documento *Chove mais em Lisboa do que no Porto?* confrontámo-nos com várias dúvidas relacionadas com o porquê de certos movimentos da professora. Esta experiência foi favorável para reforçar a importância de se ter em conta o que o professor diz sobre o que faz, e não apenas aquilo que faz, se se pretende compreender, adequadamente, o trabalho de ensino. Subsequentemente, no final da primeira fase de análise do diálogo *Explorações com números,* optei por entregar a Anita e Rebeca o texto *E se os alunos seguem caminhos imprevistos*? (Ponte, Oliveira, Cunha, & Segurado, 1998, pp. 73-76), da autoria de Irene Segurado, que analisámos. Este texto é uma história de sala de aula respeitante à turma em que esse diálogo ocorreu. Esta opção prendeu-se, por um lado, com o propósito de trazer para a sessão de trabalho a voz de Irene, ou seja, da professora que leccionou a aula, para que pudesse ser entendido o porquê da decisão que tomou quando se viu confrontada com uma via de exploração da tarefa que antes não tinha imaginado. Simultaneamente, quis reforçar, através desta história, que perspectivo o trabalho do professor como sendo, em vários aspectos, naturalmente imprevisível e que dúvidas, inquietações e problemas não traduzem, de modo algum, ausência de saberes adequados para ensinar, mas revelam, antes, uma preocupação de problematização e reflexão sobre o que se faz que é essencial ao crescimento profissional. Estávamos no início do processo de colaboração, Anita e Rebeca quase não me conheciam, era a sua acção lectiva que iria, mais tarde, ser objecto de análise e pareceu-me importante tornar visível esta perspectiva numa tentativa de diminuir eventuais constrangimentos futuros causados pela minha presença nas aulas.

Passo ao segundo caso. Antes de iniciarmos a discussão colectiva do texto *Dinâmica da argumentação na aula de Matemática: Normas sociais e normas sociomatemáticas* associado ao diálogo *Explorações com números,* pedi às professoras uma síntese dos principais aspectos analisados que, do seu ponto de vista, eram importantes para a criação, na sala de aula, de uma cultura propícia ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Nestes aspectos incluem:

> É importante que os alunos ouçam as explicações que os colegas apresentam e que saibam que se espera esta atitude da sua parte; que respeitem as opiniões dos colegas quando ocorrem desacordos e que perante um desacordo só se avance depois da turma chegar a um consenso. É importante que se responsabilizem os alunos por explicarem os seus raciocínios e as conclusões a que chegam; é importante que os alunos saibam que isto faz parte daquilo que se espera deles. É importante que os alunos sejam desafiados a formularem conjecturas e a defenderem-nas ou a abandonarem-nas. (MST 3, pp. 4-5, 07/12/01)

A leitura individual do referido texto, prévia à sessão em que sobre ele nos debruçámos, conduziu Rebeca a evocar a actividade de análise do diálogo e a estabelecer conexões entre as ideias teóricas nele incluídas e vários dos aspectos salientados. Ou seja, o trabalho com o diálogo facilitou a compreensão do texto e o texto reforçou a pertinência de ideias que tinham sido consideradas importantes. Além disso, a leitura do texto e sua posterior discussão, proporcionou uma ocasião para as professoras reflectirem sobre aspectos das suas práticas, o que contribuiu para que surgissem novos olhares sobre estas práticas. Por exemplo, no âmbito da análise colectiva do texto, Rebeca salienta que quando, individualmente, o leu, reparou que numa citação de Cobb e Yackel "está diferenciado *explicação* de *justificação*" (TST 4, p. 6, 14/12/01). Indica ter alguma dificuldade em distinguir estas noções no que é apoiada por Anita. Procuro incentivar uma troca de ideias focada nos significados que cada um dos elementos do grupo de pesquisa lhes atribui, visando tornar mais claro o que as aproxima e o que as distingue. No decurso deste diálogo Rebeca refere:

> E agora estou a pensar. Eu uso nos testes a palavra "justificar" muito mal (risos). O que eu quero é que expliquem como fizeram não precisam de dizer porquê... (risos). Não sei... Acho que nos testes o que eu quero não é bem que eles justifiquem... (risos). Se calhar umas vezes será justificar, outras é só explicar ... Mas uso sempre a palavra justifiquem. Digo, por exemplo, "diz justificando" indiscriminadamente e não digo "diz explicando"... Acho que tenho a tendência para usar, nomeadamente no contexto de teste, a palavra "justificando" com o objectivo de "explicação". Ai agora... Nunca tinha pensado nisto, sabes? (Rebeca, TST 4, p. 7)

Documentos de carácter teórico ou teórico/prático

Documentos de carácter teórico ou teórico/prático são textos que, contrariamente aos "diálogos de sala de aula", incluem a apresentação de ideias teóricas mais directamente focadas no tema do projecto e/ou consideradas relevantes para apoiar ou problematizar as actividades que tencionávamos desenvolver ou que já tinham sido concretizadas. O que distingue um documento teórico de um teórico/prático é que este último inclui episódios ou exemplos de aulas de Matemática que ilustram as ideias apresentadas ou que são analisados usando-as como recurso.

Tabela 7: Documentos de Carácter Teórico ou Teórico/prático

Título do documento	Tema dominante	A/D	Actividade(s) associada(s) à discussão	Observações
1) Orquestração das discussões na sala de aula e papel do professor	A argumentação colectiva na aula de Matemática e estratégias discursivas que o professor pode mobilizar ao orquestrar discussões.	27/11/01	Análise do diálogo *Chove mais em Lisboa do que no Porto*?(doc. usado na 2ª fase de análise).	• Elaboração pessoal com base nas ideias de Forman et al. • Dossier inicial.
2) E se os alunos seguem caminhos imprevistos? (Ponte et al., 1998, pp. 73-76)	História de sala de aula associada à exploração da tarefa *Explorações com números*.	07/12/01	Análise do diálogo *Explorações com números* (após a 1ª fase de análise).	História da autoria de Irene Segurado.
3) Dinâmica da argumentação na aula de Matemática: Normas sociais e normas sociomatemáticas	Cultura da aula de Matemática e envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática.	14/12/01	Análise dos diálogos *Chove mais em Lisboa do que no Porto*? e *Explorações com números* (nova fase de análise).	• Elaboração pessoal com base nas ideias de Cobb, Yackel e Wood. • Dossier inicial.
4) Standards 2000: Normas raciocínio e prova — Contextualização da publicação e resumo sobre estas normas	Raciocínio matemático, argumentação e prova ao longo do ensino não superior.	04/01/02	Preparação da aula de Rebeca gravada por um colega (o doc. é fonte de ideias).	• Elaboração pessoal com base em NCTM (2000) + cópia de extractos do original. • Dossier inicial.
5) Mathematical investigations: Powerful learning situations (Chapin, 1998)	Tarefas de investigação no ensino e aprendizagem da Matemática: significado e importância; exemplo e sugestões de exploração	15/01/02	Preparação futura das aulas em que será proposta a tarefa *Quadrados em Quadrados*.	Breve análise em 15/1; retoma-se em Maio 2002 no âmbito da preparação das aulas.
6) Múltiplas faces de um problema de Matemática; Modelo ortogonal para análise de tarefas[45]	Modelos de análise de tarefas matemáticas; distinção de tarefas quanto à sua natureza.	22/01/02	Reflexão sobre a natureza de tarefas (após a análise de alguns exemplos).	Documentos de trabalho pessoais elaborados antes do projecto. O primeiro apoia-se em ideias de Borasi *(1986).*
7) Pensar matematicamente	Pensamento matemático: particularização, generalização, formulação de conjecturas e produção de uma argumentação convincente.	22/01/02	• Reflexão sobre a aula de Rebeca gravada por um colega (questões que emergiram na 1ª fase de reflexão).	Documento de trabalho pessoal elaborado antes do projecto. Adaptação de um extracto de Mason, Burton e Stacey (1984).
8) Alguns dos significados de argumento e argumentação no âmbito da Educação Matemática e Filosofia	Perspectivas sobre argumento e argumentação matemática a partir de pontos de vista de diversos autores	08/02/02	• idem • Apresentação das narrativas e análise de conteúdo (questões que reforçam a necessidade da discussão).	• Elaboração pessoal com base em ideias de Carrilho (1992), Krummheuer (1995), Lampert (1990), Oléron (1996), Yackel & Cobb (1994), e Wood (1999). • Dossier inicial.
9) O papel do professor e dos alunos no discurso (NCTM, 1994, pp. 37-54)	O discurso na aula de Matemática	22/02/02	Análise de conteúdo das narrativas (doc. usado após a 2ª fase de análise).	
10) Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática (Boavida, 2001)	A demonstração no ensino da Matemática: Que significado? Que papel? Que relações com a actividade de formulação conjecturas?	22/02/02	Reflexão sobre a aula de Rebeca gravada por um colega (questões que emergiram na 2ª fase de reflexão).	Dossier inicial.
11) Mathematical argumentation: Putting umph into classroom discussions (Stein, 2001)	A argumentação matemática na aula: descrição e análise de uma situação de argumentação colectiva.	05/03/02	—	Dossier inicial.
12) Todos os minutos contam: Como fazer funcionar a aula de Matemática(Johnson, 1982) (extracto traduzido)	As questões na aula de Matemática.	26/04/02	Reflexão sobre aulas leccionadas por Anita na terceira fase do projecto.	Documento recolhido antes do início do projecto; tradução não pessoal.
13) Dinâmica da argumentação na aula de Matemática: Modelo de Toulmin	Micro e macroestrutura de um argumento segundo Toulmin e utilização do modelo no âmbito da Educação Matemática.	14/05/02	Reflexão sobre episódios de argumentação de aulas gravadas, sobretudo, na 3ª etapa, 1ª fase do projecto.	• Elaboração pessoal a partir Toulmin (1993) e de outros autores sobre o modelo. • Dossier inicial.
14) Uma tarefa em grande grupo (Brocardo, 2001, pp. 297-311)	Tarefas de investigação: Um exemplo de exploração na aula de Matemática	17/05/02	Preparação das aulas em que foi explorada a tarefa *Quadrados em Quadrados*.	

[45] Esquema construído a partir das ideias apresentadas por João Pedro da Ponte num seminário realizado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Distingue quatro tipos de tarefas — exercícios, problemas, explorações e investigações — fazendo variar o conhecimento, ou não, do processo de resolução e o grau de explicitação da tarefa.

Na tabela 7 indico todos os documentos de carácter teórico ou teórico/prático analisados/discutidos (A/D) nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa. Ordeno-os por ordem cronológica da data em que sobre eles incidiu o trabalho do grupo e refiro, para cada um, o tema dominante. Indico, ainda, se adequado, outra(s) actividade(s) desenvolvida(s) na *mesma* sessão de trabalho ou sessões *vizinhas* directamente conectadas com a análise/discussão do documento.

Como se constata pela observação da tabela, alguns dos documentos trabalhados no grupo de pesquisa faziam parte da versão primeira do dossier que acordámos organizar ao negociarmos a primeira fase do projecto de colaboração. Na altura em que estabelecemos este acordo, decidimos, a partir de uma proposta que fiz, incluir neste dossier duas secções: uma com textos que fossemos considerando relevante discutir e outra com tarefas que nos parecessem prometedoras face ao tema do projecto e ao currículo do 8º ano de escolaridade. Decidimos, também, que eu daria os primeiros passos relativos à constituição do dossier e, embora qualquer um dos elementos do grupo de pesquisa pudesse contribuir para qualquer uma das suas secções, eu assumiria grande parte da responsabilidade pela pesquisa de documentos. Com a continuidade do trabalho, a secção relativa às tarefas foi enriquecida por todas. A destinada a documentos veio a ficar inteiramente a meu cargo. Assumi, assim, o papel de seleccionar ou elaborar todos aqueles que trabalhámos colectivamente.

Para organizar a versão inicial do dossier, escolhi textos incluídos em publicações diversas e optei por produzir outros destinados, intencionalmente, a apoiar as actividades do projecto (documentos 1, 3, 4, 8 e 13 — tabela 7). Tomei esta segunda opção quando considerei que as ideias que importava analisar estavam dispersas por vários artigos ou livros ou incluídas em publicações excessivamente extensas em que parte substancial do conteúdo não era relevante para o trabalho do grupo de pesquisa. Num dos casos — texto *Standards 2000: Normas raciocínio e prova* — fi-lo, sobretudo, para procurar diminuir as dificuldades causadas pela utilização da língua inglesa na publicação que lhe deu origem: *Standards 2000 - Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). Este último texto foi acompanhado por uma cópia integral das secções referentes às normas *reasoning and proof*, incluídas nesta publicação, que consultámos, frequentemente, durante a discussão do documento que elaborei.

O desenvolvimento do projecto foi determinante na selecção dos textos que discutimos, bem como da ocasião em que o fizemos. Com efeito, houve documentos que incluí na versão inicial do dossier que não foram trabalhados colectivamente. Em contrapartida, como se constata na tabela 7, ao longo da primeira fase do projecto fomos analisando/discutindo "novos" textos que seleccionei por considerar que poderiam ser úteis à reflexão sobre questões que debatíamos ou aspectos relacionados com a actividade que tínhamos em mãos. Anita e Rebeca sempre mostraram um grande interesse pelos "novos" documentos que propunha. Aliás, não foi raro que a minha referência ocasional ou intencional a certos textos originasse a expressão da vontade de os conhecerem. O documento 12 surgiu, precisamente, por esta via. Houve outros casos em que os textos pelos quais as professoras mostraram interesse e que disponibilizei, se destinaram, apenas, a consulta pessoal e, por isso mesmo, não os incluí na tabela 7.

Os temas sobre os quais nos debruçámos foram diversificados. Alguns textos incidiam, directamente, no foco do projecto de investigação colaborativa. É o caso, por exemplo, daqueles que abordavam aspectos relativos a argumentação, prova, raciocínio matemático ou cultura de sala de aula favorável à existência e desenvolvimento de actividades de argumentação matemática (documentos 1, 3, 4, 7, 8, 10, 11 e 13 — tabela 7). Outros relacionavam-se, também, com o tema do projecto, mas eram mais abrangentes no sentido em que abordavam aspectos relativos a tarefas ou ao discurso na aula de Matemática (documentos 5, 6, 9, 12 e 14 — tabela 7). Esta separação é, de certo modo, artificial. Com efeito, em diversos textos várias destas questões eram abordadas de forma integrada. Os documentos 4, 5 e 11 são, entre outros, exemplos em que surge esta integração.

Procurei que a actividade de análise/discussão de documentos se entrelaçasse, significativamente, com aspectos da prática profissional. Tentei, assim, evitar que ocorressem nas sessões de trabalho discussões meramente teóricas por mais pertinentes que fossem, do meu ponto de vista, as ideias que analisaríamos. Esta preocupação traduziu-se em cuidados de três tipos. O primeiro está relacionado com as características dos textos que propus trabalharmos: a quase totalidade foi de carácter teórico/prático. O segundo cuidado prende-se com a orientação que procurei imprimir à própria actividade de discussão. Era frequente os textos sobre os quais decidíamos debruçar-nos serem analisados, individualmente, por mim, Anita e Rebeca antes da sessão que lhe dedicaríamos. Nesta sessão propunha que o trabalho colectivo incidisse na identificação e análise de ideias chave e pontos críticos, na problematização de situações da prática lectiva à luz das ideias defendidas no texto e em implicações destas ideias para prática. Por exemplo, quando pedi às professoras que, na sequência da análise do documento 11, sistematizassem, por escrito, as duas/três ideias aí referidas que considerassem, particularmente, relevantes para a prática tendo em conta o tema do projecto, referem:

> Isto é a propósito da discussão, da argumentação na sala de aula, não é? O que é que pode promover a argumentação na sala de aula? Sistematizei três ideias chave: o ambiente, as tarefas e a outra é encorajar os alunos a defenderem e a argumentarem diferentes pontos de vista. Portanto, a primeira foi que devia haver uma atmosfera de sala de aula de mútuo respeito e confiança para que os alunos se sentissem confortáveis para criticarem o trabalho dos colegas e depois se arriscarem eles próprios a cometerem erros. Depois as tarefas... Os professores seleccionarem tarefas que possam gerar diferentes posições e em que os alunos possam encontrar diferentes soluções. Por último é que alunos devem ser encorajados a alinhar as posições que tomam e a defendê-las convencendo os outros da correcção das mesmas com evidências matemáticas. (Rebeca, TST 16, p. 35, 28/03/02)

> O que eu destaquei foi o tipo de tarefa e o facto do professor se preocupar em fomentar nos alunos a vontade de defender os seus raciocínios, entre eles também... É o papel do professor, no fundo... Clarifica os pólos do debate que é uma das coisas que ele faz... Joga um bocado... O que é que se está a passar aqui, ali... E depois, no fundo, passa um bocado "a bola"... Motiva os alunos a defenderem ou a apoiarem as opiniões uns dos outros. O que é que ele faz? Coloca questões, e pronto, tenta que sejam eles a defender. (Anita, idem, p. 36)

O terceiro cuidado influenciou a localização temporal das sessões destinadas ao trabalho com documentos de carácter teórico ou teórico/prático. Tentei que na vizinhança próxima da primeira vez que um documento era analisado ou discutido houvesse outra actividade cuja incidência primeira fosse alguma vertente da prática profissional dos professores, sejam eles Anita, Rebeca ou outros. Ou seja, ao mesmo tempo que procurava que as professoras contactassem com ideias teóricas que considerava poderem ser úteis para o desenvolvimento do projecto, procurava, também, que a reflexão teórica pudesse ser investida, proximamente, para pensar a prática ou emergisse de necessidades oriundas da reflexão sobre a prática. A terceira coluna da tabela 7 ilustra várias das associações que existiram entre a análise/discussão de documentos e outras actividades. Refiro três exemplos que em conjugação com a observação desta tabela e a informação que apresentei a propósito do processo de análise dos diálogos de sala de aula, podem contribuir para clarificar como foi concretizado o trabalho.

O primeiro exemplo ilustra a articulação entre a segunda e terceira fases da primeira etapa do projecto e foca-se em relações entre a análise de tarefas, a actividade reflexiva a propósito de aulas das professoras e o trabalho com documentos. Perto do início da actividade do grupo de pesquisa, eu e Rebeca levámos para as sessões de trabalho duas tarefas que, tendo pequenas diferenças de formulação, eram idênticas no essencial. Eu escolhi-a entre materiais de trabalho pessoais e Rebeca seleccionou-a a partir da revista *Educação e Matemática nº 50*. Ambas foram inspiradas no artigo "Mathematical Investigations: Powerful Learning Situations" (Chapin, 1998) que inclui uma contextualização teórica sobre o significado e importância das tarefas de investigação no ensino da Matemática e apresenta um exemplo, o percursor das tarefas, acompanhado de possíveis sugestões para a sua exploração.

A primeira fase de análise dessas tarefas, que ocorreu nas sessões de trabalho 4 e 6 (14/12/01 e 08/01/02), originou a leitura do referido artigo (documento 5 — tabela 7) que levei para o grupo após termos concluído que uma delas, modificada ou não, era adequada aos objectivos do currículo do 8º ano de escolaridade e do projecto. Pretendi, através deste meio, ilustrar as potencialidades das tarefas de investigação, em particular, para a emergência de situações favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e, simultaneamente, proporcionar apoio à preparação das aulas em que viesse a ser trabalhada.

Rebeca decide propor aos seus alunos a tarefa *Quadrados em Quadrados* — que constitui uma adaptação das anteriormente discutidas e que retém o título da incluída na revista *Educação e Matemática* — em aulas que serão objecto de análise no grupo de pesquisa, o que vem a concretizar em 27 e 28/05/02. Em várias sessões de trabalho realizadas pouco antes destas datas, trocámos ideias a propósito de aspectos diversos relacionados com a sua preparação. Estávamos muito perto do final do ano lectivo e havia grandes preocupações com a rentabilização do pouco tempo que restava, tanto mais que havia tópicos curriculares ainda não leccionados. Numa destas sessões, refiro a existência de uma tese de doutoramento que ilustra como foi organizado e decorreu o trabalho com a tarefa da *Educação e Matemática* numa turma do 8º ano de escolaridade. Ambas as professoras manifestam interesse em conhecer o que é dito, o que conduz à análise do documento *Uma tarefa em grande grupo* (documento 14 — tabela 7). Esta análise foi pertinente para clarificar as exigências de tempo que a exploração desta tarefa, tal como estava formulada, acarretava; foi significativa para delinear uma formulação alternativa que permitisse encurtar este tempo sem que a tarefa perdesse o carácter investigativo ou a professora se substituísse aos alunos no essencial da actividade matemática que pretendia que realizassem; foi relevante para conceber materiais de apoio que possibilitassem uma melhor rentabilização das discussões e para proporcionar a Rebeca ideias que lhe foram úteis para delinear a organização das aulas e imaginar questões com que poderia confrontar os alunos.

O segundo exemplo revela de que modo a discussão do documento 4 — *Standards 2000: Normas raciocínio e prova* — contribuiu para perspectivar a aula de Rebeca gravada por um colega e, simultaneamente, permitiu evidenciar a importância de se dedicar uma atenção especial ao tipo de tarefas que se propõem aos alunos quando se pretende, em particular, que a argumentação matemática seja uma vertente importante da actividade da aula. No decurso da discussão deste documento, Rebeca decide que na aula a gravar pelo colega apresentará à turma a tarefa *Números triangulares* aí referida, tanto mais que se assemelha a outra incluída no compêndio do 8º ano adoptado na escola que já tencionava apresentar-lhe.

Analisámos o episódio referente à tarefa a partir do texto original dos *Standards 2000* que relata, com algum pormenor, o processo adoptado pela professora para organizar e promover a sua exploração na aula. Discutimos as potencialidades de certos desafios com que confrontou os alunos fruto de questões que lhes colocou, e as limitações que seriam introduzidas na sua experiência matemática se estas questões não tivessem existido. Observámos de que modo incentivou a formulação de conjecturas e como procurou que a turma fosse para além do raciocínio indutivo. No final, Rebeca refere que vai preparar a aula e sugere que troquemos impressões a este propósito na sessão de trabalho seguinte, o que viemos a fazer. A sua descrição daquilo em que pensou revela, claramente, que o texto discutido foi uma fonte inspiradora de ideias para a preparação do trabalho de ensino, mas não determinou esta preparação. Além disso, a comparação que sugeri que fizéssemos entre o percurso conjecturado para esta aula, tal como Rebeca o imaginou, e aquele que seria feito pelos alunos se apenas realizassem a tarefa do compêndio tal como estava formulada, leva a constatar que esta tarefa conduziria a uma actividade matemática muito limitada:

> Perguntar qual é o centésimo número, como vem nos *Standards*, acho que também faz sentido, tal como essa professora perguntou. Se eles não conseguirem chegar logo ao centésimo uma das perguntas em que eu tinha pensado era perguntar como é que faziam para chegar ao 7º, ao 8º, como a professora dos *Standards* fez. A ideia é que eles cheguem a (100x101)/2 porque para encontrarem o centésimo número, se forem somar todos os números demoram muito tempo e mesmo assim correm o risco de se enganarem... (risos) (...) Uma sugestão que está nos *Standards* que achei interessante é que os alunos utilizem um esquema para representarem os números que já descobriram e pensei dar uma outra sugestão que não está lá que é talvez em função da ordem do número. Dizer, por exemplo, que o primeiro número a ordem é 1, o segundo é ordem 2, etc. para ver se conseguem descobrir alguma relação entre a ordem do número e o número triangular correspondente. (...) Na tarefa dos números triangulares do compêndio têm lá os três primeiros representados e eles só têm que dizer qual é o 4º e o 5º. Não explora nada mais... Quase que só tinham que desenhar mais uns pontinhos. Perde-se o resto... (Rebeca, TST 6, p. 3, 08/01/02)

Através do terceiro exemplo, procuro evidenciar uma ocasião em que foram as questões surgidas no âmbito da actividade que desenvolvíamos que conduziram a que agendássemos uma sessão de trabalho para discussão de um texto focado nestas questões. Durante a reflexão sobre a aula de Rebeca gravada por um colega, Anita levanta a questão da justificação produzida nesta aula para a conjectura relativa ao enésimo número triangular formulada pelos alunos, constituir, ou não, uma demonstração desta conjectura e, no caso de não o ser, que terminologia deverá ser usada na aula para nomear actividades justificativas do tipo daquela que tinha sido desenvolvida:

> Como é que tu demonstravas isto? Era por indução... Mas neste nível não pode ser. (...) Será que podemos usar a palavra demonstração? (...) Aí é que está a questão. Não sei se se pode dizer ou não, percebes? (...) Será conveniente usar a palavra? Não vai induzir mais tarde a que eles pensem que é assim que se faz? (Anita, TST 9, pp. 23-24, 29/01/02)

Levantam-se, também, questões sobre como ajudar os alunos a compreenderem a necessidade da prova e a encontrarem sentido nesta actividade. Parecia-nos, ao analisarmos a aula a partir da gravação, que não tinham compreendido o porquê de Rebeca ter recorrido à prova de Gauss para justificar a conjectura, intuição que a professora tinha já tido durante a aula: "Eles não sentiram a necessidade da prova. Acho que depois para eles aquilo foi mais uma outra forma de chegar ao termo geral que já lá estava" (Rebeca, TST 9, p. 23). Decidimos discutir o documento 10 que constitui uma abordagem, precisamente, a todos estes aspectos. Esta discussão reforçou, por exemplo, a importância de entrelaçar, com sistematicidade, as actividades de formulação e teste de conjecturas com as actividades de prova e de confrontar os alunos com situações que tornem visíveis não só as potencialidades, mas também as limitações do raciocínio indutivo. Esta preocupação atravessou várias das aulas leccionadas pelas professoras e originou frequentes trocas de ideias nas sessões de reflexão a elas dedicadas. Além disso, a análise do artigo permite a Anita e Rebeca contactar com a ideia de "exemplo generalizável" (Veloso, 1998), enquanto processo de prova, que mobilizaram, nomeadamente para preparem as aulas em que foram exploradas, respectivamente, as tarefas *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* e *À procura de dízimas finitas*.

Ao longo do projecto de investigação colaborativa a análise/discussão de documentos esteve, sobretudo, presente em sessões de trabalho localizadas na primeira fase e, dentro desta, na segunda etapa. A terceira coluna da tabela 7 revela esta incidência. Importa, no entanto, sublinhar que muitas das ideias discutidas informaram e contribuíram para actividades desenvolvidas em sessões de trabalho que não estas, como, aliás, procurei evidenciar através da figura 6 e das observações à tabela 6. Por exemplo, quando sugeri que se observassem alguns dos acontecimentos ocorridos em aulas de Anita ou Rebeca à luz dos conceitos de normas sociais ou sociomatemáticas, ou quando as professoras elaboraram a primeira versão de alguns dos *slides* que foram utilizados na dinamização do grupo de discussão. Sobretudo a partir de meados da terceira etapa da primeira fase do projecto, começou a ser usual falarmos, naturalmente, sobre vários conceitos que tínhamos debatido: "tarefa", "actividade", "problema" "tarefa de investigação", "normas", "discurso", "garantias", "fundamentos", "tipos de argumentos", "redizer as contribuições dos alunos", etc. Esta terminologia tinha passado a fazer parte do património de saberes comuns ao grupo de pesquisa. Apresento um extracto da transcrição de uma sessão de trabalho localizada em finais de Maio de 2002 que ilustra, precisamente, esta ideia. Ao mesmo tempo, revela como Anita usa as ideias teóricas abordadas em *Orquestração das discussões na sala de aula e papel do professor* — o primeiro documento a ser colectivamente discutido — para reflectir sobre a aula que leccionou em 21/05/02 e, simultaneamente, usa a sua prática para problematizar essas ideias teóricas:

> Eu deveria era, se calhar, *redizer* mesmo... (...) Só que o *redizer* tem vantagens porque, por um lado permite salientar e valorizar, mas , por outro lado, ao *redizer* não estarei também eu a validar, às vezes, sem querer? Será que não vai fazer as duas coisas? (...) Não estou a falar do *redizer* o que eles disseram numa situação de desacordo só para fazer surgir à tona o desacordo, as diferentes posições. Não é disso que eu estou a falar. É quando eles estão a resolver uma situação, depende da situação e eles apresentam uma resposta e eu redigo... (Anita, TST 24, p. 34, 28/05/02; destaque usado para sublinhar uma noção referida no texto)

Procurei, através dos vários exemplos que apresentei e das considerações que sobre eles teci, destacar potencialidades da análise/discussão de documentos para o desenvolvimento do projecto. As perspectivas das professoras sobre esta actividade permitem, do meu ponto de vista, reforçar a ideia de que foi relevante a sua integração no trabalho colectivo:

> E depois também ganhei conhecimentos! (...) Fiquei a perceber melhor o que era a argumentação com os textos que analisámos, conheci modelos de análise, normas que gerem a sala de aula. (...) Fiquei a conhecer coisas que não sabia, em termos do que existe (...) fiquei a conhecer mais coisas. (Rebeca, E2, p. 11)

> Fiquei muito mais consciente em relação, para já ao tipo de tarefa, mas não só... Também às normas, como negociá-las, isso acho que foi… (...) E depois lá está, eventualmente eu podia *redizer* algumas vezes, mas não estava com aquela ideia... Pronto, se calhar saía por sair, digamos assim. (...) Tenho mais consciência sobre isso, posso fazê-lo mais vezes intencionalmente, e acho que isso é importante. (Anita, E2, p. 9)

> Eu acho que no comentar das aulas foi muito importante nós arranjarmos o tal referencial comum, porque o português é traiçoeiro. Podes dizer exactamente a mesma palavra, ou melhor nós as três dizermos exactamente a mesma palavra e cada uma estar a pensar numa coisa distinta. (...) podíamos pensar que nos entendíamos mas não nos entendermos se calhar muito bem. Estou a pensar em termos de significado do que diríamos. (...) Também ajuda a gente ler, reflectir, discutir como base de trabalho. (Anita, E2, pp. 17-8)

Além disso, as suas reflexões permitem destacar a pertinência de ter existido uma ligação muito próxima entre teoria e prática e, ao mesmo tempo, da componente teórica do trabalho não ter ocupado um tempo excessivamente longo considerando a globalidade do projecto. Como é visível num dos extractos apresentados em seguida, a expressão “componente teórica” é usada por Rebeca quando aborda, entre outros aspectos, esta actividade para fundamentar porque é que “o projecto ultrapassou largamente as minhas expectativas, muito” (E3, p. 29, 12/03/03):

> Havia um trabalho teórico antes que pensei na altura que ocupasse uma maior parte do que o outro trabalho. O trabalho ultrapassou as minhas expectativas porque apesar de ter a sua componente teórica, que também foi importante inicialmente, como já referi na outra entrevista, a outra componente foi predominante e, no fundo, as teorias foram depois contextualizadas na nossa prática. Foi por isso que ultrapassou as minhas expectativas. Não foi um trabalho muito teórico... (...) A parte teórica que era a que me agradaria menos

> ocupou menos tempo e a parte prática que era a que me agradava mais ocupou muito mais. E mesmo a teórica senti que teve utilidade. (Rebeca, E3, p. 32)

> Também achei muito importante a construção inicial dos significados, senão andávamos a falar de coisas diferentes e ninguém se entendia… desde definir o redizer, o repetir… todas aquelas coisas que nós lemos nos textos mas que também dissemos que íamos usar, em termos de potenciar oportunidades que surgissem na aula (...) inclusivamente, os tipos de prova, embora a gente ainda continue a discutir, mas acho que nisso não há acordo geral… os tipos de tarefas, classificações, todas aquelas coisas… (Anita, E3, pp. 70-1, 18/03/03)

Narrativas de episódios de argumentação matemática

A expressão *narrativas de episódios de argumentação matemática* foi a adoptada no grupo de pesquisa para designarmos a globalidade da conversação entre mim e as professoras a propósito de situações focadas nesta vertente do raciocínio matemático oriundas das suas aulas e que escolheram relatar na sessão de trabalho destinada a este fim. De acordo com o que negociámos, este momento localizou-se na segunda etapa da primeira fase do projecto.

Tínhamos já acordado que Anita e Rebeca durante, aproximadamente, duas semanas, observariam com uma atenção particular as suas aulas de modo a identificarem um ou dois episódios relacionados com argumentação matemática que considerassem, por alguma razão, particularmente significativos. Combinámos, também, que na sequência imediata da aula ou aulas em que emergissem estes episódios, fariam anotações pessoais ou utilizariam formas magnéticas de registo tendo em vista a sua reconstituição e posterior apresentação detalhada na sessão de trabalho destinada a "contar o que aconteceu", expressão que, na altura, utilizei.

As professoras apresentaram, no conjunto, cinco episódios. Referiram as tarefas que os alunos tinham em mãos, descreveram papéis desempenhados por si próprias e por outros elementos da turma e indicaram expectativas que tinham e sentimentos que experienciaram. Além disso, a conversação incluiu, a partir de questões que coloquei ou de observações que fiz, a explicitação de razões que levaram à escolha dos episódios e reflexões sobre o trabalho desenvolvido. Deste modo, as narrativas orais representaram, inevitavelmente, uma redução das experiências vividas por Anita e Rebeca — narrar pressupõe escolher o que se narra

— mas representaram, também, um alargamento desta experiência através da sua interpretação.

Transcrevi, na íntegra, as narrativas orais e enviei a Anita e Rebeca o respectivo documento antes da sessão de trabalho que dedicámos à sua análise colectiva. Formatei-o de modo a deixar uma margem ampla e demarcada do corpo do texto, destinada a anotações. Previamente tínhamos combinado que na análise individual das situações de argumentação relatadas, teríamos por referência indicadores que tínhamos usado no decurso da reflexão sobre a aula de Rebeca gravada por um colega: o que as desencadeou, o que facilitou ou dificultou o seu desenvolvimento, que problemas surgiram e o que permitiu, ou não, ultrapassá-los. Sugeri, além disso, que fossem anotados todos os aspectos considerados relevantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e/ou significativos no que se prende com o trabalho do professor, que surgissem durante a leitura individual. Propus, também, a utilização de uma mesma cor para sublinhar extractos de transcrição referentes ao mesmo indicador/aspecto e de cores diferenciadas para os respeitantes a indicadores/aspectos diferentes, como uma forma de facilitar e organizar a análise.

O processo designado no grupo de pesquisa por *análise de conteúdo das narrativas* retém algumas características desta técnica de análise de dados qualitativa, embora sem o mesmo grau de sofisticação e completude exigido a outros trabalhos mais formais. Teve por propósito essencial promover a reflexão e, no que respeita ao trabalho colectivo, desenrolou-se em duas etapas precedidas por uma breve apresentação da técnica feita a pedido das professoras que a desconheciam. A primeira etapa teve por ponto de partida a construção de um conjunto de categorias temáticas, utilizadas para recortar o texto da transcrição e, no final, para analisar oralmente o conjunto de extractos referentes a cada uma. O diálogo que a seguir apresento ilustra alguns dos passos dados visando a identificação destas categorias:

> Rebeca: Isso é o que é que tinha estado na origem, que tinha sido a pergunta que a Anita tinha feito, se tinha sentido naquele contexto unir os pontos do gráfico.

> Isto é o que originava a discussão. Depois era o que é que podia dificultar e achei que o facto de não haver desacordos poderia dificultar a argumentação, porque estavam todos de acordo e a resposta não estava bem, não é? A Anita depois é que na tentativa deles ultrapassarem a resposta incorrecta... Foi a vermelho as tentativas de ultrapassar o problema (risos). Depois usei o preto... Deixa cá ver qual era a minha ideia... Ah, era quando chegavam a consenso. (TST 10, p. 3, 08/02/02)

> Ana: Pois, era o tal encerramento. Portanto, no fundo, as categorias que tu usaste têm a ver com o início e depois com aquilo que eu chamei o desenvolvimento e depois como se chegou a consenso, que tem a ver com o como foram encerradas as situações de argumentação nas minhas palavras... Depois as dificuldades que, de alguma maneira, têm a ver com problemas, não achas? (TST 10, p. 3, 08/02/02)

O processo de construção de categorias usado na análise de conteúdo das narrativas teve por ponto de partida, como este diálogo deixa transparecer, a partilha dos vários itens que eu, Anita ou Rebeca considerámos relevantes durante a leitura individual das transcrições. Comparámo-los, identificámos os que eram próximos e os que eram distintos, agrupámos alguns deles, cuidámos de não excluir nenhum aspecto que alguma de nós tivesse considerado relevante e codificámos as categorias que, no final, do processo, assumiram o seguinte enunciado:

1. Início e desenvolvimento das situações de argumentação matemática
   1.1. O que as fez surgir/despoletou?
   1.2. O que as "alimentou"?
   1.3. Como foram encerradas?
2. Problemas ligados ao desenvolvimento das situações de argumentação matemática
3. Sentimentos experienciados pela professora
   3.1. Em relação ao episódio seleccionado
   3.2. Em relação à vivência da situação [experienciados no decurso da situação narrada] (MST 10, p. 2, 08/02/02)

A segunda etapa da análise de conteúdo foi desenvolvida a partir de uma proposta apresentada por mim e aceite pelas professoras: pesquisar verbos/expressões verbais usados nas narrativas para descrever acções da professora e dos alunos com o objectivo de reflectir sobre quais os intervenientes nas situações de argumentação narradas e seu papel; analisar funções dos argumentos que surgiram nestas situações. Tal como aconteceu na anterior etapa, decidimos começar por uma fase de análise individual anterior ao encontro destinado ao trabalho colectivo.

Como se depreende do que apresentei, o trabalho que realizámos a propósito das narrativas não percorreu todas as etapas de um processo de investigação narrativo, embora tenha incluído algumas destas etapas (ver, por exemplo, Ponte et al., 1998, p. 31). Mesmo assim, constituiu uma aproximação mais forte às práticas de Anita e Rebeca do que a que foi possibilitada pela análise de diálogos de sala de aula ou documentos de carácter teórico ou teórico/prático.

Houve, no entanto, vantagens em que esta actividade não fosse uma das primeiras a desenvolvermos. Com efeito, já tínhamos debatido várias ideias associadas ao tema do projecto. Este aspecto facilitou, quer a tomada de decisões, pelas professoras, sobre as escolhas que deviam fazer entre as múltiplas situações ocorridas nas suas aulas, quer a reflexão que foi feita. Além disso, já tinha havido oportunidade de nos conhecermos melhor o que era favorável a uma troca de ideias aberta e confortável para todas nós. Eu própria já me sentia mais à-vontade para solicitar a Anita e Rebeca que investissem no projecto e fora das sessões de trabalho colectivas, um tempo que, pela minha própria experiência, suspeitava ser bem mais longo do que o exigido, por exemplo, pela leitura e análise de um documento do tipo daqueles que discutimos. Intuía que se não tivessem possibilidades de o fazer o diriam e confiava que, se assim fosse, conseguiríamos, em conjunto, encontrar uma alternativa adequada para todas.

Há dois aspectos relevantes que emergiram do relato e análise de conteúdo das narrativas: a importância da ampliação do papel dos alunos no discurso da aula e a clarificação do significado que, no âmbito do projecto, iríamos atribuir a argumentação matemática.

O primeiro aspecto sobressai durante a segunda etapa da análise de conteúdo das narrativas. Na sequência de uma troca de ideias sobre os papéis desempenhados pelos intervenientes nas situações de argumentação, a partir da partilha dos verbos/expressões verbais, propus que nos debruçássemos sobre o documento 9 (tabela 7), que incide sobre o papel do professor e dos alunos no discurso da aula de Matemática. O confronto deste documento com as acções dos intervenientes nas situações identificadas a partir das narrativas, permite revelar que uma das dimensões ausentes é a assunção, pelos alunos, da iniciativa de colocarem questões, seja à professora, seja aos colegas: "Que eles não fizeram perguntas, é verdade. (...) E agora estou a pensar mesmo nas aulas... Sem ser só o que está aqui... E acho que não" (Rebeca, TST 11, p. 3, 22/02/02).

Rebeca, na reflexão que apresenta durante a segunda entrevista, refere que uma das vertentes da sua prática com que, nas suas palavras, "Comecei a ter mais cuidado (...) depois do nosso projecto" (E2, p. 4), foi com a interacção entre os alunos que está associada à dimensão que referi: "Por exemplo, eu acho que já trabalhava mais a minha interacção com os alunos do que a interacção entre os alunos. (...) Também, se calhar, por isso pode ser mais difícil, não sei" (idem). Seguramente, não foi apenas a análise das narrativas que conduziu a este maior cuidado de que a professora fala e, certamente, haveria muitos outros caminhos que a ele poderiam levar. É plausível conjecturar, no entanto, que o trabalho com as narrativas, ou seja, sobre a própria experiência, articulado com o trabalho com documentos, possa ter sido favorável para fazer sobressair que envolver os alunos em actividades de argumentação matemática passa, também, por partilhar com eles o controlo do discurso da aula.

O segundo aspecto relevante que emergiu da análise de conteúdo de narrativas, está associado a questões que surgiram na primeira fase de análise da aula de Rebeca gravada por um colega e que voltaram a surgir durante o relato das situações de argumentação:

> Eu acho que tenho um bocado de dificuldade em distinguir, o que é que é mesmo uma argumentação. (...) Uma vez já perguntaste... Mas acho que eu tinha uma visão, ou que ainda tenho uma visão, um bocado redutora do que é que é... não sei se é redutora... Eu acho que é redutora, do que é que é argumentação... Pobre... (...) Começo-me a aperceber que se calhar o que eu pensava que era argumentação, porque nunca tinha reflectido bem sobre isso, se calhar eram apenas algumas justificações, percebes? Argumentação, se calhar, é um bocadinho mais e é difícil. Ainda é mais difícil desenvolver a argumentação do que simples justificações... Não sei... Devias arranjar umas coisas consideradas argumentação para nós analisarmos... (Rebeca, TST 8, episódios, pp. 14-5, 22/01/02)

Nesta altura, já tínhamos analisado alguns episódios de argumentação matemática como transparece, por exemplo, na intervenção de Anita imediatamente subsequente a este extracto: "Já analisámos" (idem). Interpretei que a actividade desenvolvida até ao momento tinha sido importante para fazer surgir dúvidas, mas que tinha chegado a ocasião de avançarmos para uma nova etapa que permitisse ir mais longe na compreensão do conceito de argumentação e de vários dos significados que lhe são associados. Tomo a iniciativa de referir um dos documentos do dossier (documento 8 — tabela 7) que foca, precisamente, alguns destes significados e decidimos debruçar-nos sobre ele depois da primeira etapa da análise de conteúdo das narrativas.

A discussão deste documento, a par do trabalho anteriormente realizado, ajudou a tomar decisões sobre o entendimento que daríamos a argumentação matemática no âmbito do projecto e, consequentemente, às actividades matemáticas em que as professoras procurariam que os alunos se envolvessem e aos momentos das aulas em que focaríamos a nossa atenção durante as sessões de reflexão. Seguindo, por exemplo, Krummhaeuer (1995) e Lampert (1990) — dois dos autores em que me apoiei para elaborar o documento 8 e aí referidos — acordámos que a argumentação matemática não devia ser considerada equivalente à demonstração matemática, entendida como um encadeamento dedutivo e formalmente lógico que conduz à necessidade lógica das conclusões. A adesão a esta ideia não significava, no entanto, que excluíssemos a possibilidade dos alunos se envolverem na produção de provas para conjecturas que formulassem. Estas provas deveriam permitir-lhes lidar com a questão da validade das conjecturas para todos os casos, ou seja, com a questão da generalidade. Simultaneamente, deveriam surgir na aula como um instrumento que possibilitasse garantir, ou não, esta validade e compreender as razões para acontecer o que acontecia. Decidimos, assim, focar-nos em situações em que os alunos formulam e testam conjecturas e produzem ou participam na produção de provas daquelas que resistem a tentativas de falsificação.

Sendo, além disso, a argumentação um modo possível de comunicação baseado na racionalidade que visa a obtenção de acordos através da apresentação de explicações e/ou justificações adequadas a cada campo de argumentação, considerámos que seria, também, importante investir e dedicar uma atenção especial aos momentos em que, na aula, emergem — ou importa fazer emergir — desacordos relacionados com a pertinência ou validade de ideias, conclusões ou processos matemáticos, independentemente desta emergência acontecer, ou não, no âmbito de situações do primeiro tipo. A análise do documento 8 tinha revelado que vários dos autores aí referenciados abordavam, explicitamente, a questão dos desacordos no âmbito de situações de argumentação. Também a análise das narrativas permitiu destacar que na aula de Matemática a argumentação é dificultada quando todos os alunos concordam com uma resposta ou raciocínio incorrectos:

> Porque antes eu considerei que houve uma dificuldade, que foi o facto de não ter havido desacordos, que pode ter sido uma dificuldade (...) Porque ela [Anita] diz: “A princípio até achavam que poderiam unir-se normalmente”. E eu achei que se tivesse havido uns que achassem que se podia unir normalmente e outros que não achassem, a discussão, naturalmente, surgia. Não precisavas tu [Anita] de estar a abordar… (...) Assim, como não houve, tiveste tu que estar a lançar uma isca para ultrapassar a situação… (Rebeca, TST 10, p. 9)

Neste caso, o professor confronta-se com o desafio de saber quais as questões a colocar para, nas palavras de Anita, “semear a semente da dúvida (...) [e] levar os alunos a reflectirem” (TST 10, p. 10-1).

Preparação de aulas

A preparação de aulas — o segundo campo de colaboração que considerei — organizou-se, como a tabela 6 ilustra, em torno de dois eixos: (A) procura de tarefas matemáticas potencialmente favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e (B) troca de ideias sobre as aulas em que seriam exploradas aquelas que, no âmbito do projecto, Anita ou Rebeca decidissem propor. Uso a palavra “procura” no sentido de “tentar encontrar” considerando o significado desta expressão de uma forma abrangente. Ou seja, deve ser entendida como “tentar encontrar” algo que já existe e adoptá-lo ou adaptá-lo de modo a satisfazer as exigências da procura, ou criar algo que corresponda a estas exigências usando, como recursos, saberes e/ou materiais disponíveis. Deste modo, incluo na procura de tarefas as actividades de análise, selecção, adaptação ou criação.

O trabalho realizado no grupo de pesquisa incidiu, sobretudo, no eixo (A) e é sobre ele que, essencialmente, se foca esta subsecção. Apresento, em primeiro lugar, uma panorâmica geral sobre aspectos que considero relevantes em relação ao segundo eixo (B). Em seguida, debruçar-me-ei, com mais detalhe, na actividade que, mais directamente, se prende com a procura de tarefas.

Troca de ideias sobre aulas a leccionar

A troca de ideias sobre aulas a leccionar surge associada à discussão de possibilidades de exploração das tarefas, a questões ou sugestões a apresentar, se necessário, no decurso desta exploração, a potenciais dificuldades dos alunos, a modos de lidar com estas dificuldades e a materiais de apoio às actividades de ensino. Houve tarefas que foram propostas por ambas as professoras em ocasiões diferenciadas. O espaçamento destas ocasiões permitiu que entre elas ocorresse a sessão de reflexão sobre as aulas em que, pela primeira vez, foram trabalhadas pelos alunos de uma das turmas. Nestes casos, a actividade reflexiva foi uma fonte de ideias para a preparação, pela professora da outra turma, das aulas em que as iria explorar com os seus alunos. Esta situação ocorreu, fundamentalmente, na preparação de aulas de Anita que apresentou várias tarefas subsequentemente a Rebeca. O extracto que a seguir apresento — em que esta professora se dirige à colega na sessão de reflexão sobre a aula em que trabalhou com a tarefa *Números em círculos* — ilustra esta faceta do trabalho desenvolvido que, intencionalmente, procurei incentivar:

> Em termos de tempo é estares mais atenta aos grupos que estão mais atrasados e tentares apoiar mais esses grupos, para que não haja uns que avancem muito e esses ficarem mais atrasados que foi o que me aconteceu. Ou então não deixar os outros avançarem, partir para a discussão mais cedo do que aquilo que eu fiz. (...) Pedir aos alunos do grupo para irem ao quadro explicar leva mais tempo. Tens que arranjar maneira de partir mais cedo para a discussão. (Rebeca, TST 14, p. 30, 12/03/02)

A actividade do grupo de pesquisa organizada em torno do eixo (B) teve por propósito essencial fazer emergir ideias que as professoras, se o entendessem, poderiam usar como recurso durante a preparação individual das aulas, aspecto por que eram responsáveis. Quer as ideias que surgiram no âmbito da actividade reflexiva que referi, quer as discutidas a partir de iniciativas das professoras, não eram, por si só, suficientes para esgotarem todo o trabalho de preparação das aulas. Mesmo quando as professoras as adaptaram de modo a ajustá-las, quer ao seu modo próprio de ensinar, quer a necessidades e interesses dos seus alunos, tiveram necessidade de as completar e refinar antes de iniciarem a prática lectiva.

Com efeito, durante a concretização desta prática não foi invulgar surgirem aspectos diversos que não foram, explicitamente, abordados quando conversámos sobre a preparação das aulas. Por exemplo, na aula de discussão da tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*, o discurso de Rebeca situou-se a dois níveis. Um, objecto de troca de ideias no grupo, mais directamente focado na exploração da tarefa em si mesma: conteúdos matemáticos envolvidos, conjecturas formuladas, prova de uma das conjecturas não refutada. Outro, da iniciativa da professora, centrado em aspectos relativos à natureza da actividade matemática: intervenções no sentido de incentivar os alunos a reflectirem sobre o significado de conjectura e o processo de formulação de conjecturas, sobre o significado de contra-exemplo e o seu papel na refutação de conjecturas, sobre o significado de prova e a insuficiência da verificação de uma conjectura por alguns casos para que possa considerar-se provada. Apoiando-se em pesquisas que fez, Rebeca termina a aula "contando a história" da conjectura de Fermat e sua prova e apresentando uma conjectura ainda não provada de enunciado muito simples e passível de compreensão pelos alunos. Desafia a turma a debruçar-se sobre ela tanto mais que, como refere, é oferecido um prémio a quem conseguir provar a sua veracidade ou falsidade. A reflexão que apresenta sobre um dos objectivos visados para a referida aula, permite apoiar estas ideias e, simultaneamente, revela a intencionalidade do segundo nível de discurso:

> Pretendia também que eles percebessem que as conjecturas têm valor em si e que percebessem a necessidade da prova. Daí a minha conversa do final da aula e de ter ido à *Internet* procurar exemplos de conjecturas não demonstradas.

> Pretendia ir um bocadinho mais longe. Não me ficar só pela realização da tarefa em si mesma, mas que percebessem porque é que era preciso provar e que se apercebessem que por mais experiências que fizessem com o *Sketchpad* não tinham provado nada. (Rebeca, TST 19, p. 7, 26/04/02).

À procura de tarefas

A procura de tarefas manteve-se ao longo de todo o projecto e envolveu todos os elementos do grupo de pesquisa quer individual, quer colectivamente. A actividade que desenvolvemos foi, no entanto, diferenciada, tal como o foi o tempo que lhe dedicámos durante as sessões de trabalho colectivo. O maior investimento de tempo surge na primeira fase do projecto, especificamente, na segunda etapa. Diminui na terceira etapa desta fase e decresce, ainda mais, na segunda fase.

No quarto encontro do grupo de pesquisa iniciámos o trabalho com tarefas. Um dos propósitos deste encontro e de outros localizados na segunda etapa e parte da terceira (primeira fase) foi fazer uma primeira selecção de carácter provisório das tarefas que poderiam ser adequadas aos objectivos do projecto, à planificação a longo prazo das actividades curriculares das professoras e às turmas a quem se destinavam. Pretendíamos constituir uma espécie de "base de dados" a ser consultada quando houvesse que tomar decisões sobre as tarefas a propor, em particular, nas aulas que seriam objecto de reflexão no grupo de pesquisa. Na oitava sessão de trabalho, esta actividade entrelaçou-se com uma discussão de carácter mais teórico sobre os conceitos de *tarefa* e *actividade*, diferentes tipos de tarefas matemáticas e suas potencialidades e, ainda, instrumentos que podem ser úteis para as distinguir.

Esta discussão surge a partir de uma proposta que apresentei depois de termos explorado alguns exemplos de tarefas seleccionados por mim ou por Rebeca. Sugiro que nos debrucemos sobre o documento 6 (tabela 7) respeitante a dois modelos de análise de tarefas matemáticas que, a meu ver, podem ser úteis para as diferenciar de um ponto de vista educativo e que os usemos para classificar os exemplos explorados. Este trabalho faz surgir, no grupo, pontos de vista divergentes. A troca de ideias revela que a origem da divergência se situa nos significados atribuídos à noção de "tarefa": "Ana: Parece-me que o que está aqui em causa é qual é o significado que atribuímos à palavra tarefa, não é?; Rebeca: É, exacto. É, é isso. Vamos ver" (TST 8, p. 10). É neste contexto, que distingo o conceito de *actividade* do conceito de *tarefa* que a pode proporcionar — dois conceitos que não eram muito claros para as professoras — apoiando-me em ideias incluídas em *A dinâmica da aula de Matemática* (Ponte, Boavida, Graça, & Abrantes, 1997, pp. 71-95). Este documento, a que faço referência, foi um dos incluídos na versão inicial do dossier, embora não conste da tabela 7 por não ter sido objecto de análise/discussão colectiva.

Várias das tarefas que analisámos com o propósito de constituir a "base de dados" foram rejeitadas por motivos variados: por exemplo, porque encontrámos melhores alternativas, porque não foram consideradas adequadas aos tópicos curriculares do 8º ano de escolaridade ou porque uma adaptação aos alunos deste nível de ensino as empobreceria fortemente. O último caso aconteceu, por exemplo, com a intitulada *Triângulos de perímetro igual* seleccionada por Rebeca a partir da revista *Educação e Matemática* 51. O segundo surgiu, por exemplo, com a tarefa *Jogos equitativos* que seleccionei a partir de *Normas profissionais para o ensino da Matemática* (NCTM, 1994, p. 42).

A meio da terceira etapa da primeira fase do projecto, a constituição da referida "base de dados" deixa de fazer grande sentido. Já havia um conhecimento partilhado sobre a natureza das tarefas que, potencialmente, eram favoráveis à emergência de situações propícias ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. O dossier incluía já alguns materiais a que se poderia recorrer e além disso, já havia uma noção, mais ou menos clara, dos temas curriculares que seriam leccionados nas aulas que seriam objecto de reflexão no grupo. Deste modo, a procura de tarefas passou a ser feita em função destes temas — e não tanto em função da constituição da "base de dados" —, o mesmo acontecendo na segunda fase do projecto. Nesta fase foram retomadas algumas das que tínhamos analisado anteriormente, por Anita ou Rebeca considerarem que eram relevantes para o ensino e aprendizagem dos tópicos matemáticos que iriam trabalhar nessas aulas. Foi o que aconteceu, por exemplo, com a intitulada *Jogo da soma e do produto* — uma adaptação de *Jogos equitativos* — que Anita propôs no âmbito do tema *Probabilidades* e também com *Quadrados de números terminados em 5* explorada pelos alunos de Rebeca no contexto das equações e quadrados de binómios.

Em termos gerais debruçámo-nos sobre mais do dobro das 12 tarefas propostas nas aulas em que estive presente e que, simultaneamente, foram objecto de reflexão no grupo de pesquisa ao longo da globalidade do projecto. Incluo na tabela 8 a designação destas tarefas, uma breve referência à sua natureza e o tempo dedicado à sua exploração nas aulas.

Tabela 8: Tarefas Propostas em Aulas da 1ª Fase e 2ª Fase do Projecto

Designação		Tipo	Exploração e discussão na turma	
			Anita	Rebeca
1. Números em círculos		Tarefa de investigação	• 9/04/02 • 11/04/02	04/03/02 *(D)*
2. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?		Misto de exercício e problema	14/03/02	
3. Lados, pontos médios e quadriláteros		Tarefa de investigação	• 16/05/02 • 21/05/02	• 10/04/02 *(T)* • 11/04/02 *(T)* • 15/04/02
4. Triângulos semelhantes, áreas e perímetros	Versão I	Problema com algumas características de tarefa de investigação		• 17/04/02 *(T)* • 18/04/02 *(T)* • 22/04/02 *(D)*
	Versão II	Problema	21/05/02	
5. Mais números em círculos		Tarefa de investigação		13/05/02
6. Um rectângulo de perímetro 20		Problema		20/05/02 *(D)*
7. Quadrados em quadrados		Tarefa de investigação		• 27/05/02 *(D)* • 28/05/02
8. Quadrados de números terminados em 5		Tarefa de investigação	• 11/06/02 • 13/06/02	23/01/03
9. Jogo da soma e do produto		Problema	17/10/02	
10. À procura de dízimas finitas		Tarefa de investigação	• 13/01/03 • 16/01/03 • 20/01/03	• 17/10/02 • 21/10/02 • 24/10/02
11. Uma questão de candeeiros		Problema	31/10/02	
12. Diagonal de um quadrado		Problema		7/11/02

Legenda: D – Aula dupla; T – Aula de turnos; Versão I e Versão II: a tarefa 4 foi apresentada com formulações diferenciadas.

A tabela 8 permite evidenciar que não considerando as diferenças existentes na formulação da tarefa 4, das doze tarefas diferentes apresentadas aos alunos, cinco foram exploradas por ambas as turmas, três apenas pela de Anita e quatro só pela de Rebeca. Esta distribuição deriva de decisões pessoais de cada uma das professoras.

Na realidade, não estabelecemos acordo algum relativamente à diferenciação, ou não, das tarefas a propor nas aulas que seriam objecto de reflexão colectiva. O que negociámos foi que deveriam ser, potencialmente, propícias ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e que não poderiam remeter para plano secundário o currículo do 8º/9º ano de escolaridade, nomeadamente os temas matemáticos aí referidos. O que determinava a escolha da tarefa era a planificação do trabalho de cada professora, ou seja, a constante preocupação que existiu foi que ela surgisse aos olhos dos alunos como naturalmente articulada com o(s) tópico(s) que aprendiam ou iriam aprender em determinado momento. Procurámos, assim, evitar que a experiência matemática por eles vivida nas aulas em que estivesse presente fosse vista como marginal relativamente ao seu trabalho nas restantes aulas. Por exemplo, um dos objectivos tanto da tarefa 6 como da 11, era a introdução das equações literais. Foram apresentadas em fases diferentes do projecto porque foi também em alturas diferentes que as professoras leccionaram este tópico. Do mesmo modo, a tarefa 7, proposta por Rebeca perto do final do ano lectivo, "envolve monómios e polinómios que é o que está a ser trabalhado no momento e envolve o teorema de Pitágoras que já foi trabalhado" (Rebeca, TST 26, p. 31, 18/06/02). Embora Anita tenha considerado a possibilidade de a apresentar aos seus alunos na primeira fase do projecto, não vem a fazê-lo por várias razões, entre as quais a artificialidade de que poderia revestir-se para a turma, face ao que trabalhava na altura. Opta, na segunda fase do projecto, por preferir uma outra com uma natureza idêntica — a tarefa 10 — por, do seu ponto de vista, se integrar melhor nos conteúdos curriculares que iria leccionar.

Ambas as versões da tarefa 4 apelam ao essencial da actividade matemática em que se pretendia envolver os alunos: formulação de conjecturas a partir da análise de regularidades e seu teste, discussão de que a verificação de conjecturas por alguns casos não basta para se considerarem provadas e prova das não refutadas. Esta característica, a par das duas versões incidirem sobre o mesmo tópico matemático, levou-me a considerá-las como variantes da mesma tarefa. Rebeca preparou o primeiro esboço da versão I supondo a sua exploração, pelos alunos, com o *Geometer's Sketchpad*, *software* que lhes era familiar. Durante a discussão deste esboço, Anita levanta o problema da utilização do computador não ser simples no seu caso. Não havia, na escola, uma sala equipada com este recurso, facto que a obrigava a deslocar a turma para a do Centro de Formação aí existente. Embora tenha recorrido a esta solução algumas vezes — por exemplo, quando foi trabalhada a tarefa 3 — a sua concretização acarretava dificuldades de vária ordem que, por vezes, eram incompatíveis, como acontecia na altura, com a planificação do seu trabalho. Ao analisarmos várias possibilidades para lidar com este constrangimento, surge a ideia de entregar aos alunos uma impressão dos ecrãs do computador imaginados para a versão I, como material de apoio à formulação de conjecturas. Rebeca adapta e desenvolve esta ideia quando elabora uma ficha de trabalho para outra das suas turmas. É esta ficha — a versão II da tarefa — que Anita utiliza, na sequência da colega ter feito um balanço muito positivo da actividade desenvolvida pelos seus alunos:

> Na outra turma a parte da resolução da ficha correu muito bem. Eles estiveram muito empenhados a fazer e formularam mais conjecturas, que eram exactamente as mesmas, mas pronto. (...) Portanto esta ficha também dá para fazer. Está é mais organizadinha, tem aquelas tabelas, está mais conduzida. Eles registam logo lá as coisas direitinhas. (Rebeca, TST 19, p. 3)

Nem todas as tarefas que analisámos no grupo de pesquisa foram objecto do mesmo investimento de tempo. Por exemplo, a rápida leitura das quatro primeiras que incluí na versão inicial do dossier, levou a que analisássemos, com mais pormenor, só duas delas. Noutra altura em que decidimos pesquisar tarefas relacionadas com o tema das equações, eu e Anita, a partir da consulta do currículo, apresentámos várias ideias, nalguns casos bastante semelhantes. Considerámos que, no conjunto, havia material adequado ao tema e aos objectivos do projecto e remetemos a identificação daquela(s) que seria(m) explorada(s) para perto do momento em fosse leccionado. Anita fez uma primeira selecção e o grupo de pesquisa veio a analisar, colectivamente, apenas três. Em ambos os casos, e também nalguns outros, foi um processo de filtragem que conduziu a que fosse dedicada uma menor atenção a algumas tarefas. No entanto, nem sempre esta menor atenção foi devida a filtragens.

Com efeito, as tarefas 2, 10 e 12 referidas na tabela 8, foram objecto de um menor investimento de tempo de trabalho do grupo de pesquisa do que as restantes aí incluídas — todas elas resultantes de um significativo processo de análise e discussão colectivas —, devido a outros factores. Quanto à tarefa 2, a menor atenção deveu-se a questões circunstanciais que abordarei no capítulo VII dedicado a Anita, a professora que a apresentou aos alunos. A tarefa 10 quase não exigiu tempo algum de trabalho colectivo, devido à empatia que com ela surge em termos de conteúdo, de forma e de relevância curricular, quando Rebeca, quem a seleccionou, a apresenta num encontro do grupo de pesquisa. Por último, a tarefa 12 é da autoria desta professora e apenas contribuí com uma sugestão de pormenor para o seu enunciado. É-me apresentada numa conversa telefónica por Rebeca, pois tínhamos acordado que qualquer uma das professoras poderia tomar a iniciativa de propor que eu estivesse presente em aulas suas quando considerasse que, potencialmente, poderiam surgir episódios de argumentação matemática. No âmbito do seu trabalho quotidiano de preparação de aulas, a professora evoca uma tarefa proposta em anos anteriores a alunos do 10º ano de escolaridade e transforma-a na tarefa 12 visando que a sua turma do 9º ano se envolva na formulação de uma conjectura e sua prova. Na conversa que tivemos considerámos que seria relevante eu assistir à aula em que fosse explorada, face às potencialidades que lhe percepcionámos tendo em conta o tema do projecto.

Algumas das tarefas referidas na tabela 8 surgem no grupo de pesquisa "pela mão" das professoras, como se depreende do que anteriormente apresentei. Outras surgem através de mim: por exemplo, a 1 — a que está associada a 5 que constitui uma extensão possível — a 8 e a 11. Casos houve em que a ideia inicial que originou as tarefas foi comum a mais do que um dos elementos do grupo e ocorreu quer quando, individualmente, se pesquisavam tarefas, quer quando se conversava a este propósito durante as sessões de trabalho: por exemplo, a 3, a 7 e a 9. Por vezes, a análise do primeiro esboço de uma tarefa, conduziu a uma formulação que proporcionou uma maior abertura e, por esta via, a uma maior possibilidade de surgirem episódios de argumentação. Apresento um exemplo que pode contribuir para apoiar esta ideia e, além disso, permite clarificar a actividade que desenvolvemos até o enunciado de uma tarefa adquirir a sua forma definitiva. Esta actividade teve características semelhantes à realizada noutras ocasiões localizadas, sobretudo, na terceira etapa da primeira fase do projecto.

Rebeca durante as pesquisas que fazia tentando encontrar hipóteses de tarefas que permitissem compatibilizar o tema do projecto com o das *Equações* incluído no currículo do 8º ano, descobre, num compêndio diferente do adoptado na sua escola, a percursora da intitulada *Um rectângulo de perímetro 20* (tarefa 6, tabela 8):

> E vi uma tarefa que pode ser interessante em termos de discussão para as equações literais que é o seguinte. É um problema: Um rectângulo tem 3 cm de altura e base *b*. Pretendemos encontrar um rectângulo de perímetro 20 acrescentando à base o mesmo que à altura. Quanto deveremos acrescentar? (...) Depois é a exploração do problema. Dão três valores para a base e o que eu achei mais interessante no problema é que nem todos os valores servem. (...) Por exemplo, a base ter 8 cm não faz sentido, porque o valor que iríamos acrescentar seria negativo. (...) Achei que era interessante porque podia gerar discussão e ao mesmo tempo tem a ver com as equações literais, dava para introduzir as equações literais. (...) Dava para ver que não pode ser qualquer valor. Criticar os resultados. (Rebeca, TST 16, pp. 21-2)

Na altura, estava preocupada com a planificação a médio prazo do tema. Tinha analisado os objectivos referidos no currículo, consultado as sugestões metodológicas, recolhido vários materiais que lhe poderiam ser úteis, mas não tinha tomado, ainda, decisões mais definitivas sobre quais as tarefas que, efectivamente, iria propor. Acordámos retomar numa sessão de trabalho posterior a "tarefa do rectângulo" e analisar a proposta de trabalho para os alunos que Rebeca iria elaborar. No início desta análise, dou-me conta que esta proposta, que assumia a forma de uma ficha, continha várias sugestões relativas ao processo de resolução:

> Eles têm aqui a figura. Isto é para eles escreverem os dados, a incógnita, a altura, a base, e depois no rectângulo acrescentado qual é a altura, qual é a base,

> a expressão do perímetro, e uma equação. A seguir é que pode gerar discussão. É: Quanto devemos acrescentar se a base tiver 5 cm? E 6 cm? Até aqui tudo bem. 8 cm? Aqui dá um número negativo. Portanto é discutir o significado desse número negativo. (Rebeca, TST 21, pp. 1-2, 14/05/02)

Interpelo Rebeca sobre o porquê da inclusão das referidas sugestões que, a meu ver, eram significativamente condutoras da actividade dos alunos. As suas palavras permitem-me compreender que se prende com o prevenir eventuais dificuldades e, simultaneamente, tornar mais rápida a actividade: "É para os ajudar... (risos). Porque acho que sem isso é mais difícil, porque diz que o rectângulo tem base *b* e é a primeira vez que vou introduzir as equações literais. (...) E para avançar mais" (TST 21, p. 2). Apresento a hipótese das sugestões serem apresentadas oralmente se fosse necessário e apenas após a turma ter oportunidade de se debruçar sobre a tarefa na sua ausência. Procuro, também, que as professoras problematizem esta hipótese a partir, nomeadamente do que conhecem sobre as turmas do 8º ano de escolaridade. Como vantagens apontam o "dá-lhes mais autonomia" (Rebeca, idem) e um acréscimo de possibilidades de discussão: "Se tirares essas sugestões dá mais discussão" (Anita, idem, p. 3). O inconveniente encontrado por ambas é o "levar um bocadinho mais de tempo" (Rebeca, idem).

O diálogo que a seguir apresento, encerra a troca de ideias relativa ao enunciado da tarefa *Um rectângulo de perímetro 20*. Revela a opção que Rebeca tomou para a sua formulação e porque a tomou. Adicionalmente, permite ilustrar como é que eu, embora contribuindo com sugestões de tarefas ou propostas de reformulação de enunciados, procurava evidenciar, como o fiz noutras alturas, que o poder decisório relativamente às que seriam exploradas na aula e ao formato que assumiriam, estava nas mãos das professoras:

> Ana: Tu é que sabes o que hás-de fazer, porque conheces melhor a turma. Estamos só a pensar sobre as coisas. Se tirasses as sugestões, o que é que os alunos teriam que fazer?
>
> Rebeca: Então se ficasse: Um rectângulo tem 3 cm de altura e base *b*. Pretendemos encontrar um rectângulo de perímetro 20 cm acrescentando à base o mesmo que à altura. Quanto devemos acrescentar se a base tiver 5 cm? E 6 cm? E 8 cm? Se calhar o que eles vão fazer logo é não usar o valor de *b* e substituir logo a base por estes valores concretos e tentar resolver para cada

caso. E depois a partir daí é que poderiam ir para a base *b*. Era ao contrário. Como eu estava a pensar era partir do geral para o particular e assim era o contrário. Concretizam para o particular e depois vão para a equação mais geral. Mas também é uma boa opção. E é mais fácil para eles. Concretizam logo, não lhes aparecem logo as duas variáveis. E depois é que aparece a base *b*. Acho que é de arriscar. Punha logo assim até para ver como é que eles reagiriam.

Ana: O que achas Anita?

Anita: Eu acho boa ideia. Acho que vão ter algumas dificuldades, mas já estou como a Rebeca. Acho que vale a pena o risco.

Rebeca: Tentar ver o que eles fazem. Eu, por acaso, agora até acho que sim. É porque é uma situação completamente diferente e se calhar até eles depois sentem mais a necessidade de aparecer uma equação com a outra letra para o caso geral. Naquela outra aula da tarefa *Números em Círculos*, [aula em que foi proposta a tarefa 5] eles primeiro fizeram com casos concretos e só depois é que foram para os múltiplos de *n*. E eles até foram bastante bem para a generalização. Se calhar a generalização não é o mais difícil. É mais difícil logo de início a compreensão do problema. Perceberem o que têm que fazer.

Ana: Pois foi. Bem, tu é que sabes o que é melhor fazer. Pensa nisso.

Rebeca: Já pensei. Acho que fica melhor assim. Pode dar muito mais discussão. O que posso perder em termos de tempo ganho noutras coisas que eles desenvolvem, do que estar a praticar tantas equações literais. E em termos de cálculo as equações literais é uma coisa que eles estão a trabalhar também em Química. Então olha, está decidido. Podes ir lá gravar. Assim já pode gerar mais discussão.

(TST 21, pp. 3-4)

Globalmente, as principais linhas norteadoras da procura de tarefas ao longo do projecto de investigação colaborativa, podem ser observadas num dos *slides* que o grupo de pesquisa elaborou no âmbito da preparação do grupo de discussão realizado no ProfMat (figura 7). Nesta altura não tínhamos ainda terminado o trabalho conjunto. No entanto, já havia um entendimento partilhado sobre os critérios a adoptar que não se alteraram na segunda fase do projecto. Procurámos tarefas que, potencialmente, originassem boas discussões matemáticas, que proporcionassem o confronto de ideias e resoluções e que desafiassem os alunos a envolverem-se na justificação de posições, processos ou conclusões.

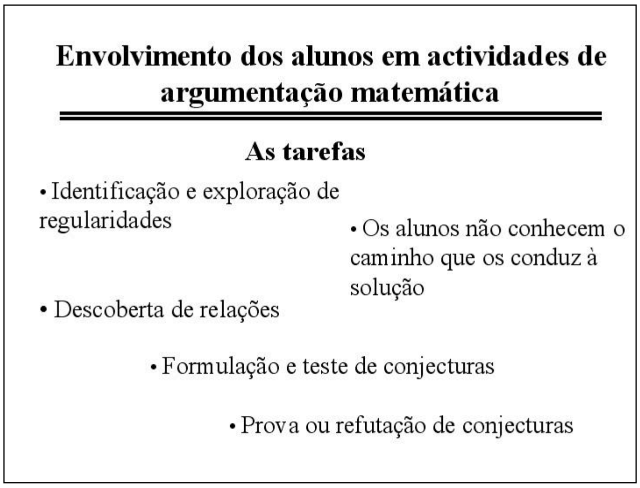


Figura 7: *Slide* sobre tarefas apresentado no grupo de discussão

Optámos, como a tabela 8 ilustra, por problemas e tarefas de investigação. Todas partilham a característica de não poderem ser resolvidas, pelos alunos, através da mera aplicação directa de procedimentos já seus conhecidos. O que as distingue é o grau de explicitação com que estão formuladas — superior nos problemas — e alguns dos processos matemáticos envolvidos na sua resolução. No caso das tarefas de investigação há uma maior abertura para a formulação de questões e, além disso, procurava-se, intencionalmente, que os alunos explorassem casos particulares com vista à identificação de regularidades, descoberta de relações e formulação de conjecturas, que testassem estas conjecturas e que se envolvessem na produção de provas de, pelo menos, algumas daquelas que resistiam a tentativas de refutação.

A associação que estabeleci entre os processos matemáticos referidos no parágrafo anterior e as tarefas de investigação é, em certa medida, artificial. Com efeito, por exemplo, no âmbito da exploração da tarefa 9 — um problema — a turma provou porque é que o produto de dois números pares é um número par. Além disso, durante a exploração da tarefa 11 — também considerada um problema por todos os elementos do grupo de pesquisa — uma aluna, observando os registos feitos numa tabela desenhada no quadro que a professora usava para organizar soluções que lhe eram indicadas pelos elementos da turma, descobriu regularidades a partir das quais formulou, por sua iniciativa, uma conjectura. Vários colegas apropriaram-se, de imediato, desta conjectura para, supondo-a válida, encontrarem as restantes soluções do problema.

Observação e reflexão sobre aulas

Esta subsecção incide sobre o terceiro campo de colaboração (tabela 6) e, em especial, sobre a observação e reflexão *sobre* aulas por cujo registo fui responsável e que foram objecto de análise no grupo de pesquisa. As referências que anteriormente fiz à aula de Rebeca gravada por um colega, deixam transparecer o essencial do trabalho que, a este propósito, realizámos. A apresentação do processo reflexivo que seguimos — que tem algumas características em comum com o adoptado em relação a esta aula — permitirá, na minha perspectiva, completar essas referências. Foco-me, em particular, nas principais características deste processo, na concepção de reflexão que lhe está subjacente, nos materiais de apoio que utilizámos e no modo como as professoras percepcionaram a actividade reflexiva sobre as aulas.

Entendo que reflectir sobre a prática tem na sua base uma atitude de questionamento. Passa por um confronto com a própria *praxis*, pela interpretação de princípios, razões ou motivos que lhe estão subjacentes e pela sua reconstrução. Partindo desta perspectiva procurei, ao longo do trabalho conjunto, incentivar e facilitar uma reflexão sobre a prática focada no tema do projecto, em que houvesse lugar para (a) a identificação e descrição do que aí se considera relevante ou problemático, (b) a interpretação do agir, ou seja, porque se faz como se faz, (c) o confronto da acção com o que sobre ela se pensa, se sente e com outras possibilidades e (d) a reconstrução da acção, isto é, o que deve manter-se, o que pode ser diferente e o que pode/importa ser alterado. Preocupei-me, assim, em que a relação entre a reflexão e a acção tivesse não só uma dimensão retrospectiva, mas também prospectiva, ou seja, que a acção reflexiva sobre o que se fez num dado momento pudesse ser investida para equacionar modos de agir futuros. Este último aspecto é visível, por exemplo, num diálogo que ocorre entre mim, Anita e Rebeca no decurso da reflexão sobre as aulas leccionadas por esta última professora, em que foi explorada a tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros:*

> Ana: Vamos agora pensar em termos de futuro. Olhando para estas aulas, como é que elas podem servir de inspiração para se destacarem dois aspectos relacionados com o trabalho do professor que parecem ser particularmente importantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática? E quando falo no trabalho do professor tem a ver com o trabalho de preparação da aula, com a definição dos objectivos da aula, com a concretização da aula, com opções que se tomaram, etc.
>
> Rebeca: Tentar não dar as respostas aos alunos, tentar pôr os alunos a contrariarem-se uns aos outros, passar a bola, como a Anita dizia há dias. No fundo é importante fomentar e dar importância à discussão entre os alunos. Dar-lhes liberdade para interagirem entre eles, sem ser só com o professor, tentar que sejam eles a darem as respostas uns aos outros, tentarem convencer-se uns aos outros. Tudo isto é muito importante.
>
> Anita: A tarefa deu azo a muitas conjecturas. Se não fosse assim não poderia ser a partir de conjecturas. Teria que ser como tu dizias: escrever a propriedade e pedir para a demonstrarem. E perdia-se a parte das conjecturas. E também pensar não dar as respostas, tentar explicar bem a importância das conjecturas, dar valor a todas as que nasceram, digamos assim, porque se a gente as despreza parece que o trabalho que foi feito antes foi só para passar o tempo, independentemente de serem ou não demonstradas e serem ou não válidas.
>
> (TST 19, pp. 25-6)

O processo de reflexão sobre cada aula iniciava-se, com cada professora, numa conversa informal e breve que se seguia à minha observação presencial. Usualmente, estas ocasiões foram usadas para delinear hipóteses de acção subsequentes tendo em conta a actividade desenvolvida na aula. Estas reflexões eram, posteriormente, retomadas nas sessões de trabalho colectivo, prolongando-se e aprofundando-se aí. Na primeira fase do projecto, havia um curto distanciamento entre estes encontros e o momento em que cada aula foi leccionada. Na segunda, devido à menor periodicidade das sessões de trabalho e aos constrangimentos de tempo introduzidos pela frequência, por Rebeca e Anita, do mestrado, o espaçamento foi maior. Na perspectiva de qualquer uma de nós, esta última situação foi desfavorável à actividade reflexiva. A memória de alguns aspectos, cujo registo magnético não é possível, esbate-se com o passar do tempo e é mais difícil, se não mesmo impossível, recuperá-los.

Preparei-me para as sessões de reflexão identificando um conjunto de aspectos cuja análise me parecia importante para a problematização da dinâmica da aula de Matemática orientada para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e, em particular, para a compreensão do trabalho do professor. Neste processo, foram essenciais os relatórios de observação que elaborei na sequência imediata de cada aula e uma análise atenta dos registos magnéticos. Alguns desses aspectos foram abordados, espontaneamente, por uma ou outra das professoras. Noutros casos, foram tópicos pensados, previamente ao encontro, ou por mim, ou por Anita, ou por Rebeca que estiveram na base da reflexão. Com muita frequência, questões que debatíamos emergiam do próprio diálogo que se desenrolava:

> Então, tendo em conta o que estás a dizer, a minha questão é... Pensem lá no seguinte: Será possível, tendo em conta a vossa experiência, apostar num tipo de trabalho em interacção, discussão com a turma toda, mantendo a possibilidade de, como tu dizes, serem os alunos a subir os degraus? Estão a ver o que é que eu quero dizer? (Ana, TST 15, p. 10, 28/03/02)

As "minhas" questões nem sempre foram consideradas de fácil resposta pelas professoras. No entanto, apesar das dificuldades que originavam, sentiam que eram importantes para as ajudar a reflectir. Esta ideia pode ser apoiada pelo que disseram quando, na fase inicial no projecto, decidi partilhar com Anita e Rebeca a inquietação que me estava a provocar o facto de lhas colocar. Receava que contribuíssem para se sentirem postas em causa e esta sensação agudizava-se no caso de Anita cujas respostas eram, por vezes, lacónicas ou antecedidas de pausas significativas:

> E acho que tens que fazer perguntas. Tu és uma pessoa externa e consegues até ajudar. Eu acho que, de uma certa forma, ajudas-nos a reflectir sobre certas coisas que nós no meio da situação não temos tanta imparcialidade para ver. (...) Eu gosto até. (...) Podes colocar as questões que queiras e como queiras... (risos) Eu, pelo menos, às vezes tenho é dificuldades, não é que não te queira responder, é eu própria é em saber o porquê das opções... (...) porque há certas opções que nós tomamos sem estar propriamente a... (...) Eu estou a gostar [do trabalho] no sentido em que obriga a pensar. Para já temos uma coisa que eu gosto que é partilhar com outras pessoas o que fazemos na sala de aula, as nossas ansiedades, as dificuldades que sentimos. Eu sempre disse que é uma situação privilegiada. E depois... Se calhar algumas das coisas já fazia, mas sem grandes preocupações, não é? Estou a reflectir um bocado mais que não fazia...

> Não gosto muito de reflectir, a Anita reflecte muito mais do que eu (risos). É verdade, eu faço as coisas mais impulsivamente e não penso muito sobre elas. Sou um bocado instintiva. Mas acho que é importante pensarmos. Apesar de eu ser assim não quer dizer que eu ache que assim é que se deve ser. Acho que é importante. (Rebeca, TST 17, pp. 2-3)

> Nós nunca tivemos esse tipo de problemas. Podes fazer as perguntas que quiseres. (...) Às vezes a gente não sabe é muito bem qual é a resposta, não é? Temos que pensar... (...) Mesmo que a gente às vezes tenha... Parece que nos enrolamos, principalmente eu que tenho assim uma reacção mais lenta... (risos) Ela [Rebeca] é mais espontânea... Eu reflicto um bocadinho mais e depois fico assim um bocadinho mais coisa, mas não quer dizer nada. (...) Eu também gosto [do trabalho], gosto muito de discutir as ideias. Sempre fui assim. Sempre gostei de discussões e continuo a gostar. (Anita, TST 17, pp. 2-4)

Muitas das observações ou perguntas que coloquei nas sessões de reflexão, visavam procurar que as professoras se distanciassem das suas próprias práticas para que pudessem analisá-las criticamente. Neste âmbito foram frequentes, por exemplo, expressões do tipo "gostava de perceber porque fizeste 'tal'", "que intenção tiveste 'com'", "porque optaste por seguir por 'aqui'", "olhando para trás, o que pensas 'de'' ou "tendo em conta a experiência vivida e a nossa discussão, o que consideras ser importante fazer no futuro relativamente 'a'". À medida que o trabalho conjunto foi progredindo, foi sendo cada vez mais dispensável recorrer a este tipo de expressões porque as professoras passaram a integrá-las, espontaneamente, no seu próprio discurso, nesta forma ou noutra com o mesmo significado. Esta integração pode estar relacionada com o desenvolvimento da capacidade de reflexão, aspecto que tanto Anita como Rebeca consideram ter sido uma das potencialidades do projecto de investigação colaborativa:

> E depois, nós fomos sempre desenvolvendo aquela maneira de analisar e, no fundo, ver o que se pretendia, o que aconteceu, porque é que foram tomadas as decisões e quais os dilemas, o que se poderia ter feito... Claro, isto é uma mais-valia na reflexão, e até a própria forma como foi organizada a reflexão. A gente reflecte mas como não estamos muito habituados... se calhar reflectimos mas reflectimos à nossa maneira... não somos tão sistemáticos, se calhar. E assim, construímos uma maneira de reflectir comum. Logo aí... Para podermos partilhar, se calhar, temos de desenvolver melhor certas coisas, o que é óptimo porque isso também fica. Porque a gente faz isso, percebes, mas, se calhar, não faz tão… Quando uma pessoa pensa numa coisa que fez, também pensa o que fez, o que queria, etc., mas não pensa tão… arrumadinho, tão sistematizado e pensar mesmo: "olha, aqui era mesmo isto, aqui não sei quê". É diferente, não é? Quer dizer, não sei se tu fazes isto contigo própria… (risos) (...) Assim é mais interessante. (Anita, E3, pp. 64-65)

> Olha, se calhar uma das coisas mais importantes em termos das influências do projecto no meu percurso profissional, foi a reflexão. Passei a dar mais importância à ideia de nós reflectirmos sobre as coisas, desenvolvi a minha capacidade de reflexão. (Rebeca, E3, p. 40)

A génese do processo que viemos a adoptar para a reflexão sobre a globalidade das aulas de Anita e Rebeca relacionadas com o desenvolvimento do projecto, situa-se na primeira sessão de trabalho do grupo de pesquisa. Nessa altura procurei averiguar do seu interesse em possuírem uma cópia da gravação em vídeo de cada uma das aulas que registasse, antes da sessão de reflexão que lhe seria dedicada. Por um lado, parecia-me ser uma hipótese favorável à reflexão colectiva: as professoras, se o entendessem, poderiam observar individualmente o registo antes de sobre ela dialogarmos. Por outro lado, proporcionava tempos e espaços privados que permitiam, a quem leccionou a aula, encontrar recursos pessoais para lidar com eventuais ansiedades ou constrangimentos que a observação da sua acção pela colega e, sobretudo, por mim, lhe pudesse causar. Ambas as professoras gostaram da ideia, pelo que me responsabilizei pela sua concretização.

A experiência de análise da aula de Rebeca gravada por um colega, permitiu salientar as potencialidades, para o trabalho colectivo, que advinham da observação individual das aulas feito por cada uma de nós. Com efeito, o primeiro visionamento do registo desta aula ocorreu num dos encontros do grupo de pesquisa. Rapidamente concluímos que, embora pudéssemos partilhar algumas ideias relativas a momentos em que surgiu — ou poderia ter surgido — argumentação matemática, a reflexão ficaria empobrecida se não houvesse oportunidade para uma nova observação através da qual pudéssemos apropriar-nos melhor dos acontecimentos da aula — o que nos parecia essencial, sobretudo, no meu caso e no de Anita — e, além disso, identificar, a partir dos ritmos, modos de trabalho, saberes e sensibilidades que nos são próprios, aspectos e questões a debater no encontro da equipa do projecto. A análise individual desta aula a partir das cópias que Rebeca fez da sua gravação, tornou dispensável o seu visionamento na segunda sessão de trabalho que dedicámos à reflexão, o que permitiu uma melhor rentabilização do tempo sem empobrecer a actividade reflexiva.

Um dos traços comuns a todas as sessões de reflexão, foi a existência de um espaço dedicado à globalidade da actividade desenvolvida na aula ou num conjunto de aulas em que foi explorada a mesma tarefa. Neste âmbito, a actividade reflexiva incidia sobre aspectos relativos à preparação, aspectos considerados mais ou menos conseguidos no decurso da aula, dúvidas, dificuldades ou problemas que emergiram e como se lhes fez face, surpresas, sentimentos experienciados, principais opções tomadas e problematização de toda a acção desenvolvida. Usualmente era através desta via e da voz da professora que leccionou a aula que se iniciava cada encontro. Neste processo, os outros elementos do grupo de pesquisa contribuíam com questões ou sugestões que "alimentavam" a reflexão. O que se pretendia era fazer uma abordagem holística que constituía o pano de fundo para nos debruçarmos, em seguida, com mais detalhe, sobre episódios particulares de argumentação matemática que seleccionávamos. Por vezes, nesta segunda fase, acordámos usar certas "lentes" teóricas para observar estes episódios e/ou a totalidade da(s) aula(s). Recorremos, sobretudo, aos conceitos de *normas sociais* e *normas matemáticas* (referidos no documento 3, tabela 7) para discutir aspectos da cultura da sala de aula e ao *modelo de Toulmin* (incluído no documento 13, tabela 7) para analisar pequenos pedaços de discurso argumentativo de modo a aprofundar a reflexão sobre o papel desempenhado pela professora. O extracto a seguir apresentado, que emergiu num diálogo focado na análise de um aspecto de uma aula de Rebeca causador de insatisfação para a professora, permite ilustrar o propósito com que foi utilizado este modelo:

> Então o problema de partida era: "E se no padrão aparecerem múltiplos consecutivos de 50, 70 e 80?" E quando eles respondem, eu digo: "Então não provam nada?" É como estavas a dizer Anita. Esta questão aparece porque eles não apresentaram uma *garantia*. É: "Porque é que o facto de eu saber que para os múltiplos de *n* a expressão é GT=10x+4n me permite dizer que no caso de 50, 70 e 80, as expressões são aquelas?". É porque a expressão GT=10x+4n está provada. (...) O que eu devia ter perguntado e não perguntei é porque é que estava provado e interessava-me isso para eles verem que o facto de estar provado para o caso geral me permite usar a expressão encontrada para este caso em casos particulares. Devia era ter pedido o *fundamento* da *garantia* que eles apresentaram. (Rebeca, TST 22, p. 16, 17/05/02; o destaque é usado para sublinhar terminologia associada ao modelo de Toulmin)

Tanto Anita como Rebeca valorizaram, de uma forma muito significativa, o processo de reflexão adoptado no grupo de pesquisa. A reflexão individual sobre as aulas, apoiada pelos materiais que facilitaram a evocação de memórias e um rever a prática já sem os constrangimentos e as exigências a ela associadas, proporcionou um primeiro nível de reflexão, posteriormente, enriquecido pelo confronto de perspectivas possibilitado pelos encontros de trabalho colectivo. Abordam, recorrentemente, este aspecto tanto no decurso das sessões de trabalho, como em vários momentos das entrevistas. As duas intervenções seguintes permitem apoiar esta ideia, contribuem para clarificar a articulação que existiu entre a reflexão individual e colectiva e revelam que as diferenças entre os vários elementos do grupo de pesquisa foram vistas como uma mais-valia para o processo de reflexão:

> É diferente uma pessoa reflectir consigo própria ou reflectir com outras pessoas, é a tal "história" do confronto de ideias e de opiniões que faz com que nós cresçamos e que também mudemos. Se calhar não é o reflectir em si, é o reflectir em conjunto. Nós reflectimos sobre as aulas. Não fui só eu que analisei.... Porque nós tivemos sempre duas fases. Cada uma de nós analisava sempre em casa e depois analisávamos em conjunto. Portanto eu fazia uma análise em casa, aliás todas nós fazíamos, e depois nós confrontávamos as nossas análises, e daí é que vem a maior riqueza, do confronto. Para já o facto de eu reflectir de cabeça sobre o que me parece que se passou na aula é uma coisa. Outra coisa é reflectir sobre algo que está ali escrito e de que eu já não tinha bem a certeza como é que se passou… porque é diferente estar ali escrito do que depois de estarmos na aula estarmo-nos a lembrar de tudo, e ver o vídeo. Já dá uma reflexão diferente, e depois a seguir o confrontar as opiniões de três pessoas ainda mais diferente é. E por exemplo, a Anita é muito diferente de mim, tu és diferente de nós as duas e o facto de serem pessoas diferentes faz com que haja uma maior riqueza. (Rebeca, E2, p. 12)

> O trabalho realizado no âmbito do projecto veio reforçar um aspecto de que eu sempre gostei, que é trabalhar conjuntamente à volta do mesmo interesse. Portanto, isso, noutras coisas, também já fazia. Agora, nunca tinha feito desta maneira! (...) nunca tinha tido esta oportunidade de me voltar a ver na aula como se estivesse a desenrolar-se de novo, e eu agora estou de fora, calmamente, a tornar a ver e a analisar. Agora também já não tenho que tomar as opções que tomei na altura e não tenho os dilemas para decidir "ali". Posso reflectir sobre o desenrolar da aula sem ser só a partir da minha memória. Posso rever o que é que fiz, voltar atrás (com o vídeo se for preciso) tornar a ouvir o que os alunos disseram, como o disseram, como é que eu reagi, e eles a isso, ou seja, posso ver a reacção deles. Posso pensar no que se queria e no que aconteceu e isto inclui as situações em que eu lhes "passo a bola" ou poderia ter passado. Pronto, posso ver o que aconteceu e colocar questões: "Então e se tivesse feito isto ou aquilo?". Posso pensar por que é que terei tomado certa decisão naquela altura… às vezes já não me lembro (risos), porque, às vezes, passa mais tempo e a gente também já não sabe muito bem. Depois tenho uma

> ideia diferente em relação às opções. Escrevi: "Poderão existir algumas vezes que já não sei bem porque tomei esta ou aquela opção, consoante o tempo que passou e se calhar, a consciência de na altura a ter tomado. É que, por vezes, também reagimos ao que está a acontecer e aparentemente pode não ser uma opção mas no fundo, no fundo, mesmo quando isso acontece, provavelmente é uma opção não prevista mas que é tomada por estar a 'saber bem' (risos) seguir aquele rumo dos acontecimentos". É porque é assim: Às vezes, a gente toma uma opção muito consciente, outras vezes toma uma opção quase emocional, percebes? E, se calhar, não fica tão consciente dela. Pode ser tomada por oportunidades que aparecem, embora as que surgem por oportunidades que aparecem, se calhar, até sejam um bocadinho conscientes, porque eu vejo aquela oportunidade e aproveito-a. Agora, se calhar, não se está tão consciente de outras opções porque se tomam porque me estão a saber bem outras coisas que se estão a desenrolar, no bom sentido! Imagina, estão alunos, o que às vezes me acontece, muito bem a discutir e, se for preciso, eu deixo-os estar porque estou a gostar de ver, estás a perceber? E podia fazer outras coisas, mas às vezes… eu deixo-me ir um bocadinho atrás desse gosto… (...) Não digo assim: "Vou estar este tempo todo agora aqui a encantar-me por isto" (risos). Estou porque me está a saber bem! (risos). Se calhar, é uma opção sem ser uma opção tão consciente quanto devia!… (...) No fundo, é seguir o rumo dos acontecimentos: umas vezes rentabilizando, outras vezes encantando-se, ficando encantada a olhar. E essas, às vezes, é que não são tão… depende da situação, não é? (pausa) Depois, ainda no contexto do projecto, além de tudo isto, surge a vantagem de tal ser partilhado por mais duas pessoas. Não sou só eu que estou a partilhar coisas comigo própria, que também é muito importante, mas é diferente eu estar a ver-me a mim e a analisar-me a mim e poder partilhar com mais duas pessoas que têm maneiras diferentes ou parecidas ou iguais... São pessoas diferentes, não podem ser iguais… são outros olhos a ver as mesmas coisas. (Anita, E3, pp. 63-64)

Ambas as intervenções foram apresentadas em momentos em que o processo de reflexão estava já, de algum modo, "estabilizado", ou seja, surgem no final de um percurso que não se iniciou da forma que tinha quando elas surgiram. Em certa medida, esta estabilidade decorreu de um processo de aprendizagem colectiva em que também eu fui reflectindo sobre a melhor forma de equacionar as sessões de trabalho de modo a promover a actividade reflexiva das professoras e, por aproximações sucessivas, fui delineando propostas que apresentei. Neste âmbito foram sendo introduzidas várias alterações das quais saliento três: uma relativa ao processo de observação de aulas, outra concernente ao envio de tópicos de reflexão e a terceira respeitante ao envio de transcrições de aulas.

Mais concretamente, a primeira alteração prende-se com a observação, a partir do registo em vídeo, de episódios de argumentação matemática nas sessões de reflexão e com o processo de selecção destes episódios. A modalidade que, inicialmente, propus para a reflexão individual pressupunha que, embora existindo propósitos comuns a todos os elementos de pesquisa — os referentes à reflexão holística sobre a aula que anteriormente referi—, haveria, também, objectivos diferenciados. Em particular, seria a professora que leccionou a aula que seria responsável por identificar os episódios que seriam observados a partir do registo em vídeo, analisados e discutidos. A modalidade não excluía a possibilidade de qualquer outro dos elementos do grupo de pesquisa abordar aspectos não directamente associados a estes momentos. Significava, apenas, que seriam esses a serem analisados mais em profundidade.

Esta modalidade, adoptada para a primeira aula de Rebeca e para a primeira de Anita não se revelou muito prometedora. Num dos casos, visionámos, por proposta da professora, toda a gravação correspondente à fase de discussão colectiva da tarefa, processo muito demorado e pouco poderoso em termos de actividade reflexiva. No outro caso, o diálogo foi fluido e produtivo, mas apenas enquanto não passámos à fase de observação dos episódios, o que me conduz a reequacionar a modalidade, como é visível no memorando que elaborei na sequência da sessão de trabalho:

> A sessão de trabalho da manhã esteve muito animada enquanto não se passou à observação da gravação dos episódios. Quando se começou a vê-la, houve uma clara quebra na troca de ideias. Em termos de futuro é de repensar a articulação entre a reflexão sobre a aula e o visionamento de episódios dessa mesma aula. Uma vez que todas vimos com atenção a gravação, talvez seja de conversarmos, apenas, sobre os episódios seleccionados e recorrermos a ela, por exemplo, quando há dúvidas, quando há divergência de opiniões em relação à interpretação de um episódio ou quando, por alguma outra razão, necessitarmos de ver com mais pormenor um determinado momento da aula. (MST 15/16, p. 6, 28/03/02)

A proposta referida neste extracto mereceu a adesão de Anita e Rebeca e pouco tempo depois propus que a selecção de episódios passasse a ser feita por todos os elementos do grupo de pesquisa e não apenas por quem leccionou a aula. Pareceu-me que esta via seria favorável à integração, na discussão, das sensibilidades e interesses de cada uma de nós. Além disso, o próprio facto de todas termos que fazer escolhas que fundamentaríamos, poderia contribuir para refinar o entendimento partilhado do significado de argumentação matemática e para ir mais longe no entendimento do que está em jogo nas aulas orientadas para o envolvimento dos alunos nesta vertente do raciocínio matemático. Por vezes, acordámos que partilharíamos entre nós esta selecção, antes da sessão de reflexão dedicada à aula. Noutras ocasiões, esta partilha ocorreu no decurso do encontro. Casos houve em que nos debruçámos sobre todos os episódios de argumentação que considerámos terem existido na(s) aula(s). O princípio que me guiou, e que procurei veicular através das várias conversas que mantive com Anita e Rebeca ou através dos e-mails que lhes enviei com os planos de trabalho dos encontros, foi não deixar de lado nenhum aspecto das aulas que pelo menos uma de nós considerasse relevante discutir.

A segunda alteração é relativa ao envio de tópicos de reflexão às professoras previamente às sessões de trabalho. Era habitual preparar-me para cada encontro recorrendo a um documento escrito em que sistematizava os principais aspectos a abordar. Naturalmente, quando se iniciou a actividade reflexiva sobre as aulas, passei a incluir nos documentos deste tipo as questões ou tópicos de reflexão em que pensava. Numa sessão de trabalho focada numa aula de Anita — localizada pouco depois desta altura —, intuí que esta professora parecia ter uma certa curiosidade em relação ao conteúdo do meu documento e, muito particularmente, quanto aos aspectos em que eu pretendia que a reflexão incidisse. Analisámos, conjuntamente, os já discutidos e, na sequência, quando confrontada com o laconismo de algumas das suas respostas a interpelações que fiz, disse, em tom de brincadeira: "para a próxima envio as questões". A reacção de Anita fez-me reflectir, seriamente, sobre esta possibilidade: "Se calhar é mais fácil. (...) Se calhar não era má ideia. Podemos fazer a experiência" (TST 18, p. 31, 16/04/02). Reflectimos sobre os prós e os contras desta hipótese, discutimos o "condicionamento" que poderia introduzir nas reflexões individuais de Anita e Rebeca, equacionámos vias para evitar este aspecto e acordámos que a sessão de trabalho seguinte, previamente à qual eu enviaria alguns tópicos de reflexão, serviria de "balão de ensaio" à experiência. No balanço que fizemos, ambas as professoras consideraram ser de manter o envio, tanto mais que, nas palavras de Rebeca que merecem o acordo da colega, “[para] a Anita (que) gosta menos de falar do que eu, gosta de reflectir mais... ter tempo para reflectir... Eu acho que sim” (TST 19, p. 27).

A experiência revelou-me que era importante organizar os tópicos de reflexão em dois grupos complementares. Um constituído por aqueles que permitissem fazer emergir os pontos de vista da professora que leccionou a aula e a partir dos quais se desenrolava a reflexão. Incluo aqui, por exemplo, a explicitação do porquê de uma decisão tomada num determinado momento da aula ou os principais problemas com que se confrontou no decurso da acção. Outro grupo constituído por tópicos que, embora enraizando-se na aula, eram mais amplos no sentido de menos direccionados para uma das professoras em particular.

O envio de tópicos de reflexão manteve-se até ao final do projecto, se bem que com um desenvolvimento bastante diferenciado. De início assumiam, com frequência, a forma de questões, algumas bem precisas. Com a evolução do trabalho, o número de tópicos diminuiu e, por outro lado, o seu conteúdo ganhou uma maior abrangência. A maturidade reflexiva parecia-me ser maior, havia maior espontaneidade em Anita, as suas contribuições tinham perdido o laconismo que, por vezes, as caracterizavam nas fases iniciais do projecto e a estrutura das sessões de reflexão era familiar.

A terceira alteração introduzida no processo de reflexão prende-se com o envio de documentos com transcrições de extractos das aulas para ambas as professoras previamente às sessões de trabalho colectivo. No início do projecto não previ esta modalidade que só vem a ser, definitivamente, assumida no 22º encontro: 17/5/02. Até então entreguei-lhes alguns documentos deste tipo que, tal como os restantes, serviam de suporte à actividade reflexiva. Fi-lo por várias razões, subjacentes às quais estava a ideia de que poderiam ser úteis a esta actividade. Não tinha, no entanto, consciência, como veio a acontecer mais tarde, de que eram instrumentos poderosos para facilitar e promover a reflexão e que, além disso, eram essenciais quando estava em jogo a análise da microestrutura de argumentos ou a identificação e problematização de questões relacionadas com processos de negociação de normas sociais e sociomatemáticas favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Tal como, em geral, aconteceu com o delinear do processo de reflexão, a consciência desse poder foi surgindo "por aproximações sucessivas" e não foi independente do que ia escutando das professoras.

As duas primeiras transcrições que envio são respeitantes a uma parte da primeira aula de Rebeca e, também, à primeira de Anita. As razões que me levaram a esta opção foram diferentes. No primeiro caso, a transcrição incidia sobre as interacções que a professora estabeleceu com os alunos enquanto trabalhavam em grupo — actividade que ocupou a maior parte do tempo da aula — que não eram perceptíveis através do registo em vídeo. Rebeca pergunta-me se posso trazer para a sessão de reflexão a gravação em áudio pois, nas suas palavras, "há algumas coisas que eu não me lembro bem como é que discuti com eles. E depois pela cassete pode ver-se" (TST 13, p. 9, 05/03/02). Decidi fazer a transcrição, não só para rentabilizar o tempo de trabalho comum, mas também e, sobretudo, para que Anita pudesse ter acesso a acontecimentos referentes a essa parte da aula.

No caso da aula de Anita, constatei, ao fazer a primeira observação da gravação em vídeo, que era muito difícil compreender várias das interacções. A transcrição dos episódios da aula relacionados com argumentação matemática e a elaboração de resumos dos restantes momentos — trabalho que considerava necessário à minha investigação — "obrigou-me" a visionar por diversas vezes o registo e ocupou-me um tempo muito considerável. Mesmo assim, continuaram a existir contribuições de alunos pouco ou nada inteligíveis o que dificultava, claramente, a compreensão plena dos subsequentes movimentos da professora. Decido enviar o documento que preparei a Anita e Rebeca. Acompanho-o de uma nota explicativa sobre o propósito da sua elaboração, as dificuldades que se me depararam, o significado dos pontos de interrogação que apareciam no texto e a hipótese do documento poder facilitar a observação da aula.

Ambas as experiências me mostraram que a existência das transcrições foi propícia, por exemplo, a uma análise detalhada das consequências de determinados movimentos de ensino das professoras, ao equacionamento de possíveis alternativas, à descoberta de causas plausíveis para dificuldades percepcionadas nos alunos e ao estabelecimento de conexões entre várias intervenções do mesmo aluno que foram favoráveis à compreensão do raciocínio que lhes poderia estar subjacente e onde se enraizava. Nesta medida, as transcrições facilitaram a reflexão. Revelaram-me, também, que as professoras, recorrendo às suas memórias das aulas em articulação com a gravação em vídeo, conseguiam entender e reconstituir intervenções dos alunos que para mim não tinham sido perceptíveis. Este aspecto sobressaiu sobretudo no respeitante à aula de Anita, cujas contribuições me permitiram obter não apenas uma transcrição mais completa, mas também um texto validado pela própria professora que leccionou a aula.

Mais tarde fiz novas experiências de envio de transcrições que reforçaram em mim a convicção das suas vantagens, tanto mais que, como me ia dando conta, elas não impediam que as gravações em vídeo fossem observadas, muito atentamente, pelas professoras. Um comentário de Anita, proferido enquanto combinávamos o plano de trabalho para a sessão de reflexão seguinte, faz-me tomar a decisão definitiva: "Era giro se conseguisses mandar a transcrição.... Porque deu muito jeitinho ter a transcrição... É melhor e é mais fácil... " (TST 22, p. 3).

O processo adoptado para fazer a transcrição de extractos da aula passou, nalgumas ocasiões, por transcrever todos os episódios de argumentação matemática que eu, Anita ou Rebeca seleccionámos, depois de me terem sido comunicados. No caso desta indicação não ser feita antes da sessão de reflexão sobre uma dada aula, segui um processo análogo ao que utilizei para transcrever a primeira de Anita. Acordámos que sempre que existissem segmentos não transcritos, mas apenas resumidos, que as professoras considerassem importante analisar em detalhe, tomariam nota da sua ocorrência — registando o tempo com base no relógio do gravador em vídeo — para, se necessário, serem rapidamente localizados. Sobretudo a partir da segunda fase do projecto, os documentos referentes a transcrições das aulas, tornam-se mais extensos. Transcrevi não só todos os episódios de argumentação existentes, mas também interacções localizadas noutras alturas que pareciam ser significativas em termos de processos de negociação de normas e continuo a manter os resumos dos restantes momentos. Na base desta mudança está o facto de um dos campos de investimento futuro referido pelas professoras no final da primeira fase do projecto ser, precisamente, a questão das normas sociais e sociomatemáticas reguladoras da actividade matemática da aula.

Todos os elementos do grupo de pesquisa consideraram que o envio de transcrições facilitou a reflexão, embora fosse muito relevante também a observação da gravação em vídeo das aulas. Como Rebeca refere, foi "importante ter as duas coisas". As suas palavras resumem as potencialidades desta simultaneidade:

> Facilitaram e muito [as transcrições das aulas]. É muito mais fácil ver, apanha-se muito mais tendo as coisas escritas do que só a ver. Conseguimos parar mais tempo sobre aquilo que está escrito e quando estamos a ver está a passar. Por um lado ver as gravações das aulas tem o tal aspecto dinâmico, mas nós fazemos as duas coisas. Víamos e líamos. Foi importante ter as duas coisas. Porque o ver a gravação permite ver o aspecto dinâmico das aulas e o ler permite que paremos mais tempo. Eu, por exemplo, gostava de estar a ver a gravação ao mesmo tempo que ia lendo a transcrição, porque ia parando conforme ia lendo... era melhor. Facilitou bastante. (Rebeca, E3, p. 34)

Divulgação do trabalho: Preparação e concretização

A divulgação, pelo grupo de pesquisa, do projecto de investigação colaborativa foi feita através de dois meios que tiveram por referência a actividade desenvolvida na sua primeira fase: (a) preparação e concretização do grupo de discussão do ProfMat e (b) elaboração de um artigo. Ambas as propostas surgiram por minha iniciativa e aquela a que dedicámos mais tempo e esforço e em que o trabalho colaborativo teve uma maior expressão, foi a primeira, aquela em que incide esta subsecção. A elaboração do artigo apoiou-se, fortemente, nos materiais de apoio preparados para a dinamização do referido grupo, em questões potencialmente promotoras de discussão que identificámos no âmbito desta preparação e em textos que analisámos em anteriores sessões de trabalho.

A primeira conversa direccionada para a preparação do grupo de discussão surge durante um almoço do grupo de pesquisa localizado perto da data em que era necessário elaborar o resumo. Proponho que a sessão a realizar se enquadre no formato *Reflectindo sobre a prática* (APM/GTI) o que significa, como expliquei a Anita e Rebeca que o desconheciam, que entre os documentos a analisar pelos participantes estará material empírico recolhido em aulas suas. A proposta merece o acordo das professoras que a consideraram bem interessante. Analisámos aspectos a incluir no resumo e disponibilizei-me para elaborar uma primeira versão a aperfeiçoar no próximo encontro.

A discussão desta versão permitiu uma primeira abordagem à organização do grupo e possibilitou a emergência de ideias que deram origem a um documento com uma possível estruturação da actividade a desenvolver e dos principais aspectos em que ela incidiria. Proporcionou, também, a abertura para que começássemos a conversar sobre os nossos papéis durante o próprio processo de dinamização. Conscientemente, salientei que o essencial é cada pessoa sentir-se bem no papel que desempenhará:

> Quem é que faz a apresentação das coisas? Para mim uma regra básica é: "quem se sentir confortável a fazê-la". Achava importante que todas nós fossemos responsáveis por partes da apresentação, não é? Acho que não devia ser só eu a falar ou só a Rebeca ou só a Anita. Acho que era bom que todas nós nos envolvêssemos nisso, fazendo aquilo que cada uma se sentisse mais confortável a fazer. (Ana, TST 21, pp. 4-5)

O documento que anteriormente referi foi, naturalmente, sendo transformado ao longo da evolução da preparação do grupo de discussão. Na primeira sessão de trabalho que inteiramente lhe foi dedicada, acordámos os papéis que cada uma de nós assumiria durante a dinamização. As decisões tomadas e posteriormente mantidas, tiveram origem numa proposta de Rebeca que, a meu ver, revela que as ideias teóricas discutidas por minha proposta tinham sido integradas no património de saberes comum a todas nós. A professora sugere que a parte inicial do grupo de discussão — que organizámos em três pontos e que precede o trabalho de grupo que tencionávamos propor aos participantes — fique a cargo dos três elementos do grupo de pesquisa. Eu responsabilizar-me-ia pelo primeiro ponto: enquadramento do projecto e sua relevância. Ela e a colega pelo terceiro: descrição dos principais aspectos relacionados com as tentativas que foram fazendo para envolver os seus alunos em actividades de argumentação matemática. Quanto ao segundo, Rebeca diz:

> Depois, em relação ao segundo ponto: Apresentação de algumas das ideias teóricas que orientaram o trabalho a realizar. Tinha ficado na dúvida. Não tinha posto aqui nada porque achei que podia ser qualquer uma de nós. Mas depois também pensei que como estavas tu [Ana] antes... Seres logo tu tanto tempo, também não fazia sentido. Podíamos era, se calhar, dividir esta parte pelas três... (Rebeca, TST 29, p. 2, 15/07/02)

A proposta pareceu-me adequada, excepto no que se prende com uma certa "jogralidade" que poderia advir se no decurso do segundo ponto, que era breve, interviessem três pessoas. Explicito esta ideia e acordámos que a apresentação deste ponto e do seguinte, que vieram a fundir-se, seria da responsabilidade de Anita e Rebeca que, entre si, combinariam como a partilhar. Esta decisão conduziu a que ao prepararem a primeira versão dos *slides* de apoio à apresentação, revisitassem documentos anteriormente trabalhados. Além disso, a identificação dos episódios de sala de aula que incluíram nestes *slides* e as ideias teóricas que seleccionaram para os comentar, proporcionou uma nova oportunidade de reflexão sobre a prática à luz da teoria e de reflexão sobre a teoria a partir da prática. Deste modo, na preparação e dinamização do grupo de discussão não existiu a associação "investigador —> teoria" e "professor —> prática".

A selecção de material empírico foi uma actividade morosa, mas muito significativa, em que todas nos envolvemos. Antes da primeira sessão de trabalho especificamente direccionada para a preparação do grupo, Rebeca toma a iniciativa de ler transcrições das primeiras aulas que gravei, numa tentativa de perceber o que poderia servir de ponto de partida à discussão que pretendíamos dinamizar. Esta tentativa revelou-lhe a necessidade de reler essas transcrições com atenção e, eventualmente, rever as aulas através do registo em vídeo. Mostrou-lhe, ainda, que tinha muito mais a dizer sobre a sua acção, do que na primeira vez que sobre ela se debruçou:

> Não seleccionei nada, mas estive a ler e cheguei à conclusão que tenho que ler tudo outra vez... Comecei com as primeiras aulas e comecei a anotar muito mais coisas do que tinha apontado na primeira vez que as li... (risos). Ou estava palerma antes... (risos) ou agora já detecto mais coisas, não sei... Se calhar já estou mais treinada a fazer este tipo de coisas... Ou já é a segunda vez que estou a ler... Houve muitas antes que não analisámos com o modelo de Toulmin, nem estivemos com atenção às normas... Acho que as transcrições têm que ser lidas todas de novo para seleccionar o material a dar como deve ser e eventualmente ver de novo as aulas. Senti isso... Senti que era mesmo preciso ler com pormenor. (Rebeca, TST 29, p. 3)

Foi a leitura em pormenor referida neste extracto, que fizemos de várias das transcrições das aulas. Observámos, também, o registo em vídeo de algumas delas. Neste âmbito, envio os documentos relativos a algumas das primeiras que gravei e que não tinham sido entregues às professoras previamente à sessão de reflexão que lhes foi dedicada.

Cada transcrição foi, numa primeira fase, lida individualmente. Nas sessões de trabalho colectivo partilhámos episódios de argumentação matemática identificados que, por alguma razão, considerámos significativos, analisámos as razões que nos tinham levado a escolhê-los, seleccionámos extractos a distribuir aos participantes no grupo de discussão, reflectimos sobre materiais de apoio à apresentação, levantámos questões que podiam ser discutidas a seu propósito e delineámos as propostas de trabalho a apresentar.

Neste processo, o trabalho que realizámos teve por suporte e enraizou-se na actividade reflexiva desenvolvida, em particular, nas sessões de trabalho dedicadas à análise de aulas leccionadas por Anita e Rebeca. Ou seja, foi esta actividade que "alimentou" a preparação da divulgação do trabalho. No entanto, esta mesma preparação, ao proporcionar novas oportunidades de revisitar as aulas e documentos trabalhados, permitiu, também, "alimentar" e ir mais longe na reflexão sobre as mesmas aulas e, em geral, sobre aspectos relevantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. A seta bidireccional utilizada na figura 6 (apresentada na secção *Campos de colaboração*) para unir a actividade

"Reflexão colectiva *a propósito de e sobre* as aulas" com "Preparação da divulgação do trabalho" visa, precisamente, representar esta interacção. Os comentários das professoras a propósito da preparação do grupo de discussão permitem apoiar a ideia de que esta experiência teve, do seu ponto de vista, potencialidades reflexivas:

> Eu lembro-me que às vezes quando estávamos a preparar o grupo de discussão até perdíamos muito mais tempo a discutir outras coisas relacionadas com as aulas filmadas que vinham a propósito. Lembro-me de discussões sobre a caracterização das tarefas, quais é que eram de investigação, quais é que eram problemas, características de cada um destes tipos de tarefas... Portanto, nitidamente não foi desligado do trabalho. Tínhamo-lo sempre presente. (...) Foi um aprofundar, se calhar, porque depois tivemos que ver as aulas outra vez. A selecção dos episódios que tivemos que fazer para preparar o grupo implicou que tivéssemos que reflectir novamente sobre muitas coisas. (Rebeca, E3, pp. 24, 25)

> Acho que ambos os trabalhos [grupo de discussão e artigo] constituíram uma forma de reflectir, para já, sobre o trabalho que foi realizado, porque nós íamos fazendo e íamos pensando (risos) e depois foram uma forma de o divulgar e partilhar um bocadinho com os outros, o que é muito importante! (Anita, E3, p. 14)

Para Rebeca, a reflexão que a referida experiência proporcionou foi "um meio para atingir um outro objectivo (...) e nesse sentido foi mais contextualizada, se calhar, mais interessante (...) acabou por surgir naturalmente" (E3, p. 24). Assim, embora saliente que se a reflexão "fosse um fim" (idem) isso não significaria que "não tivesse também o seu valor" (idem), considera que a actividade reflexiva associada à preparação do grupo de discussão não foi equivalente à que seria proporcionada por um conjunto de sessões de trabalho destinadas, exclusivamente, a reflectir sobre as mesmas aulas. Além disso, e nas palavras da professora, "foi importante também para o nosso processo de reflexão, por termos que organizar as ideias para as apresentarmos aos outros" (idem, p. 21).

A própria dinamização do grupo de discussão é também valorizada por ambas as professoras. Rebeca refere que "contribuiu para uma melhoria do meu Ego" (E3, p. 21). Sentiu-se satisfeita com o seu próprio papel e participação e, nessa medida, ganhou "auto-confiança" (idem). Anita fundamenta o valor que lhe atribui através da importância que tem para si a partilha de ideias: "é o levantar o véu do que é que se está a fazer, do que é que nós pensamos sobre, porque as pessoas vão tomando consciência, muitas vezes, sabendo o que se está a fazer" (E3, p. 14). Ambas abordam aspectos que, no conjunto, se prendem com reflexões que a experiência nelas desencadeou, relacionadas com o papel dos professores na análise do trabalho dos seus pares, com a aprendizagem da profissão e com diferentes modos de perspectivar o trabalho de ensino:

> Mas agora o que é que acrescentou a dinamização do grupo de discussão em si mesma? Também acrescentou. Foi interessante, por exemplo, nós vermos as outras pessoas e as opiniões que surgiram. (...) Porque surgiram algumas opiniões menos boas, não te lembras? (...) Nomeadamente críticas, mesmo, ao trabalho das professoras... Elas não sabiam qual de nós era... (...) Portanto, encaramos aquilo com naturalidade e percebemos que é normal, que as pessoas não estão ainda sensibilizadas para determinadas coisas e percebemos que falem de determinada maneira. E também foi importante, se calhar. Reflectir e pensar como é que os outros vêem as coisas e vêem o nosso trabalho. Nós estamos conscientes que há *n* críticas a fazer, nós próprias as fazemos quando vemos o nosso trabalho... Mas foi a maneira também como as pessoas encararam isso. Não encaram numa perspectiva de crítica construtiva, não é? Porque de certeza que as pessoas que lá estavam, perante o mesmo tipo de trabalho, também teriam certo tipo de dificuldades como nós temos, como eu acho que é perfeitamente natural ter... E é como se as pessoas se exteriorizassem completamente do seu papel e lhes bastasse dizer: isto está mal, porque a professora fez mal e não sei quê... E não se põem no papel de dizer: isto podia ter sido melhor, é claro, mas descontextualizam as coisas... Não te sei explicar muito bem, mas também foi importante reflectir sobre isso. (Rebeca, E3, p. 25)

> E falando sobre o que aconteceu. Por exemplo, no caso da sessão do ProfMat, a primeira coisa que pus foi: soube a pouco o tempo que tivemos para a discussão, principalmente porque estavam a gerar-se momentos interessantes de confronto de duas perspectivas. Uma era a daquela colega que resolveu logo atacar, que reflecte um bocado o modo tradicional de ver as coisas: aquilo é tudo certinho, bate tudo muito direitinho, ninguém arrisca nada e não há ali falhas; está sempre tudo direitinho e acabou; eu chego à aula e agora façam isto e pronto; os alunos vão direitinhos... Não há riscos, não se arrisca a fazer uma determinada coisa apesar dela poder representar mais-valias para a aprendizagem... Depois, havia a outra perspectiva que é a gente tentar fazer e ir tentando melhorar o que faz, não é? E é a partir daí que pensamos: então, mas por que é que isto agora foi assim? E, principalmente, quando podemos partilhar com outros esta nossa reflexão, é muito bom. Ajuda-nos sempre. Mas a pessoa experimenta uma determinada coisa um bocadinho mais arriscada, digamos assim, e vai reflectindo sobre ela e vai aprendendo dessa maneira. (...) a outra colega mais nova reconheceu quais eram os objectivos da aula que se estava a passar, o que é que se pretendia. (...) E estava numa perspectiva construtiva do que é que se poderia tentar fazer melhor, se houvesse mais tempo... Não houve, acabou... (risos). (Anita, E3, pp. 14-16)

Ambos os extractos referem uma situação ocorrida durante o grupo de discussão, em que uma participante, num tom de certo modo acintoso, refere aspectos que, do seu ponto de vista, são negativos no trabalho realizado pela professora que sabia, através do material que foi entregue, ser orientado no sentido de promover o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. O que estava em causa era a primeira aula de Anita que gravei no âmbito do projecto. Ao seleccionarmos o material empírico, todas tínhamos considerado que extractos de transcrição desta aula poderiam contribuir para despoletar a discussão. Em particular, revelavam dificuldades dos alunos, aspectos significativos relacionados com o papel da professora e problemas com que teve que lidar.

Quando me confrontei com as críticas, na forma em que foram feitas, fiquei inquieta. Afinal, tinha sido eu a desafiar as professoras para uma "aventura" em que eu, pelo facto de não ser a minha prática que estava em análise, estava mais protegida. A continuação da discussão e a conversa que no final tivemos, sossegou-me, tal como me sossegou o que, mais tarde, ouvi, quer de Rebeca, quer de Anita:

> E, se calhar, se nós não estivéssemos tão à-vontade e tão bem nas nossas coisas, podíamos ter ficado incomodadas... Eu não fiquei e acho que a Anita também não ficou e conheço-a bem... Até pensei que ela pudesse ficar, mas vi que nitidamente não ficou nada... Podíamos ter ficado incomodadas com certas opiniões das pessoas perante as aulas, não é? (Rebeca, E3, p. 25)

> Não, não me senti mal. Para já não sou perfeita... (risos) Depois porque eu sabia que ali não tinha conseguido fazer exactamente o que eu pretendia. Por que é que eu me havia de sentir mal, apesar da outra colega ser um bocado mais para o agressivo, não é? Mas, pronto, azar! (...) A pessoa pode tentar e vai tentando melhorar e vai reflectindo e, principalmente, se houver partilha que contribua para confrontar perspectivas e maneiras de ver coisas e alternativas, constroem-se outras coisas. Agora, sentir-me mal, mal, senti-me eu por não ter conseguido fazer o que queria e como queria. (Anita, E3, pp. 16-7)

Submeter o próprio trabalho ao escrutínio público, sobretudo quando, à partida, se tem consciência de que há aspectos que podem ser aperfeiçoados, requer abertura à crítica e reconhecimento da possibilidade de aprender a partir do outro. Exige honestidade e coragem intelectual. Do meu ponto de vista, são estas qualidades de Anita e Rebeca, essenciais a uma aprendizagem ao longo da vida, que transparecem nos comentários que tecem a propósito da experiência que viveram no âmbito da dinamização do grupo de discussão.

A relação de colaboração

Esta secção foca-se na relação de colaboração que fomos construindo ao longo dos cerca de dois anos em que eu, Anita e Rebeca trabalhámos em conjunto. Abordo cuidados que fui tendo para criar e manter a possibilidade de uma negociação aberta, responsável e permanente da actividade individual e colectiva, ao mesmo tempo que tentava que o projecto fosse significativo para cada uma de nós. Refiro perspectivas das professoras sobre a articulação entre os principais objectivos que nos moviam, bem como sobre aspectos que consideram ter sido favoráveis ao desenvolvimento da relação de colaboração. Debruço-me, também, sobre dificuldades ou problemas com que eu, Anita ou Rebeca nos confrontámos.

Construindo a relação de colaboração

Quando iniciámos o projecto de investigação colaborativa sabia que a qualidade do trabalho que desenvolveríamos dependeria muito da natureza da relação que conseguisse estabelecer com as professoras. Se se fundasse no cuidado, entendido como confiança, respeito e compromisso, a possibilidade de conversarmos, sem constrangimentos, sobre as suas aulas seria maior, além de que a minha presença aí se tornaria mais natural e fácil.

Anita e Rebeca eram amigas há muito tempo. Suspeitava que o à-vontade que tinham entre si, o seu gosto por trabalharem em conjunto e o hábito de se apoiarem mutuamente, podia contribuir para a existência de um diálogo franco que considerava essencial no grupo de pesquisa. Do meu ponto de vista este aspecto foi, francamente, importante sobretudo nas fases iniciais do projecto e é salientado por Rebeca como um dos que contribuiu para facilitar o seu desenvolvimento (E2, p. 16; E3, p. 32). Colocou-me, no entanto, perante um desafio acrescido. Eu era o "elemento estranho", aquele que queria criar laços com pessoas entre as quais já existiam boas e significativas relações. Tinha consciência que criá-los não estava, apenas, nas minhas mãos. No entanto, tinha também consciência de que aquilo que de mim dependia não era indiferente.

Intuía que criar esses laços passava, antes de mais, por dar-me a conhecer de uma forma autêntica. Passava também, por estar disposta e disponível para, no trabalho conjunto, mobilizar os meus saberes, a minha experiência e o que sou como pessoa, de modo a contribuir com ideias que pudessem ajudar a equacionar caminhos que Anita ou Rebeca decidissem trilhar. Passava, ainda, por contribuir para uma reflexão problematizadora — mas não constrangedora nem destrutiva — sobre aspectos das suas práticas que qualquer um dos elementos do grupo de pesquisa considerasse importante analisar. Por último, passava por cuidar de que a minha voz não fosse ouvida como aquela que expressa o saber maior ou melhor, aquele que importa ou tem valor, que não contribuísse, de algum modo, para silenciar ou enfraquecer as vozes das professoras. Este último aspecto, em particular, preocupava-me. Sou professora numa instituição de ensino superior e constato que em termos do senso comum, por vezes, se estabelecem entre as instituições educativas hierarquias que vão no sentido de sobrevalorizar o conhecimento de determinados grupos face a outros. A situação complexificava-se na medida em que a minha idade é distanciada da das professoras — separam-nos cerca de 20 anos — e possuo uma experiência profissional significativamente mais longa e diversificada do que qualquer uma. Anita e Rebeca conheciam tudo isto quando iniciámos o trabalho conjunto.

Estas ideias foram elementos orientadores para o meu modo de agir durante o desenvolvimento do projecto. Distanciei-me, assim, do papel de investigador "puramente etnográfico" que, embora tentando evitar construir com os professores relações em que o poder é partilhado de uma forma desigual, tenta também evitar interferir com as suas práticas usuais e emitir juízos avaliativos sobre a sua acção (Erickson, 1989). Ou seja, procurei, ao longo das sessões de trabalho, investir num diálogo cujo conteúdo substantivo provinha não apenas de Anita e Rebeca, mas também de mim. Eliminar a possibilidade de também eu contribuir para este diálogo levaria ao desenvolvimento de uma relação algo artificial e contraproducente, que não só iria contra as expectativas das professoras, mas também caminharia no que penso ser um sentido contrário ao espírito da colaboração.

Uma das minhas primeiras preocupações enquanto investigadora, foi delinear um modo de trabalho que permitisse a todos os elementos do grupo de pesquisa conhecerem-se reciprocamente e começarem a construir uma relação de confiança num ambiente o menos constrangedor possível para qualquer uma das pessoas envolvidas. Por um lado, não me sentia confortável com a ideia de propor a Anita e Rebeca o desenvolvimento de alguma actividade que implicasse a minha entrada nas suas aulas em ocasiões situadas perto do início do projecto. Tinha sido sensível a uma ideia de Goodson (1993) que destaca que o ponto de partida para a colaboração não pode centrar-se no ponto de máxima vulnerabilidade para os professores que é a sua prática lectiva. Considerava importante que existisse, entre nós, um tempo de aproximação que tornasse possível construirmos patamares de confiança que pudessem ajudar a diminuir constrangimentos que a minha “invasão” deste seu espaço de privacidade poderia causar-lhes. Apostava, assim, na proximidade. Por outro lado, pensava que o trabalho a realizar não poderia ser desligado ou distanciado da actividade de um professor de Matemática, do tema do projecto e, em particular, das práticas de Anita e Rebeca. Procurava, deste modo, que o conteúdo dos encontros colectivos fosse relevante e significativo para cada um dos elementos do grupo de pesquisa.

Foi através da segunda etapa da primeira fase do projecto — *Período de construção de uma linguagem e referencial comum e de conhecimento recíproco* — que procurei compatibilizar estes dois aspectos. No encadeamento que imaginei para as possibilidades de acção, apostei numa estratégia de aproximação sucessiva às práticas das professoras: começaríamos com a análise de diálogos ocorridos em aulas de outros professores, passaríamos à discussão de tarefas já seleccionadas por nós e terminaríamos com as narrativas de episódios de argumentação matemática e/ou análise da gravação em vídeo de uma das suas aulas em que, por opção, eu não estaria presente. O trabalho com documentos atravessaria todas estas actividades. É neste contexto e face à disponibilidade manifestada por Rebeca para este registo ser feito na sua turma, que sugiro que a gravação seja feita por alguém que conheça bem e de quem goste e apresento a hipótese de ficar, por exemplo, a cargo de Anita com quem, no passado, houve partilha de experiências bem sucedidas de observação mútua de aulas. Como anteriormente referi, não foi possível concretizar esta hipótese por incompatibilidade de horários. Assim, a aula foi gravada por um colega escolhido por Rebeca, com quem mantinha uma boa relação de trabalho e amizade, mas que era exterior à equipa do projecto.

Durante a segunda entrevista, quis perceber o que pensavam Anita e Rebeca sobre a existência da referida segunda etapa. Indiquei os objectivos com que a delineei e confrontei-as com a possibilidade de desenvolvermos o projecto de um modo que requeresse a gravação de aulas por mim e sessões de reflexão do tipo das que existiram, desde o início do projecto. Quanto a este último aspecto Anita refere não saber muito bem como se sentiria. Coloca antes a ênfase na importância dos "nossos referenciais", referência implícita às ideias teóricas analisadas, nas mais-valias da discussão colectiva para o seu enriquecimento pessoal e profissional e na "sensação de vazio" que experienciaria se a sua aula fosse apenas uma fonte de extracção de dados para o meu trabalho. Em contrapartida, Rebeca explicita, claramente, as potencialidades da segunda etapa, tal como foi concretizada, para o desenvolvimento da relação de colaboração:

> No caso de teres ido logo filmar as aulas o que é que teria sido diferente… (...) A gente nunca sabe o que é que acontece, não passou por elas… (...) Se me dissesses para que é que querias filmar as aulas, creio que era capaz de colaborar, pois não vejo problema em "partilhar" a minha aula. No entanto, se não as discutíssemos em conjunto e não partilhássemos o que partilhámos enquanto projecto, acho que sentiria uma sensação de vazio, comparativamente ao que sinto em relação ao trabalho que desenvolvemos. E se só nos facultasses as gravações, por exemplo, sempre podia ver-me e analisar, mas sem os nossos referenciais e discussão ficaria aquém do que agora consigo ver nas aulas, e contribuiria menos para mim enquanto profissional e pessoa. (Anita, E2, p. 18)

> Aquele é o nosso espaço em que nós estamos habituadas a estar só com os alunos, e depois está lá outra pessoa, ainda por cima a filmar a registar, aquilo vai ficar registado. Independentemente de nós acharmos que fazemos as coisas bem ou não, isso incomoda sempre, e quando nós ainda não te conhecíamos,

> não tínhamos ainda nenhum tipo de relação construída isso era com certeza mais complicado e, se calhar, até poderia ter dificultado esta relação que acho que é boa que nós desenvolvemos, acho que foi uma boa opção, acho que fizeste bem! Apesar de eu gostar mais da parte da filmagem das aulas, acho que a outra parte foi importante também, não só pelo primeiro motivo que tu disseste [construção de uma linguagem e referencial comuns] mas também, e se calhar, principalmente mesmo, por esse segundo motivo [ter optado por não propor a gravação de aulas na fase inicial] que tu disseste, porque ainda não te conhecíamos e tu chegavas lá e ias logo filmar-nos as aulas, não é? Assim, houve uma fase em que nos conhecemos mais, ficámos mais à-vontade e depois também mais à-vontade para partilhar aquele nosso espaço de convívio. (Rebeca, E2, pp. 14-15)

A observação e análise dos vários factores que contribuíram para a natureza da relação de colaboração que construímos, conduz-me a destacar três aspectos que acompanharam o desenvolvimento de todo o projecto: (a) as acções concertadas e abertamente negociadas em plano de igualdade, (b) o diálogo enquanto instrumento de obtenção de consensos e *também* de compreensão e (c) a mais-valia oriunda da complementaridade de experiências, formações, perspectivas. Estes factores entrelaçaram-se fortemente. A ênfase atribuída a qualquer um facilitou a instituição e manutenção do outro e esta articulação foi favorável ao desenvolvimento de uma relação interpessoal fundada no cuidado. Apresento dois exemplos que podem contribuir para clarificar e apoiar esta ideia. O primeiro focado no processo de negociação do trabalho a realizar conjuntamente e o segundo na complementaridade.

Terminei a subsecção intitulada *A primeira fase do projecto de investigação colaborativa* referindo que encerrávamos cada sessão de trabalho acordando o que iríamos fazer na seguinte, usualmente, a partir da análise de uma proposta que eu apresentava. Procurava que fosse significativa para qualquer um dos elementos do grupo de pesquisa, mas apesar dos meus cuidados, não podia ter a certeza de que fizesse sentido para uma ou ambas das professoras ou correspondesse ao que, no momento, desejavam. Sobretudo nas primeiras sessões de trabalho em que o à-vontade entre todas nós ainda não era muito e o conhecimento recíproco era débil, esta questão pareceu-me ser particularmente relevante. Procurei lidar com ela explicitando as razões que, na minha perspectiva, justificavam cada proposta, tentando indagar o que sobre ela pensavam Anita e Rebeca e mostrando disponibilidade para a adaptar ou substituir por outra. Preocupei-me em ser autêntica no diálogo, em evitar ambiguidades ou mal entendidos e em destacar, implícita e explicitamente, o valor que, nas relações entre pessoas, atribuo à transparência e à abertura ao ponto de vista do outro.

Contrariamente ao que aconteceu, por exemplo, quando discutimos alguns episódios de aulas durante as sessões de reflexão — em que o diálogo foi um instrumento de compreensão na medida em que confrontámos interpretações e levantámos hipóteses plausíveis mas não nos decidimos necessariamente por nenhuma delas — no processo de análise de propostas, o diálogo foi um meio de obtenção de consensos. Com efeito, era a partir dele que identificávamos as alterações necessárias na proposta de modo a estabelecer os compromissos que assumíamos para a sessão de trabalho seguinte.

A descrição relativa ao encerramento da terceira sessão de trabalho, incluída no respectivo memorando, pode contribuir para ilustrar o processo que no caso concreto usei para, na sequência de uma situação imprevista, apresentar hipóteses de trabalho para o encontro seguinte que me pareciam ser relevantes para o projecto e analisá-las com as professoras procurando que se envolvessem, num plano de igualdade, na tomada de decisões, incentivar o seu protagonismo, enquadrar iniciativas que tomassem e ter em conta as necessidades que exprimiam ou que eu pressentia:

> A sessão de trabalho terminou decidindo o que iria ser feito na próxima. Uma vez que, como tínhamos pensado, não era possível analisarmos a aula da Rebeca a partir da sua gravação devido aos inesperados problemas técnicos que surgiram no início da aula, sugeri que discutíssemos um texto e que analisássemos uma tarefa. A sugestão foi aceite e, a partir daí, procurámos escolher o texto folheando os existentes no dossier. Recordando-me do pouco à-vontade que a Rebeca tinha manifestado em relação à língua inglesa, propus que fosse um escrito em português e indiquei que, no momento, me parecia ter interesse debruçarmo-nos sobre o intitulado *Dinâmica da argumentação na de aula de Matemática: Normas sociais e normas sociomatemáticas* ou o que tinha elaborado com base nos *Standards 2000*: *Normas raciocínio e prova*. A Rebeca e a Anita manifestaram um grande interesse pelos *Standards*. No entanto, como o documento é longo e esta é uma altura de muito trabalho nas escolas devido à avaliação dos alunos, acharam que era preferível adiar a sua discussão para outra altura e, por isso, combinámos que para a próxima sessão todas leríamos em casa o primeiro texto. Combinámos também que a tarefa seria escolhida na

> altura e poderia ser uma das incluídas no dossier ou uma qualquer outra trazida pela Anita ou pela Rebeca. Quando conversámos sobre o conteúdo do dossier tinha-lhes dito que contava com elas, nomeadamente, para o "rechearem" com tarefas que considerassem ser adequadas aos seus alunos e originar boas actividades de argumentação matemática e ambas tinham ficado de as procurar. (MST 3, p. 5, 07/12/01)

A partir da altura em que acordámos o envio de tópicos de reflexão, optei por fazê-los acompanhar de uma nota escrita referente aos compromissos negociados que enviava, previamente a cada sessão, a Anita e Rebeca. Estas notas mantiveram-se até ao final do projecto, independentemente do foco da actividade a desenvolver colectivamente. Funcionaram como uma espécie de "ordem de trabalhos" flexível para cada novo encontro, que considero ter facilitado a organização do trabalho conjunto, um aspecto com que sempre me preocupei deste o início do projecto. Esta organização, juntamente com os cuidados que fui tomando para instituir e manter uma negociação transparente, igualitária e continuada das actividades e das formas de as concretizar, são alguns dos aspectos que Anita e/ou Rebeca consideram ter sido favoráveis ao desenvolvimento do projecto:

> Depois outra das coisas que facilitou foi um bocado a tua atitude. Não impões nada não é? Negoceias as coisas connosco... (...) Consegues ceder naquilo que tem de ser cedido, consegues compreender os diferentes pontos de vista e és muito organizada, e isso facilitou-nos também muito o trabalho porque organizaste muito o trabalho para nós... É verdade e isso tem que ser dito… e a tua atitude de pôr à-vontade, de não impor nada, de fazermos as coisas em conjunto... isso facilitou muito. No fundo, não chegaste aqui e... Acabaste por estar sempre a coordenar as coisas, como tinha que ser, e isso facilitou. Se calhar se fossemos nós a fazer não tínhamos capacidade, tinhas que ser tu, mas conseguiste conciliar as duas coisas, não impuseste nada, não estavas num patamar acima de nós, estavas no mesmo patamar. Apesar de estares numa situação diferente conseguiste manter-te no mesmo patamar que nós, ao mesmo nível, e ir gerindo as coisas, conseguindo que nós, apesar do trabalho que estávamos a ter, que fossemos fazendo as coisas que era preciso serem feitas, conseguimos organizar isso muito bem, sem nos impores nada, sem termos que fazer nada contrariadas… eu, pelo menos, nunca fiz nada contrariada, aliás fiz sempre com gosto e até gostaria de às vezes ter feito mais, mas não sei... também estou a aprender, não é? (risos). É um bocado isso. Acho que facilitou muito. (Rebeca, E2, pp. 16-7)

> Toda a organização que tu tens das coisas, obviamente, o que é que faz? Faz com que as pessoas se empenhem também, não só por si próprias mas tudo o que tu consegues... eu nunca tinha visto assim uma coisinha assim tão bem organizada, percebes? Apesar de eu me organizar, de fazer um esforço com o meu projecto, mas... Percebes? É a calendarização, é todos os detalhes, tu

> mandas esses tópicos para a gente pensar... Todo esse conjunto de coisas não aparece por acaso, é da tua reflexão, com certeza, não é, e está bem organizado. (Anita, E3, p. 82)

Passo ao segundo exemplo focado na complementaridade. Tinha consciência de que Anita e Rebeca esperavam aprender com a experiência de desenvolvimento do projecto e que tinham expectativas de que eu pudesse contribuir para as ajudar a encontrar meios de melhor lidarem com o envolvimento dos alunos em actividades que envolvem a explicação, justificação e demonstração de raciocínios, aspectos que, no seu início, associaram à argumentação matemática. Tinha a intenção de mobilizar toda a minha experiência profissional para encontrar modos e meios de a colocar "ao serviço" do projecto. No entanto, no começo do trabalho conjunto tinha, também, consciência de que, em vários aspectos, as professoras não me viam em plano de igualdade. Sabiam que tinha já participado em projectos de investigação, que trabalhava há muitos anos no campo da formação de professores e que mesmo no respeitante ao ensino não superior, a minha experiência docente era, em duração, superior à sua. Pressenti que este factor "jogava" contra a relação de colegialidade que me parecia importante construirmos e que era fundamental para que o diálogo fosse autêntico e a minha voz não dominasse.

Procurando equilibrar o campo de acção colectiva, preocupei-me em destacar as vantagens que podiam advir para o processo de colaboração se considerássemos os nossos saberes e experiências complementares. Salientei, por exemplo, que na altura em que dei aulas a alunos do 3º ciclo do ensino básico, as escolas tinham características diferentes das actuais, que o currículo instituído de Matemática não era o mesmo e que, pelo menos nalguns aspectos, os próprios alunos eram também diferentes. Através desta via, tentava colocar a ênfase nos saberes das professoras relativos à construção do currículo de Matemática com os alunos das suas turmas, aos aspectos que os entusiasmam, ou não, ao que pode facilitar ou dificultar a sua aprendizagem e o seu envolvimento em actividades de argumentação matemática. É aqui que também se enraíza, embora não apenas, a proposta de serem Anita e Rebeca a dizer a última palavra sobre as tarefas que explorariam nas suas turmas, quando as apresentariam e através de que formas organizariam e conduziriam o trabalho nas aulas.

Procurei, além disso, dar visibilidade, salientar e integrar aspectos da experiência profissional das professoras em que as suas competências eram, claramente, superiores às minhas. Sabendo que ambas se interessavam pela utilização educativa de novas tecnologias na aula de Matemática, que tinham sido responsáveis pela concepção e concretização de cursos de formação de professores nesta área e que tinham experiência de trabalho na sala de aula, incentivei a procura de tarefas cuja exploração pelos alunos requeresse a utilização do computador. Este é um campo em que não me sentia, completamente, à-vontade, como fiz questão de explicitar, mostrando, ao mesmo tempo, que confiava na sua perícia. Durante o processo de análise dos esboços dos enunciados das tarefas que Rebeca elaborou "para" o *Geometer's Sketchpad* (tarefa 3 e tarefa 4-versão A, tabela 8), foi frequente a troca de ideias especificamente relacionada com aspectos particulares da utilização do *software* processar-se, apenas, entre as professoras. Nestes casos, eu escutava para aprender. Globalmente, contribuí com questões ou sugestões de carácter pedagógico que permitiram reformular o seu enunciado de um modo mais favorável ao envolvimento dos alunos numa actividade matemática mais rica. Um comentário de Rebeca perto do final da análise de uma destas tarefas, permite ilustrar as potencialidades de termos tido em conta o conjunto dos saberes de que eu e as professoras somos portadoras:

> Esta é para o *Sketchpad* e estás a ver como a gente não se importa nada com as tuas sugestões? Eu não me importo nada de me estares a ajudar a fazer isto. Vai ficar muito melhor do que aquilo que ia ficar, não é? (Rebeca, TST 17, p. 20)

A ênfase na complementaridade de saberes e nas possibilidades de aprendizagem mútua, a par da abertura e disponibilidade de Anita e Rebeca, foram, para minha perspectiva, favoráveis a que na relação de colaboração todas nos situássemos em plano de igualdade, reconhecendo as nossas diferenças e tirando partido delas. Foi possível alcançarmos um patamar de confiança recíproca que tornou viável exprimirmos, verdadeiramente, o que sentíamos e pensávamos sem que a experiência fosse, de algum modo, embaraçosa ou constrangedora. Atingir este patamar não passou, exclusivamente, pelas conversas que tivemos durante as sessões de trabalho e/ou por aquelas que, mais directamente, se prenderam com o tema do projecto ou questões associadas, em geral, ao ensino e aprendizagem da Matemática. Foram frequentes refeições conjuntas que, de início, foram da iniciativa das professoras. Encarei estes espaços informais como bem vindos e, de maneira alguma, os considerei perda de tempo. Do mesmo modo, não vi como extemporâneos ou infrutíferos os diálogos relacionados com aspectos da vida não profissional que, por vezes, se geravam enquanto, por exemplo, discutíamos textos ou analisávamos uma aula. Por um lado, confiava no bom senso individual e colectivo para que não estes diálogos não se expandissem de modo a comprometer o plano de trabalho acordado. Na realidade, nunca o comprometeram. Por outro lado, acredito que, em particular, as teias de cumplicidades femininas também se constroem muito através de conversas em que o trabalho e o resto da vida se interpenetram.

A análise do que dizem as professoras revela que há traços comuns entre a perspectiva que tenho sobre a relação de colaboração e as suas próprias perspectivas:

> Acho que o projecto ultrapassou as minhas expectativas em muitos aspectos. Não pensava aprender tanto... Se calhar as expectativas que eu tinha eram muito pequeninas comparadas com aquilo que veio a ser. Pensava que era aquele trabalho mais relacionado com as tarefas, com a preparação das tarefas e poder partilhar. E nunca pensei que a gente desenvolvesse tanto uma relação... eu acho que é uma relação de amizade, não é? (...) Não pensei que estivéssemos à-vontade para falar de outras coisas que não têm nada a ver com o trabalho... (risos). Pensei que fosse mais uma relação de trabalho mesmo. Portanto, ultrapassou as minhas expectativas em termos pessoais... (...) sempre pensei, e acho que já tinha dito isto na outra entrevista, que tu estivesses num nível um bocadinho diferente do nosso... Mas não, não foi isso que aconteceu. Tu puseste-te sempre ao nosso nível, não é? Apesar de dares o teu contributo, que nunca deixaste de dar (...) E acho que isso foi muito importante. Conseguimos aprender muita coisa contigo e fez com que, se calhar, criássemos estes laços de amizade contigo (...) Foi importante da tua parte. Conseguiste. Se calhar nem toda a gente consegue... Conseguiste não deixar de transmitir as coisas que tu sabes e que são importantes e partilhares as tuas opiniões e fazeres críticas, mas também sabes criticar bem, fazes críticas construtivas. (...) [vocês também trouxeram coisas para o projecto...] Nomeadamente em termos de tecnologias ou coisas assim? (Rebeca, E3, pp. 29-30)

> As minhas expectativas. Vamos lá a ver, eu associo-as a três palavras: partilhar, aprender e desafio. Embora eu seja sempre a mais caladinha, que é o meu estado mais normal (...) eu gosto de partilhar, de ouvir, de dizer (embora seja um bocadinho mais difícil — é mais fácil ouvir...), de reflectir sobre o que fiz e sobre o que me dizem também. (...) normalmente partilho com as pessoas com quem estou mais à-vontade, o que é humano. (...) Agora, dada a oportunidade de rever as aulas e a nossa reflexão conjunta — e isto já está um bocado na nossa conversa anterior — a que é que isto leva? Para já leva a um crescimento conjunto, acho eu. A partilha eu considero que nós conseguimos mesmo que existisse. Portanto, as expectativas foram até superadas. (Anita, E3, pp. 35-6)

> Imagina que éramos três professoras que não tivéssemos... Por exemplo, se fosse eu a Rebeca e a (...) [referência a uma colega], pronto. Que eu saiba, nenhuma de nós tinha conhecimento para começar a ler os textos a que nós tivemos oportunidade de ter acesso. Culpa nossa, nós devíamos procurar, eu sei, mas pronto. Mas não procurámos, e quase de certeza que elas também não. Logo aí, estávamos, à partida, mais limitadas. E a experiência é diferente, também. Tu já pensaste sobre estas coisas. Eu acho que estas coisas estão um bocado implícitas naquilo que eu tenho aqui escrito que foi: "os factores que eu considero terem influenciado o desenvolvimento do trabalho de colaboração foram: o desenvolvimento da nossa relação em termos nos conhecermos melhor"... É sempre bom, não é? (...) se a gente estiver mais à-vontade, estamos melhor para falar. (...) o sermos capazes de discutir o que pensamos — e acho que isso está ligado, também ao nosso crescimento conjunto, mas também a algumas características de nós as três — a boa organização de todo o trabalho e a continuidade do trabalho. (Anita, E3, 70-1)

As vozes de Anita e Rebeca revelam que as expectativas que tinham face ao projecto foram superadas. Vários dos extractos de transcrições que anteriormente apresentei permitem, em geral, ilustrar porque o foram. Sem entrar em detalhes sobre aprendizagens ou mudanças de perspectivas mais directamente relacionadas com o ensinar a argumentar em Matemática que abordarei no capítulo VIII, refiro um aspecto, ainda não mencionado, que me parece ilustrar bem uma contribuição que o projecto lhes trouxe, que ambas consideram particularmente significativa, mas de que não estavam à espera — a utilidade que teve para a frequência da parte curricular do mestrado e para imaginarem possibilidades para o seu próprio tema de investigação:

> Nós apresentámos [durante a parte curricular do mestrado] bem aquele texto do Skovsmoze, eu creio que também por vivência. Porque nós acabámos por ter no projecto a vivência de experimentar, nomeadamente tarefas de investigação. Eu, pelo menos, não tinha e acho que a Rebeca também não, tanta experiência como tenho agora. Quer dizer, também não tenho assim tanta, mas, pelo menos já experimentei um bocado e estou muito entusiasmada, tanto que me metia bem por aí. (...) aquele texto do Skovsmoze, eu quando apresentei, pelo menos, já

> não falei só daquilo que li do texto. Leio com o coração ou seja, com o que vivi. (...) é ir buscar as minhas memórias. (...) É mesmo falar com o coração! É mesmo completamente diferente. Portanto, logo aí o projecto ajudou. (Anita, E3, p. 68)

> Não pensei que o projecto tivesse tanta utilidade além das aulas. Sempre pensei que tivesse alguma utilidade em termos de prática, de percebermos como tu fazias o trabalho, para depois a nossa parte da tese do mestrado. Também percebíamos como é que este trabalho se desenvolve e isso podia vir a ser útil para depois fazermos a tese. Mas nunca pensei que tivesse tanta influência, que as coisas que nós discutíssemos tivessem a ver, por exemplo, com a parte curricular, com coisas que nós discutimos no mestrado, e que viessem a ter utilidade nesse sentido. Por exemplo, aquilo que eu agora estou a pensar em fazer na tese acho que tem a ver também com o nosso trabalho, não é? Não pensei que viesse a ter alguma influência. Ultrapassou as minhas expectativas. (Rebeca, E3, pp. 39-40)

As ideias apresentadas por Anita e Rebeca são, claramente, indiciadoras de que a colaboração foi, na sua perspectiva, bem sucedida, tal como também eu a considero. À partida tínhamos assumido que os papéis que desempenharíamos não seriam exactamente os mesmos e que, no âmbito do propósito do projecto, poderíamos prosseguir objectivos diferenciados tendo eu explicitado o foco do trabalho de investigação que pretendia desenvolver. Perto do final do projecto, mais concretamente em Março de 2003, quis perceber como percepcionavam a questão da mutualidade de objectivos e da aproximação de papéis que alguns autores consideram ser as vias adequadas para o bom sucesso de uma relação colaborativa. Embora não exactamente com esta formulação, foi esta a questão com que as confrontei, referindo a diversidade de perspectivas existentes na literatura e apelando à experiência vivida para sobre elas reflectirem. As suas intervenções falam por si próprias e, simultaneamente, revelam qual o principal objectivo que as moveu:

Mutualidade, ou não, de objectivos?

> Os mesmos objectivos... ora bem... tu não devias estar a querer melhorar a tua prática profissional, pois não? Com alunos do 8º e 9º ano não dava assim muito jeito... (risos) (...) Portanto à partida esse objectivo pelo menos tínhamos diferente. (...) E ao melhorar o meu trabalho espero melhorar o dos alunos. Para isso é que melhoro o meu... É o meu objectivo principal! Mais objectivos... Acho que melhorar a minha prática profissional é muito abrangente! (...) As pessoas não têm que ter exactamente os mesmos objectivos... (Anita, E3, pp. 94-5)

> Mas nós não partilhamos exactamente os mesmos objectivos... E a relação de colaboração foi bem sucedida!!... (...) Quais são os meus objectivos? É reflectir sobre a minha prática, tentar tirar o melhor proveito, aperfeiçoá-la, construir trabalho, tarefas, com esses objectivos... e os teus objectivos não eram melhorares a minha prática, não era nada disso... (risos) (...) Era estudares a argumentação e tentar compreender o trabalho do professor nesse processo, tentar compreendê-lo melhor. (...) E eu não estou interessada em compreender só por compreender, ou seja, tento compreender para tentar melhorar. O meu objectivo é melhorar e nesse sentido, como acho que é importante a argumentação, tenho que compreender esse fenómeno também. É um dos fenómenos que eu tento perceber para poder melhorar. São objectivos diferentes e não é por isso que não tem funcionado bem. Tem funcionado plenamente. Conseguimos compatibilizar os nossos diversos objectivos. (Rebeca, E3, p. 31)

Diferenciação, ou não, de papéis?

> Então, olha lá, até é bom é que tenhamos papéis diferentes. É a tal coisa, não vou dizer que os outros colegas não podem saber mais do que eu, mas estamos todos quase no mesmo... digamos estádio... É claro que uns estão mais à frente do que outros, são mais experientes, ou já reflectiram mais ou já passaram por outras experiências, ou já cresceram de maneira diferente e podemos partilhar mas eu nunca vi nenhum colega meu falar sobre as coisas que a gente tem falado... ou se falam... quer dizer, com a gente nunca falaram, nunca partilhámos tão a fundo. (...) Agora fala-se muito do trabalho em equipa dos professores, o que eu acho óptimo e importante, mas também nós não temos tanto traquejo como se tem quando temos uma pessoa como tu, pronto. (Anita, E3, pp. 84-5)

> A minha recomendação... — esta dificuldade nós não tivemos, mas se calhar o trabalho tinha sido mais difícil se tu te tivesses posto num nível superior ao nosso e isto se calhar tem mais a ver com a empatia entre as pessoas... — independentemente das pessoas terem papéis diferentes e objectivos diferentes porem-se no mesmo nível pensando, como tu sempre pensaste, que também tinhas muito a aprender connosco. (Rebeca, E3, p. 41)

Inquietações vividas

Uma das questões que se me colocou várias vezes ao longo do percurso que eu, Anita e Rebeca fizemos, quando me deparava com dilemas ou dificuldades com que nem sempre foi simples lidar, foi a de se deveria ter optado por uma metodologia de investigação que não envolvesse uma tão grande proximidade das professoras e uma tão grande sensibilidade e esforço emocionais. Afinal, como referem diversos autores, uma investigação distanciada é mais confortável quando comparada com outras que implicam que se trabalhe de perto com os professores (ver, por exemplo, Breen, 2003).

Algumas das dificuldades que enfrentei foram de carácter técnico. Ultrapassá-las não foi complicado e o resultado foi satisfatório. Relacionaram-se, por exemplo, com a melhor forma de registar o discurso ocorrido na aula, a impossibilidade de, por vezes, entender intervenções simultâneas cuja conjunção parecia influenciar o rumo dos acontecimentos, compreender contribuições de alunos apresentadas num tom de voz pouco audível, ou garantir o registo em áudio quer das aulas, quer das sessões de trabalho. Em qualquer destes casos, o papel de Anita e Rebeca foi muito importante. Não apenas pelas sugestões e esclarecimentos que apresentaram, mas também porque me ajudaram a zelar pelos registos. Por exemplo, quando, pontualmente, aconteceu nas sessões de reflexão darmo-nos conta de que o gravador tinha, inexplicavelmente, parado de registar, disponibilizaram-se, de imediato, para reconstituir a conversação que tinha ocorrido[46]. Noutras ocasiões, por iniciativa própria, cuidavam de observar se os registos estavam a ser feitos. Durante as aulas este aspecto foi, particularmente, importante na medida em que eu não tinha acesso ao gravador que transportavam consigo, o que originou alguns "estudos aturados e bem dispostos" sobre o modo como deviam vestir-se, tanto para a sua visibilidade não ser muita, como para o botão de comutação automática da cassete não ficar bloqueado ou mudar de posição.

As dificuldades que as professoras referem ter experienciado ao longo do desenvolvimento do projecto são poucas e todas se relacionam com a gestão do tempo. Rebeca indica que nem sempre foi fácil encontrar horários comuns para as sessões do trabalho: "mas mesmo assim também não foi difícil por aí além" (E2, p. 16). Refere, também, as "dificuldades em cumprir os horários de discussão. Tivemos sempre dificuldades aí... " (E3, p. 33). Esta professora e Anita sublinham que a maior dificuldade foi compatibilizar as suas ocupações profissionais extra-projecto com o tempo que foi necessário investir nos compromissos que assumíamos quanto ao trabalho a fazer fora dos encontros colectivos: "Tive

[46] Depois de duas ocorrências deste tipo, aprendi que era prudente usar, simultaneamente, dois gravadores áudio para registar a conversação, o que se revelou uma boa estratégia. Evitou a reconstituição, com tudo o que ela envolve de artificialidade e perda de tempo, quando, mais tarde, surgiu um outro "acidente" do mesmo tipo. Além disso, durante a transcrição destas conversações, permitiu-me entender intervenções que não eram perceptíveis numa das gravações, mas eram-no na outra.

dificuldades em realizar todos trabalhos de casa que combinávamos nas reuniões sempre a horas... Foi a maior dificuldade... (risos)" (Rebeca, E3, pp. 32-3). Neste âmbito, Anita foca-se, sobretudo, no mau estar que lhe provocava o facto de nem sempre conseguir preparar as sessões de trabalho tão bem quanto desejaria:

> Vamos às maiores dificuldades. E aqui vamos às sessões de trabalho em que eu estava com problemas por causa de preparar as coisas. Portanto, houve alturas em que eu queria preparar melhor as sessões e não tinha tanto tempo, e isso causava uma sensação desagradável, não é? E a ti também, se calhar. Havia imensas reuniões na escola, surgiam coisas novas a toda a hora, houve aquelas fases todas complicadas, e depois as tensões que também existiram. Pronto, maiores dificuldades em termos do projecto mesmo foi o tempo, com estas coisas todas. (...) Era ser uma quantidade de coisas ao mesmo tempo. Claro que não era o projecto em si próprio, porque se eu tivesse só as aulas e tivesse o projecto tudo bem... (Anita, E3, p. 91)

O exemplo que referi a propósito das minhas dificuldades de carácter técnico é revelador da solidariedade que existiu no grupo de pesquisa. No entanto, não as senti como tendo um carácter problemático ou dilemático e o mesmo aconteceu com as dificuldades de Anita e Rebeca anteriormente referidas. Não me pareceu que as tivessem, particularmente, perturbado. O mesmo não aconteceu com outro tipo de questões com que nos confrontámos localizadas na primeira fase do projecto e, no que em particular me diz respeito, enquanto dávamos os primeiros passos na construção da relação de colaboração.

O primeiro dilema que experienciei pode ser enunciado como *assumpção do papel de formadora versus desenvolvimento de uma relação de paridade*. A reflexão que incluí no memorando da segunda sessão de trabalho, permite ilustrar as questões com que, na altura, me debatia e as soluções[47] que imaginei para com elas lidar:

> Não fiquei completamente satisfeita com a sessão. Senti-me muito no papel de formadora, sobretudo na altura da análise do documento *Orquestração das discussões na sala de aula e papel do professor*. Vi-me confrontada com um dilema. Era a segunda sessão que se seguiu àquela em que conteúdo foi a negociação do plano de trabalho. Só depois desta negociação é que eu poderia

[47] A palavra "solução" deve ser entendida não como resposta definitiva, mas antes no sentido que lhe atribui Wheatley (1992): "Soluções, como ensina a realidade quântica, são um evento temporário, conectado com um contexto, desenvolvido através da relação entre pessoas e circunstâncias" (p. 151).

> preparar a sessão seguinte, uma vez que esta dependia do que fosse estabelecido no primeiro encontro. Decidimos começar pela análise de um diálogo e enquanto preparava a sessão achei que o documento sobre "orquestração das discussões" podia ser útil para reflectir sobre ele com mais profundidade. Para isso era necessário, por um lado, que a Rebeca e a Anita contactassem com as ideias aí incluídas e as discutíssemos, pois o segundo nível de análise do diálogo dependia disto. Por outro lado, como não tinha ainda havido tempo para estabelecermos uma relação de à-vontade que tornasse natural enviar-lhes o documento como "trabalho de casa", todo este trabalho tinha que ser feito na própria sessão. Além disso, como tínhamos decidido que cada encontro não ultrapassaria as duas horas, não havia muito tempo para que as professoras se pudessem dedicar, simplesmente, à leitura individual do documento antes de passarmos à fase de discussão das ideias aí incluídas. A forma que usei para ultrapassar este dilema foi assumir o papel de formadora que conduz uma acção de formação em que pretende que as pessoas presentes se apropriem de determinadas ideias. Esta solução não me deixou completamente satisfeita. Queria desenvolver com a Rebeca e a Anita uma relação de paridade e o assumir deste papel parecia fazer-me caminhar em sentido contrário. A sensação que tenho é que falei demais e que não consegui, sobretudo que a Anita, conseguisse "entrar" com à-vontade na troca de ideias. (...) Em termos de sessões futuras é urgente encontrar formas de trabalho que me distanciem do papel de formadora e que valorizem saberes que a Rebeca e a Anita têm e eu não tenho. Ambas têm mais conhecimentos do que eu ao nível da utilização educativa de computadores. Apostar na valorização deste aspecto. Procurar encontrar formas de utilizar aquilo que, em termos teóricos, é discutido nas sessões, para as desafiar a falar das suas aulas. (MST 2, pp. 2-3, 27/11/01)

Este dilema manteve-se durante algum tempo e sempre associado à discussão dos primeiros documentos de carácter teórico/prático sobre os quais nos debruçámos. No entanto, a sua análise individual — prévia às sessões de trabalho e feita por cada um dos elementos do grupo de pesquisa —, a ênfase na complementaridade de saberes e experiências, a existência de conversações e encontros cujo foco incidia, mais directamente, sobre aspectos das práticas das professoras (por exemplo, discussões de tarefas, análise das narrativas, reflexão sobre a aula de Rebeca gravada por um colega) e, sobretudo, o tempo que permitiu um maior à-vontade entre nós, contribuíram para o dilema se ir, progressivamente, esbatendo até desaparecer por completo. A partir de determinada altura, comecei a sentir que o meu contributo para o trabalho do grupo passava, também, pela partilha de saberes de carácter mais teórico e que o facto de, nalgumas ocasiões, assumir um papel com características mais marcadamente de formadora, não impedia a construção da relação de paridade que desejava: significava tirar partido das diferenças que entre nós existiam. Anita e Rebeca não experienciaram este dilema.

Como os seus comentários apresentados anteriormente na subsecção *Documentos de carácter teórico ou teórico/prático* ilustram, qualquer uma das professoras considerou que a discussão de documentos foi uma das mais-valias que eu trouxe para o trabalho conjunto.

A reflexão que a seguir apresento ilustra um outro dilema com que me confrontei e que pode nomear-se como *questionamento crítico versus questionamento mais neutro*:

> Esta sessão deixou-me uma sensação de ambivalência. Estava muito preocupada com a criação de um ambiente de à-vontade e confiança em que a Rebeca não se sentisse, de modo algum, posta em causa. Sentia, no entanto, que havia algumas questões problemáticas na aula que tinha observado e gostava que a Rebeca falasse sobre esses aspectos. Queria perceber as opções que tinha tomado e as razões que as fundamentavam, mas sem a colocar numa posição de vulnerabilidade que, de algum modo, lhe fosse incómoda. Este dilema não foi fácil de gerir. Privilegiei a criação do ambiente com as características referidas e penso que o consegui. Conversámos bem sobre a aula e nunca senti que esse facto tivesse perturbado a Rebeca. No entanto, pergunto-me se fui suficientemente incisiva com as questões que coloquei. Por vezes, pareceu-me que elas não foram suficientemente poderosas para originar reflexões mais profundas. (...) sinto que a reflexão conjunta requer, ela própria, um tempo de aprendizagem colectiva que permita ir para lá do nível da descrição do que aconteceu sem, no entanto, se criar um ambiente em que as pessoas cuja acção está a ser analisada se sintam postas em causa. (MST 14, pp. 4-5, 12/03/02)

Esta reflexão surge no memorando da sessão de trabalho dedicada à reflexão sobre a primeira das aulas que gravei: uma aula de Rebeca. O que estava em causa era através de que modos poderia interpelar as professoras sobre aspectos da sua acção que me pareciam não ser muito favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, sem as colocar em situações de vulnerabilidade que poderiam contribuir para que regredisse a confiança que começava a existir entre nós. Trata-se, no fundo, da criação, no grupo colaborativo, de uma cultura de procura conjunta de significados sobre o trabalho realizado em que todos se sintam confortáveis e que requer, por um lado, proximidade deste trabalho e, por outro, distanciamento dele.

Optei, numa primeira fase, pelo que designo por *questionamento mais neutro*, privilegiando, assim, o ambiente. Foram abordados todos os aspectos em que tinha pensado ao preparar a sessão de reflexão, umas vezes autonomamente por Rebeca e outras a partir da minha iniciativa. No entanto, não me senti à-vontade para interpelar as professoras de um modo que me parecia ser favorável à actividade reflexiva, o que, nalguns casos, pode ter ocasionado que esta não se demarcasse do nível da descrição e de alguma interpretação. Esta situação, por um lado, fez-me sentir que não participei na sessão de trabalho de uma forma completamente autêntica, aspecto que, em termos pessoais, me é penoso. Por outro lado, gerou-me angústias relacionadas com o facto da situação poder prolongar-se, o tempo acordado para a recolha de dados empíricos ser limitado e não conseguir obter os que me pareciam ser necessários e adequados para desenvolver a minha investigação.

O segundo dilema referido está intimamente relacionado com um outro: *apostar na proximidade versus "deixar para trás" a investigação*. A análise dos memorandos e das transcrições das sessões de trabalho revela-me que ainda surgem resquícios de ambos (2º e 3º) perto do final da primeira fase do projecto. No entanto, a principal opção que me permitiu começar a ultrapassá-los é referida na reflexão que a seguir apresento que, simultaneamente, pode clarificar o significado que atribuo à expressão que escolhi para designar o terceiro dilema:

> O investimento na proximidade está a dar os seus frutos. No entanto, continuo a sentir-me pouco à-vontade na colocação de questões relacionadas com as aulas que observo, sobretudo quando sinto que estas questões incidem em aspectos que considero menos conseguidos. (...) Este receio leva-me, por vezes, a deixar de lado algumas questões que penso serem importantes... É como se apostar na proximidade me leve a deixar para trás a vertente investigativa do meu trabalho. Ou seja, a capacidade de distanciamento que sinto ser necessária ao trabalho de investigação, parece estar a entrar em conflito com a proximidade que pretendo criar e com o meu envolvimento, que sinto ser esperado pela Anita e pela Rebeca, em termos, por exemplo, da preparação das aulas. (...) talvez seja de abordar, com frontalidade, o dilema com que me confronto... Dizer, claramente, que devido ao tema da minha investigação, tenho necessidade de lhes colocar questões sobre o trabalho que realizam para o poder compreender, mas recear que este questionamento seja sentido por elas como um questionamento que envolve juízos de valor negativos. Talvez seja de lhes pedir se têm alguma sugestão que possa ajudar-me a ultrapassar este dilema. (MST 15/16, pp. 5-6, 28/03/02)

Na sessão de trabalho subsequente àquela a que este memorando se refere, converso abertamente com Anita e Rebeca sobre os "meus dilemas" (2º e 3º). Esta conversa representou, para mim, um "salto" qualitativo muito significativo que me permitiu avançar na relação de confiança já construída com as professoras. Tornou-se mais simples e confortável participar, em pleno, nas sessões de reflexão. Deixei de me preocupar com o colocar, ou não, certas questões e, por isso mesmo, a minha autenticidade aumentou. Por esta via, aumentou, também, o meu contributo para o trabalho do grupo, a possibilidade das reflexões irem mais longe, as hipóteses de recolher dados mais relevantes e as oportunidades de aprendizagem para todas. Esse "salto" só foi possível, contudo, pela forma como Anita e Rebeca lidaram com o que de mim ouviram. Pela espontaneidade com que reagiram, mostraram-me que as minhas questões não as perturbavam e que, contrariamente, as ajudavam a reflectir, um aspecto que ambas valorizam[48]. Há uma curiosa intervenção de Rebeca que me proporcionou uma nova abertura para explicitar e reforçar as minhas perspectivas sobre a natureza do trabalho do professor, o facto das dúvidas, problemas e dilemas serem inerentes ao trabalho de ensino, como encaro a aprendizagem da profissão docente e as potencialidades que percepciono na reflexão sobre a prática. Simultaneamente, é reveladora de que não eram as vulnerabilidades que eu imaginava que estavam a ser desencadeadas pelas sessões de reflexão:

> E esse é o teu problema? (risos) (...) Eu pensei que fosse mais grave (risos) (...) Que nós não estivéssemos assim tanto... (risos) Que não conseguisses chegar a grandes conclusões connosco... (risos) Porque... Eu vejo que às vezes tenho montes de dificuldades em discutir certas coisas em concreto, dizer-te mesmo, percebes? (Rebeca, TST 17, pp. 2-3)

Há outros dilemas que experienciei, embora com uma intensidade diferente dos dois últimos que referi. Um surge na sequência de ter percepcionado que era importante para Anita que eu enviasse tópicos de reflexão e pode ser designado por *promover a reflexão versus silenciar as vozes das professoras ou enviesar a investigação*. A reflexão que incluo no memorando de uma sessão de trabalho

[48] Estas ideias podem ser apoiadas pela observação do que dizem nos extractos da transcrição da sessão de trabalho 17 que incluí na secção *Observação e reflexão sobre aulas* quando referi que algumas das minhas perguntas eram consideradas não fáceis pelas professoras.

elaborado pouco depois de se iniciar esta experiência, permite ilustrar as potencialidades que, na altura, reconhecia ao envio dos referidos tópicos, mas também os problemas que se me levantavam e como procurava fazer-lhes face:

> Em relação à Anita o envio de tópicos de conversa para as sessões de trabalho tem-se revelado importante na medida em que é a partir deles que a sua reflexão parece desencadear-se. Continuo é com a dúvida de se ao ser eu a sugerir tópicos, não estarei, involuntariamente, a fazer com que aspectos que são importantes para a Rebeca e para a Anita não ganhem visibilidade. Tento prevenir esta situação chamando explicitamente a atenção, no *e-mail* que envio, para a possibilidade e vantagem de ambas seleccionarem para análise outros tópicos, diferentes dos meus, que considerem relevantes. Convém estar com atenção a este aspecto... (MST 23, pp. 2-3, 24/05/02)

Este dilema foi sendo ultrapassado não só com a abrangência que foram ganhando os tópicos de reflexão à medida que o projecto se ia desenvolvendo, mas também com a minha constatação de que eles não impediam que surgissem, a partir das professoras, aspectos relevantes quer para si próprias, quer para o meu trabalho, sobre os quais incidia a actividade reflexiva. Por exemplo, no âmbito da reflexão sobre as aulas leccionadas por Anita a propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas* (capítulo VII) é Rebeca quem levanta uma questão particularmente significativa relacionada com o processo de partilha, registo e discussão das conjecturas formuladas pelos alunos.

Refiro, por último, um dilema que decorre do carácter obstrutor das técnicas e instrumentos de recolha de dados utilizadas em investigações que requerem a presença do investigador nas aulas dos professores. Confrontei-me com este dilema, que posso intitular como *não querer perturbar o trabalho da professora versus ter consciência de que a minha presença nas aulas perturba*, no caso de Anita.

Tínhamos acordado, ao negociarmos o primeiro plano de trabalho, que a nossa colaboração passava pela gravação, em vídeo, de aulas das professoras. Os alunos de Rebeca rapidamente se esqueceram da câmara de filmar. Passadas três ou quatro aulas já colaboravam comigo na montagem do equipamento e, com excepção de algumas brincadeiras pontuais que, rapidamente, se extinguiram, nem eu nem a professora considerámos que a máquina de filmar e/ou a minha presença fosse, para eles, um elemento de perturbação. O mesmo não aconteceu com os de Anita. Na primeira aula que gravei, na sua perspectiva, alteraram drasticamente o comportamento: o seu silêncio foi mais marcante e muitas das intervenções foram feitas timidamente e num tom de voz dificilmente perceptível pelos colegas e mesmo pela professora[49]. A situação manteve-se nalgumas das seguintes, o que a perturbava e lhe dificultava o avanço em termos curriculares. Por proposta sua, a que aderi, decidimos interromper as gravações durante algum tempo: “Não vês que eles ficam sempre um bocadinho mais calados? Eu tenho tendência a dar mais tempo. Deixa-me dar só um avançozinho e depois eu...” (TST 17, p. 25).

Esta intervenção de Anita foi, particularmente, inquietante para mim. Desde o início do projecto uma das minhas grandes preocupações foi não estorvar ou atrapalhar o trabalho das professoras. Sabia que a câmara de vídeo é um material, significativamente, mais obstrutor do que, por exemplo, o registo de notas de observação ou até mesmo gravações apenas em áudio. Tinha consciência de que tinha que lidar com esta questão, pois dado o tema da minha investigação considerava que os custos de a dispensar seriam muito elevados e poderiam mesmo comprometer o trabalho. No entanto, não imaginei que as suas consequências fossem tão significativas e prolongadas para os alunos e, por esta via, para Anita. Senti-me preocupada com as repercussões que o desenvolvimento do projecto estava a ter na sua acção, inquieta com a possibilidade de prosseguir, adequadamente, a recolha de dados em aulas suas, desassossegada com o que pressenti ser uma luta que a professora travava entre compromissos assumidos no grupo de pesquisa, compromissos que sentia ter em relação aos seus alunos e problemas passíveis de serem levantados pelos encarregados de educação caso ficasse um número significativo de tópicos curriculares por leccionar.

É da partilha destes meus sentimentos com Anita e Rebeca que, como referi na subsecção *A segunda fase do projecto de investigação colaborativa*, surge e começa a tomar forma a ideia de prolongarmos o projecto para a segunda fase. A abertura

[49] Esta aula é analisada no capítulo VII, segunda parte: *A propósito da tarefa Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*

das professoras a esta possibilidade sossegou-me em relação ao meu próprio trabalho e a confiança de Anita em que o comportamento dos seus alunos iria mudar com o passar do tempo, também. Perto do final da primeira fase do projecto, começam a notar-se alterações significativas. Sinto Anita satisfeita com o tipo de discurso que, por vezes, começa a surgir espontaneamente na turma, independentemente da câmara de filmar e/ou da minha presença. O meu dilema esbate-se, mas não desaparece completamente. No final do projecto, a professora refere que ainda persiste alguma inibição nos alunos. Considera, no entanto, que foi importante termos continuado a trabalhar para além do que tínhamos acordado:

> [Um projecto de colaboração] Requer continuidade no conjunto de tudo. (...) agora estou a referir-me a nós as duas, eu e a Rebeca. À medida que fomos trabalhando conseguimos ir ganhando prática na forma como analisávamos as aulas, já para não referir os acertos de linguagem inicial, para nos entendermos, a negociação de significados, combinarmos estratégias de análise, seleccionar os episódios para comentar. (...) não só para tu conheceres o professor e o trabalho do professor é preciso mais tempo — isso sem dúvida e a gente já comenta — mas também todas estas pequenas coisas, que não são pequenas, nada pequenas, mas que parecem ser mais... como é que hei de dizer, mais combináveis, como a própria linguagem — mas isso é a primeira coisa que tu tiveste o cuidado de trabalhar connosco, não é? (...) Todas estas coisas à medida que vão sendo vivenciadas vamos ganhando a tal maturidade, para já, em fazê-las, logo em princípio vamos fazendo melhor... Rentabilizamos as nossas coisas todas, depois discutimos as tarefas entre nós. Quer dizer, nós fizemos muito um trabalho de entreajuda também. E se fosse só o primeiro ano, por exemplo em relação a mim tinhas muito pouco de evolução, não é, para veres bem o trabalho. O primeiro ano foi muito diferente, não é? (...) [tempo] Até para as pessoas se calhar... quer dizer, além das outras partes, mas até para se perceberem... quer dizer... não sei... para pessoas que falam implicitamente como eu se calhar... (risos) (Anita, E3, pp. 92-3)

Este extracto termina com uma reflexão de Anita sobre a importância do tempo para as pessoas se entenderem e a referência ao seu modo implícito de falar. Noutras ocasiões refere-se a si própria dizendo: “Essa é outra mania, falar nas entrelinhas. Às vezes subentendo que os outros estão a perceber” (E2, p. 27). Frequentes são as referências a que “o facto de eu ser calada, é assim mesmo, normalmente” (E3, p. 36), ou então “Às vezes digo as coisas subentendidas... (risos)” (TST 15, p. 15). No início do projecto não conhecia esta professora e, naturalmente, não conhecia este seu jeito de ser que se prende, em particular, com o problema que mais inquietações me trouxe nos primeiros meses que, conjuntamente, trabalhámos: O que fazer para Anita participar mais intensamente nas conversações que ocorrem nas sessões de trabalho? Como conseguir que a sua voz tenha uma maior expressão?

Salvo poucas excepções, Anita nunca deixou de fazer com cuidado todos os "trabalhos de casa" acordados, o que me parecia indiciar o seu interesse pelo projecto. No entanto, os seus silêncios eram frequentes, por vezes as suas contribuições lacónicas e o gravador áudio parecia incomodá-la. Experimentei várias estratégias com o objectivo de tentar que o seu nível de envolvimento aumentasse. O que me parecia ser uma inibição provocada pelo registo magnético foi a questão mais simples de ultrapassar. Poucas sessões de trabalho, a banalização do gravador — ou seja, torná-lo claramente visível e, ao mesmo tempo, solicitar a ajuda das professoras para cuidar dos registo e verificar a sua qualidade nalguns momentos —, alguns diálogos sobre a quê e a quem se destinavam as gravações e a garantia de que não transcreveria conversas de índole pessoal, resolveram-na. Contudo, e sobretudo nalguns encontros, o problema mantinha-se o que me revelou que a sua origem principal não era esta. Com o passar do tempo, a situação modificou-se e consegui perceber que alguns dos seus silêncios se fundavam no que considera ter sido a sua maior e única vulnerabilidade ao longo do desenvolvimento do projecto:

> Eu vou dizer qual foi a minha maior vulnerabilidade e acho que tu deves ter sentido um bocado eu ir abaixo. Além das eleições na escola, eu escrevi aqui, era o facto dos alunos não falarem! A sério. Está aqui tudo escrito. Essa foi a minha maior vulnerabilidade. É que os meninos estavam muito calados ao princípio e isso dava-me conta dos nervos! Então eu pensei: "quer dizer, eu quero desenvolver um projecto de colaboração sobre argumentação e então? Se tiver que puxar a 'saca-rolhas', se eles ficarem em silêncio, como é que eu rentabilizo oportunidades de sala de aula?" E fui-me um bocado abaixo! (...) Eu nunca te disse nada, mas eu sei que tu notaste. E depois não te disse porquê. E não sei o que ficaste a pensar. Podias pensar mil coisas e não tinha nada a ver contigo. Tinha era a ver com aquela situação. (...) E eu nunca fui capaz de dizer porque sou assim muito introvertida, mas agora já não tenho vergonha (risos) (...) Na altura não sabia como é que te havia de dizer. (Anita, E3, pp. 23-4)

Anita desenvolve longamente esta ideia. O que diz revela a grande perturbação que lhe causava a situação dos alunos estarem "calados" (E3, p. 25), "muito direitinhos" (idem), "certinhos demais" (idem, p. 28), haver "tanto silêncio" (idem), face, em particular, ao compromisso que tinha assumido comigo: "E pensava: Mas agora o que é que eu faço? Queres ver que a Ana, comigo, não pode fazer nada? (risos) (...) Queres ver que não pode contar comigo? Combinámos uma coisa e agora não pode ser..." (E3, p. 26). Por um lado, não queria desistir do projecto porque estava a gostar de trabalhar comigo e com Rebeca e o tema interessava-lhe. Por outro lado, interrogava-se se não deveria interpelar-me neste sentido:

> Então como é que tu ias estudar a argumentação se ninguém falasse? Não era bem eu que ia desistir, eu já não sabia bem era se não havia de perguntar se o deveria fazer... Continuei a tentar que falassem nessas aulas, mas ao mesmo tempo, "será que tu poderias esperar se isso fosse acontecendo com os alunos"? Eles não falavam! (risos) Ainda bem que não desisti! Às tantas estavas tu a pensar: "será que ela está a querer ir abaixo?" E eu a pensar: "será que ela não está a ir abaixo comigo?" Porque se eles não falassem, como é que tu estudavas? Explica-me! (Anita, E3, p. 30)

Dei-me efectivamente conta, como Anita refere, de que algo a perturbava. Conversámos algumas vezes a este propósito. Neste processo, a minha sensibilidade emocional foi importante, não só para suspeitar da relevância que tinha, para si própria, aquilo que a inquietava, mas também para delinear modos de abordar a questão. Quanto ao conteúdo dos factores de perturbação, apenas consegui perceber que a escola atravessava uma fase complicada em que ela estava intensamente envolvida, que os seus compromissos profissionais eram muitos e que estava com dificuldades em gerir o seu tempo de modo a responder a todos de uma forma satisfatória para si. Dei-me conta, também, que Anita tinha cuidado comigo. Recorrentemente, salientou que não devia preocupar-me, aspecto que reforça na segunda entrevista, ou seja, cerca de nove meses após o início do projecto. Por exemplo, aborda, por sua iniciativa, a particularidade de ser "caladinha" e tenta sossegar-me para que não estranhe.

Os extractos que atrás apresentei fazem parte de uma conversa que tivemos em Março de 2003. Tinham passado 16 meses desde que nos conhecemos. Esta conversa é rematada por Anita da seguinte forma: "Esta minha preocupação até faz parte de uma coisa que tu podes pôr no início, que eu nunca confessei mas confesso agora. Faz parte do início do nosso trabalho" (E3, p. 75). Este comentário torna visível que o tempo foi importante para ser capaz de atingir um patamar na relação de colaboração que lhe permitisse partilhar comigo uma experiência que, para si, foi, particularmente, inquietante e dilemática. Esta ideia ganha força e expande-se pela observação de uma reflexão escrita que elabora e me envia por sua iniciativa, suscitada pela leitura da transcrição de um extracto da segunda entrevista. Esta reflexão ilustra, claramente, as diferenças existentes entre o que verbalizou no momento em que foi realizada e aquilo que mais tarde foi capaz de expressar. Ilumina, em particular, o esforço emocional que, solitariamente, fez para ultrapassar aquilo que a perturbava. Reforça a ideia de que a par da qualidade da relação interpessoal que se estabelece entre parceiros colaborativos, a dimensão temporal é essencial para que esta relação se aprofunde ao ponto de ser possível partilhar problemas não antecipados, sobretudo quando eles põem em jogo aspectos que vão bem para além da cognição:

> Relativamente à nossa conversa sobre o desenvolvimento do projecto e ao "às vezes sou caladinha, especialmente quando estou mais cansada. Não estranhes isso. Eu sei que as pessoas às vezes estranham, mas infelizmente, eu sou assim quando estou mais cansada. Nunca tenhas problemas com isso" [extracto de transcrição da segunda entrevista, E2, p. 14]. Esta era a parte que até à altura fui capaz de expressar e que é um sintoma de cansaço (quanto mais cansada, mais me calo). Realmente isto era o que sentia fisicamente, resultante da fase conturbada que atravessei na escola, o estar a ter muita dificuldade em conseguir fazer o que combinávamos (o que me fazia sentir mal porque não fazia o que pretendia fazer com o pormenor que queria) e aliado a tudo isso tinha mais um factor que acentuava o meu cansaço e me preocupava, como só depois mais tarde explicitei, que era o facto dos alunos estarem caladinhos (mais calados do que nas outras aulas por terem vergonha ou quiçá se eles achavam que deviam ser assim nas aulas filmadas). Referia-o muitas, muitas, muitas vezes como dificuldade. Creio que mais uma vez, implicitamente, estava a tentar transmitir que isso me preocupava em termos do projecto pois se este se preocupa com o papel do professor no envolvimento dos alunos em argumentação e os alunos não falam... Mas esta dificuldade estava também a provocar-me mais cansaço/tristeza exactamente por querer desenvolver este tipo de trabalho. Porquê? Porque tenho oportunidade de discutir aulas com outras pessoas, de me ver, de aprender, de me conhecer melhor (nesta altura não me recordo se já tinha acontecido, mas por exemplo, sei que tomei consciência de normas que implicitamente acabavam por boicotar o que defendia explicitamente), de contactar e discutir teorias de outros autores e as aplicar, de aumentar o meu leque de estratégias pedagógicas visando os meus objectivos, de analisar alternativas a situações concretas, ... Não o explicitei aqui, só mais tarde e creio que é precisamente por isso me entristecer. Portanto, eu falo abertamente sobre aspectos analisados, isto é, nesta aula vimos isto ou aquilo,

> porquê, o que se poderia ter feito... vivencio isso com naturalidade. É isso que se espera quando pretendemos discutir aulas. Mas isto envolvia mais do que os aspectos que se viam e eu nem sequer sabia exactamente porquê. Podia suspeitar mas mais nada. Uma dificuldade vivida com sentimento, envolve também a forma como eu o sentia, que em mim é mais difícil de expressar (emoção- quando me entristece, quando me alegra creio que expresso explicitamente). Mas, agora já o disse – portanto evoluí em termos de manifestar o que sinto o que é muito bom (esta parte leva sempre mais tempo em mim). De tanto me entristecer tive receio que me faltassem as forças. Mais, se o expressasse explicitamente dá-me a ideia que ficaria mais sensível a esse facto, mas sou persistente, e tentei ultrapassar sozinha. De resto, não existiu mais nenhum aspecto que me entristecesse. Porque agora já fui capaz de o explicitar, também seria capaz de o fazer – o que me custa é a primeira vez. Agora sou capaz de reconhecer que podíamos, em conjunto, tentar dar a volta ao eles estarem mais calados, foi pena, e esta era a minha vulnerabilidade (e única). (DEA, 23/04/03, pp. 2-3)

O que mais inquietou Rebeca, ao longo do desenvolvimento do projecto, foi diferente do que perturbou Anita. No entanto, tal como aconteceu com esta professora, relacionou-se com características de ordem pessoal que envolvem a dimensão afectiva: “As vulnerabilidades é a tal história de me ver filmada... o ser filmada inicialmente” (E3, p. 33).

Quando delineei a primeira proposta de plano de trabalho para o desenvolvimento do projecto, imaginei que a gravação das aulas poderia ser um problema para as professoras. No entanto, considerei que, fundamentalmente, se enraizaria no seu desconhecimento de mim e/ou no facto da sua acção ser analisada por outras pessoas. Uma das razões que esteve na base das possibilidades de acção e respectivas hipóteses de concretização incluídas na segunda etapa da primeira fase do projecto, foi, como anteriormente referi, a tentativa de evitar ou, pelo menos, minimizar este problema. Aprendi, através de Rebeca, que “as coisas” não são assim tão simples.

Antes de mais comecei por me dar conta de que o facto de uma aula sua ter sido gravada por um colega que conhecia bem e com quem se sentia à-vontade, não obviou a existência de fortes constrangimentos para si:

> Eu depois a partir daí acho que o ritmo não foi bom. Depois acabou por ser muito lento. Não consegui gerir bem aquilo. Não sei se era por estar a ser filmada, mas houve uma altura e acho que foi mais ou menos a meio, que a minha... Depois para o fim acabei outra vez por me entusiasmar e achei que o

> tempo foi pouco... Mas estava com ansiedade...Queria que as coisas se passassem mais depressa, que a aula acabasse e nunca mais acabava e eu acho que foi mais ou menos aqui a meio. Comecei a não conseguir gerir bem os tempos. A sério!... Tive essa sensação... Estava ansiosa, estava nervosa... (Rebeca, TST 9, pp. 1-2, comentário apresentado a propósito da aula gravada pelo colega)

Na altura em que escutei este comentário, interroguei-me sobre alternativas possíveis à gravação da aula pelo colega. Pura e simplesmente eliminá-la antes de iniciarmos aquelas que seriam o núcleo central do desenvolvimento do projecto, não me parecia a melhor opção. Na estratégia de aproximação sucessiva às práticas de Anita e Rebeca, a discussão a *propósito de e sobre* esta aula, teve o seu papel que não me parece poder ser substituído por qualquer uma das outras actividades que desenvolvemos. Também não me parecia uma boa hipótese um registo apenas em áudio, sobretudo sem a presença de um observador na aula. Esta via empobreceria fortemente, ou inviabilizaria mesmo, a análise de alguns dos seus aspectos feita a partir da observação do vídeo. Por exemplo, não seria possível debruçarmo-nos, do modo como o fizemos, sobre as relações entre as representações feitas no quadro pela professora à medida que o discurso se desenrolava, a actividade matemática desenvolvida e dificuldades com que os alunos parecem ter-se confrontado. Outra modalidade em que pensei foi ser eu a elaborar sobre a aula notas de observação detalhadas. É verdade que exigem grande atenção e esforço. No entanto, como me tem mostrado o acompanhamento da prática pedagógica experienciado no âmbito das funções profissionais que desempenho, não são impossíveis de fazer e podem proporcionar trocas de ideias significativas. Teria a vantagem de evitar a câmara de vídeo, o aspecto que mais parecia perturbar Rebeca. O inconveniente é que exigiria a minha presença na aula — precisamente o que queria evitar — além de que há "nuances" do discurso oral, por vezes importantes quando está em causa o ensino da argumentação matemática, que, involuntariamente, me poderiam escapar por mais cuidados que tivesse. Coloquei a hipótese da perturbação ser inferior se o horário de Anita lhe tivesse permitido ser ela a responsabilizar-se pela gravação. Afinal, era amiga de Rebeca e, simultaneamente, um elemento do grupo de pesquisa. Presentemente considero que esta via não teria eliminado a vulnerabilidade experienciada por esta professora. As suas palavras pronunciadas algum tempo depois da análise da aula gravada pelo colega, podem contribuir para iluminar as razões em que me fundamento para expressar esta convicção:

> Eu agora vou ser sincera. Agora já não, mas ao princípio a minha maior ansiedade... agora já não é tanto. Agora já estou mais habituada porque já foste algumas vezes às minhas aulas, mas nas primeiras aulas ficava muito nervosa por ires lá filmar e gravar. (...) Se fosses só e não filmasses acho que era diferente (risos). Porque nós temos consciência que cometemos sempre erros. Eu pelo menos tenho consciência disso. Sou um bocado crítica também. Apesar de ser impulsiva sou muito crítica em relação às coisas que faço e detecto sempre montes de coisas que faço mal. E é um bocado aquela ansiedade de nós depois vermos e sermos... (...) é mesmo nós próprios confrontarmo-nos com os nossos erros mesmo que mais ninguém visse. Não sei se estás a perceber? (risos) (...) Eu estou ali a tomar consciência... dói um bocadinho, não sei se percebes. É mais só isso. Mas agora já vou lidando melhor com isso. (Rebeca, ST 17, p. 4)

O facto de Rebeca poder continuar a confrontar-se consigo própria através da observação dos registos em vídeo de aulas suas, parece tê-la conduzido a uma maior aceitação de si própria: a sua imagem e voz deixam de a incomodar e a observação e tomada de consciência daquilo que não é perfeito na sua acção deixa se ser, para si, uma experiência penosa. No final da primeira fase do projecto começa a encarar com naturalidade esta vertente da nossa actividade:

> As minhas aulas não são perfeitas e há montes de coisas que falham e que é normal falharem, não é? (...) Eu também vou detectando essas coisas mesmo em mim, e tem um quê de difícil estar a ver e a analisar e a pensar não era aquilo que eu devia ter feito, se calhar não fiz o melhor, se calhar devia ter feito outra coisa. Isso também me custava um bocado no princípio, depois fui evoluindo. (...) Depois para o fim é que já começou a ser natural, percebes? E a imagem começou a deixar de me preocupar mesmo e a voz também não me irritava nada, que era uma das coisas que me irritava ao princípio… e mesmo as outras coisas também começaram a ser naturais, mas ao princípio custava-me. (...) não era por vocês analisarem as minhas aulas, não é os outros tomarem consciência de mim. Acho que é eu própria tomar consciência de mim, acho que tem mesmo a ver comigo. (...) acho que é uma transformação mesmo pessoal. Tem a ver com o meu feitio. (Rebeca, E2, pp. 13-4)

Talvez não exista, para qualquer professor, uma boa solução para as fases iniciais da gravação em vídeo das suas aulas, mas apenas soluções menos más que têm que ser delineadas tendo em conta o modo de ser de cada um. Talvez faça parte da natureza do ser humano sentir-se, de algum modo, intimidado quando se confronta com algo de novo que percepciona como passível de fazer emergir e tornar visível, mesmo que seja apenas perante si, o que considera serem "erros" da sua responsabilidade. Era, precisamente, aqui que se enraizava o problema de Rebeca com "o ser filmada inicialmente". A grande questão é como cada um pode aprender a lidar, serenamente, com as imperfeições do agir que, na minha perspectiva, são inerentes à própria condição humana. Esta serenidade, para Rebeca, veio de ter o tempo que, para ela, foi necessário para fazer um trabalho consigo e para si que originou "uma transformação mesmo pessoal".

Encerrando o capítulo. Descrevi e analisei neste capítulo, organizado em quatro secções principais, o processo de desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa que se desenrolou ao longo de dois anos lectivos e incluiu duas fases com características comuns e também diferenciadas. Na primeira secção, abordei a constituição do grupo de pesquisa, expressão utilizada para designar a equipa do projecto, focando-me, em particular, no primeiro contacto que estabeleci com as professoras para averiguar do seu interesse pela participação no projecto e nos cuidados que tive para delinear a conversa que tivemos.

A segunda secção focou-se na criação de condições para o desenvolvimento do projecto e, em particular, no conteúdo dos planos de trabalho organizadores da actividade a realizar em cada uma das duas fases e sua justificação. Estes planos facilitaram a organização do trabalho mas foram suficientemente abertos para permitir negociações iniciais e continuadas. Referi, também, contactos estabelecidos com os vários órgãos das escolas em que as professoras exercem a sua actividade, bem como com encarregados de educação dos alunos envolvidos para obtenção das necessárias permissões à gravação de aulas.

Na terceira secção, a mais extensa, centrei-me nos campos em que houve colaboração, nas actividades desenvolvidas em cada um dos campos e suas relações, em contribuições individuais e colectivas para a concretização destas actividades, na articulação entre os papéis dos diversos elementos do grupo de pesquisa e em principais alterações introduzidas durante a trabalho conjunto. Todos estes aspectos se prendem com a dinâmica colaborativa, embora esta dinâmica vá para além deles. Com efeito, a palavra “dinâmica” está associada a movimento ou acção — e, por esta via, a actividade, evolução ou transformação —, a processos de interacção entre membros de um grupo, a forças — consonantes ou opostas, mais ou menos intensas — que se entrecruzam no decurso dessa acção. Nesta medida, dinâmica colaborativa prende-se, também, com a relação entre as pessoas que integram o grupo de pesquisa ao longo do desenvolvimento do trabalho. Este último aspecto é abordado na quarta secção que finaliza o capítulo e em que me foquei na relação de colaboração desenvolvida entre os elementos do grupo de pesquisa, através da análise de aspectos relativos à construção desta relação e de situações de carácter problemático com que as professoras ou eu nos confrontámos.

Capítulo VI

-

Rebeca

Este capítulo é essencialmente dedicado ao trabalho desenvolvido por Rebeca a propósito de duas tarefas através das quais procurou envolver os seus alunos em actividades de argumentação matemática: *Números em círculos* e *À procura de dízimas finitas*. As aulas relativas a estas tarefas foram seleccionadas de acordo com os critérios indicados no capítulo IV focado na metodologia de investigação. Organizo este capítulo em três partes principais. A primeira centra-se numa breve apresentação de Rebeca e dos contextos de desenvolvimento do projecto. Refiro traços da minha imagem sobre a pessoa e a professora, aspectos do seu percurso profissional, perspectivas sobre argumentação matemática com que iniciou o trabalho que desenvolvemos e dificuldades que a incorporação desta actividade nas suas práticas lhe levantava. Sinteticamente, caracterizo, também, a escola em que trabalha e a turma envolvida no projecto. A segunda e a terceira partes, as mais extensas, são dedicadas a uma análise detalhada das quatro aulas em que foram exploradas as tarefas supra mencionadas.

Traços de um retrato

A pessoa, a professora

Quando iniciámos o projecto, Rebeca tinha pouco mais de 30 anos e o seu filho perto de três. Leccionava desde 1997/98, o seu terceiro ano de ensino, na escola onde ainda hoje desempenha funções docentes e com que mantém "um laço afectivo muito grande" (E1, p. 4, 23/11/01): foi aí aluna desde o 7º ao 12º ano de escolaridade. É casada e habita num acolhedor apartamento onde quase se pode ouvir o toque que assinala o começo de cada aula da "sua escola".

As primeiras impressões que retive de Rebeca, e que mantenho ainda hoje, são a informalidade nas relações, a facilidade de comunicação, a franqueza e a simpatia. Tem uma silhueta esguia, veste-se de um modo cuidado mas juvenil e no dia-a-dia apresenta-se não maquilhada. É intuitiva, perspicaz, com sentido crítico, tem sorriso fácil e resposta pronta. Está na vida de um modo optimista e sempre disponível para tirar partido das experiências em que se envolve ou que se lhe oferecem viver, mesmo que, por alguma razão, a façam confrontar-se com dificuldades ou intua que estas poderão vir a surgir. Esta ideia transparece, por exemplo, nas considerações que tece sobre o porquê de participar activamente em Encontros Nacionais de Professores de Matemática apesar de lhe ser penosa a exposição pública:

> É mais forte a tal coisa do ter que me expôr... Que me custa sempre. (...) Só que acho que é importante e se calhar não excluo a hipótese de outras coisas e de ir a outros sítios. Mas custa-me... É o que eu te digo. Todas as coisas que são difíceis e que eu às vezes me tento cortar a elas, mas que depois não consigo porque a outra parte do achar que é importante predomina, fazem-nos evoluir, sem dúvida nenhuma. Todas as dificuldades. Mas isso é uma perspectiva geral que eu tenho sobre a vida. Todas as dificuldades que temos, se as conseguirmos ultrapassar, fazem-nos crescer e evoluir e nesse aspecto são importantes. Às vezes não me apetece ter essa vontade de fazer esse esforço, porque é um esforço, mas faço porque acho que é importante. (E3, p. 39, 12/03/03)

A mesma ideia transparece, também, na frequência com que Rebeca, nas sessões de reflexão sobre as aulas, "extrai" aprendizagens e coloca questões a partir de acontecimentos que a surpreendem, a inquietam ou lhe levantam dúvidas. A título de exemplo, apresento uma das intervenções que faz num dos encontros do grupo de pesquisa quando, a propósito da tarefa *Jogo da soma e do produto*[50] proposta pela colega, se interroga e a interroga sobre se terá, ou não, ficado claro para os alunos o significado de jogo justo e porque é que o jogo do produto não se enquadra nesta categoria. Do seu ponto de vista, era importante haver um consenso sobre este significado e uma compreensão partilhada sobre o que permitia classificar o jogo do produto como "não justo", antes de passar a uma nova fase da aula:

> Eu acho que o importante é ver o que podemos tirar daqui para outros casos. A meu ver isto é um exemplo de uma coisa que acontece muito e que eu também já constatei nas minhas aulas. Conforme nós vamos analisando mais vamos vendo mais coisas que, se calhar, antes já aconteciam mas de que nós não nos apercebíamos, não é? Vamos vendo com outros olhos. (...) Isto agora é uma coisa mais geral que eu estou a tirar daqui. É a minha opinião. Em qualquer situação de discussão, antes de passarmos, de avançarmos um nível, devemos fazer um ponto de situação do que fizemos até ao momento e lançar, muito claramente, o que é para fazer a seguir. (...) Marcar, ficar bem vincado. (TST 38, p. 8, 23/11/02)

Como ambos os extractos revelam, Rebeca transporta para a profissão o olhar positivo com que, globalmente, enfrenta a vida, tal como transporta a energia e o dinamismo que a caracterizam. Gosta de ser professora e, enquanto aluna, a Matemática era a sua "disciplina preferida" (E1, p. 12). Estudava-a sem "fazer muita coisa do mesmo género" (idem): "Sabia seleccionar exercícios e problemas diferentes e era assim que eu estudava" (idem). Concluiu a licenciatura em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e talvez a sua atracção pela inovação pedagógica tenho sido alimentada pelo estágio educacional desta licenciatura que constituiu, para si, uma experiência intensa e muito significativa: "gostei muito do ano de estágio (...) Fizemos muitas coisas além de dar aulas... Eu entrava às oito e meia da manhã (...) e chegava às oito e tal da noite (...) tínhamos muitas actividades também extracurriculares" (idem, pp. 2-3).

---

[50] Estes jogos são jogados por duas pessoas, a "par" e a "ímpar", usando dois dados cúbicos em cujas faces existe um número de pintas que varia de 1 a 6. Em cada jogada os dados são lançados simultaneamente. No jogo da soma, adicionam-se os números correspondentes às pintas existentes nas faces que ficam viradas para cima e no do produto multiplicam-se. Consoante o resultado for par ou ímpar, assim o jogador "par" ou o jogador "ímpar" marca um ponto. Ganha quem obtiver a maior pontuação ao fim de um tempo ou número de jogadas predefinidos. O desafio que Anita lançou, depois dos alunos terem jogado durante algum tempo, foi: Como transformar o jogo do produto num jogo justo se houver liberdade para alterar os números de pintas dos dados como se quiser?

As conversas que tivemos sobre os seus poucos anos de ensino, permitem constatar que Rebeca se empenhou em tarefas múltiplas, de natureza diversa, envolvendo públicos variados e não restritas aos alunos ou à sala de aula. Refere-se ao "problema do mês, a preparar os alunos para as Olimpíadas da Matemática, a exposições interactivas, a concursos de jogos de reflexão" (E1, p. 5), aos projectos com que concorreram ao IIE e à *Ciência Viva*, à participação na criação e dinamização do Laboratório de Matemática da escola, aos cursos de formação para professores que concebeu e concretizou com alguns colegas e às sessões que realizou em ProfMats. Entusiasma-se com a utilização educativa de tecnologias de informação e comunicação e costuma preparar, para os seus alunos, fichas de trabalho sobre tópicos matemáticos diversos que apelam à utilização do computador. Utilizam este recurso frequente e regularmente ao longo de todo o ano lectivo. Conversa também sobre o seu trabalho no âmbito das direcções de turma que tem tido, sobre a participação no Conselho Pedagógico e sobre o cargo de coordenadora dos directores de turma. O desempenho de cargos, contrariamente ao que aconteceu com todas as outras actividades que referiu, não a faz vibrar, embora reconheça que é importante ter uma participação activa, nomeadamente no Conselho Pedagógico. Esta ideia transparece nas palavras que pronuncia a propósito de um dos resultados da sua participação no projecto de investigação colaborativa:

> Fiquei foi ainda com menos vontade de participar em coisas de cargos e coisas assim do género. (...) Porque com isso perde-se muito tempo (risos). É verdade! Fiquei com mais vontade ainda de reflectir e de pensar e de fazer coisas deste género do que estar a ocupar o meu valioso tempo com cargos e com coisas que não me agradam tanto, que me trazem uma responsabilidade de um carácter que eu não gosto, percebes? (...) Sei lá, estar no Pegadógico também é importante, também é importante participarmos aí e darmos a nossa opinião, mas ainda fiquei com menos vontade de ter um papel tão activo nesse tipo de coisas. (E3, p. 41)

Rebeca gosta de partilhar e discutir o que vai fazendo e aprendendo. Por exemplo, antes do Laboratório de Matemática da sua escola ter sido criado, mas existindo já alguns computadores, associou-se a dois professores com quem organizou e concretizou um conjunto de "sessões de trabalho para o *Sketchpad*" (E1, p. 5) destinadas a outros colegas. Paralelamente, destinavam-se também a si própria, na medida em que a experiência lhe proporcionava uma oportunidade de aprofundar os seus conhecimentos: “Fizemos os três, eu a Anita e o (...) [referência a outro colega], algumas fichas de trabalho e estivemos a trabalhar com eles. Portanto, com os nossos colegas aqui da escola para perceber melhor como é que o programa funcionava” (idem). Este mesmo gosto é uma das razões que a leva a envolver-se no projecto de investigação colaborativa: “temos uma outra pessoa com quem trabalhar e com quem preparar as coisas, não é? É uma situação privilegiada... (...) É o poder discutir com outra pessoa, o partilhar ideias” (idem, p. 14).

Quando iniciámos o projecto, Rebeca referiu que um dos aspectos que, em termos profissionais, mais a entusiasma é “o preparar aulas, é o procurar coisas diferentes, para ver como é que eles [os alunos] chegam” (E1, p. 9). Um bom professor, do seu ponto de vista, “essencialmente é aquele que tem preocupação com a profissão e com o modo como vai exercer. Isso já é meio caminho andado para ser bom professor, bom profissional, não é? Preocupar-se, preparar o seu trabalho...” (idem, p. 13). Neste contexto, considera relevante atribuir “importância aos raciocínios que os seus alunos fazem” (idem, p. 12), permitir-lhes “terem um papel activo” (idem), possibilitar-lhes a abertura para “tentarem descobrir coisas por eles próprios e explicarem os raciocínios que fazem...” (idem), e “tentar usar algumas estratégias diversificadas, explicar coisas de diversos modos” (idem, p. 13).

Quando conheci Rebeca, para si argumentação matemática “era os miúdos terem que justificar os raciocínios que fazem” (E1, p. 8), ou seja, não se limitarem, apenas, a apresentar respostas “mas explicarem como é que eles chegam a determinados resultados (...) explicar o porquê, porque é que é assim e não é de outra forma” (idem). Incorporá-la nas suas práticas significava, por exemplo, solicitar aos alunos que “expliquem como fizeram” (E1, p. 9) quando “resolvem um exercício ou quando vão corrigi-lo ao quadro” (idem) ou solicitar-lhes nos testes “para justificarem os porquês, os raciocínios” (idem). Rebeca fundamenta a importância que atribui a esta vertente do raciocínio matemático evocando a sua experiência de aluna:

> Eu dou muita importância a isso, talvez porque eu tenho um bocado de dificuldade em fixar coisas que não percebo porque é que funcionam e enquanto aluna tentava sempre perceber os porquês. Se não percebesse os porquês, não conseguia fixar, mesmo a Matemática. (E1, p. 8)

As experiências que, neste âmbito, foi fazendo ao longo do seu percurso profissional, fizeram-na confrontar-se com dificuldades diversas. Algumas destas dificuldades estão, directamente, associadas ao seu próprio modo de agir:

> Se eles não estão a explicar de uma forma clara (...) tenho alguma dificuldade em me controlar e não meter a colher... (risos) (...) Às vezes tenho dificuldades em que eles próprios queiram explicar aquilo que fizeram. (...) Eles dizem: *Olhe, fiz porque fiz, foi o que me veio à cabeça...* Portanto... e não querem, não querem, não conseguem, ou não se esforçam, não sei... (E1, p. 10)

Outras dificuldades prendem-se, mais de perto, com a actividade dos alunos. Quando se trata de testes têm, segundo Rebeca, "uma certa dificuldade em escrever os porquês..." (E1, p. 11). Independentemente destas ocasiões, pensa "que têm dificuldades, eles próprios, em expressar aquilo que pensam..." (idem, p. 10). Considera, também, que mesmo não penalizando o erro, alguns alunos receiam apresentar explicações:

> Enquanto que uns querem explicar mesmo, outros têm medo de não estarem a dar a melhor explicação, de não ser aquilo que eu estou à espera deles, por exemplo... (...) Apesar de eu... não penalizo nada o erro, quando eles tentam explicar as coisas... (E1, p. 11)

Movendo-se, em termos profissionais, pelo desejo de melhorar as suas práticas e considerando que a argumentação matemática é relevante quando se trata de equacionar o ensino da Matemática, Rebeca quis participar no projecto de investigação colaborativa para "compreender esse fenómeno (...) para poder melhorar" (E3, p. 31). Talvez seja neste mesmo desejo, acalentado há já algum tempo quando iniciámos o trabalho conjunto, que se enraíza, também, a sua vontade de frequentar um curso de mestrado na área da Didáctica da Matemática, o que vem a concretizar como referi no capítulo V. Com efeito, passado pouco tempo de iniciar este curso, começa a mobilizar ideias aí discutidas, articula-as com a experiência de participação no projecto e usa-as para repensar aspectos das aulas que lecciona ou observa, no sentido de fazer com que o seu trabalho vá mais ao encontro do que considera poder permitir aperfeiçoá-lo. O extracto que a seguir apresento permite apoiar esta ideia:

> O mestrado tem-me feito reflectir mais sobre isto [pedido de relatórios aos alunos]. Nós não pedimos pelo trabalho que nos dá, mas os relatórios pedidos logo desde o início, mesmo individuais, são muito importantes, para os alunos reflectirem sobre o trabalho que fazem. Só que isso representa mais trabalho, mas é importante. E tenho reflectido também mais sobre outras coisas que podem correr melhor e que a gente há-de falar depois quando estivermos a ver esta aula. (TST 37, p. 2, 31/10/02)

Contextos de trabalho

A escola de Rebeca

Rebeca exerce a sua actividade docente numa escola do ensino secundário já bastante antiga, composta por pavilhões enquadrados num espaço muito amplo e em que não existem problemas de sobrelotação. Actualmente é frequentada por cerca de 600 alunos, que se distribuem por turmas que vão do 7º ao 12º ano de escolaridade, número que tem vindo a diminuir "drasticamente" (E4, p. 2, 04/08/03) nos últimos tempos. Segundo a professora, tem "um ambiente bom" (idem) e há "alguma dinâmica em termos de escola" (idem, p. 3), embora esta tenha vindo a decrescer: "acho que já houve mais há uns anos atrás, porque, por exemplo, as pessoas também vão ficando um bocado mais desanimadas com o número de alunos cada vez menor..." (idem). As características deste ambiente transparecem, por exemplo, na sala de professores em que a conversa é animada e informal e onde, rapidamente, me senti integrada. A minha primeira visita a este mesmo local revelou-me, por outro lado, um espaço funcional e acolhedor onde a vista pode espraiar-se por relvados amplos e cuidados.

O corpo docente é estável e integra, actualmente, cerca de 80 professores. Em 2002/2003, o Departamento de Matemática era constituído por oito, número que diminui no ano lectivo seguinte: "agora com a reforma de uma colega vamos passar a ser sete... Portanto, somos muito pouquinhos e ainda assim as coisas estão más... os horários foram mesmo rés-vés..." (E4, p. 2). Esta situação agrava-se noutros grupos disciplinares em que "há horários zero" (idem).

A distribuição de horários pelos docentes processa-se respeitando a classificação profissional. Rebeca, sendo uma das mais jovens professoras de Matemática, situa-se muito perto do final da ordenação o que tem como consequência serem-lhe reservadas, apenas, turmas do 3º ciclo do ensino básico. Há colegas que preferem as do ensino secundário e a professora aceita a situação com naturalidade. As considerações que tece sobre o bom ambiente que existe entre os docentes de Matemática revelam, além disso, que apesar da norma estabelecida, as escolhas não são impostas a qualquer preço:

> Mas quanto ao relacionamento acho que o relacionamento é muito bom entre todos e as pessoas até são humanas. Não há aquela coisa de... na escolha de horários... apesar de... Pronto, é óbvio que os mais velhos escolhem aquilo que preferem. À partida não vão dar básico (...) Mas não é como em certos grupos em que as pessoas chegam e dizem: "eu quero isto e não há mais nada, não me interessam os outros". No nosso grupo as pessoas, dentro daquilo que preferem, tentam não prejudicar demasiado os outros. É um bom ambiente, o do grupo de Matemática. Por acaso é. (E4, pp. 2-3)

O grupo de Matemática tem uma sala própria onde funciona o Laboratório de Matemática. Referindo-se, implicitamente, aos projectos apresentados ao IIE e *Ciência Viva* que vieram a obter financiamento, Rebeca salienta que "por causa daqueles concursos" (E4, pp. 1-2) dispõem de "bons recursos, apesar de tudo (...). Temos bastantes computadores e também outro tipo de materiais... sensores, calculadoras... " (idem).

A turma do projecto

A professora trabalha com a turma envolvida no projecto desde o 7º ano de escolaridade. No 8º ano, quando o iniciámos, era composta por 20 alunos, sendo a razão entre o número de rapazes e de raparigas aproximadamente igual a 1. No 9º ano a ordem de grandeza da razão mantém-se, dois destes alunos deixam a turma e são incorporados cinco novos elementos. Destes, apenas um, Susana, tinha "interesse e motivação e trabalho" (E4, p. 4). Os restantes ficaram retidos por falta de aproveitamento e/ou número excessivo de faltas. O grande desinteresse destes últimos acrescido das perturbações que a sua quase totalidade introduzia nas actividades das aulas, "o facto de serem aulas de 90 minutos" (E3, p. 2) localizadas num horário não favorável à concentração — "ser do meio dia à uma e meia, que é a hora de almoço" (idem) — e, além disso, comportamentos de certos alunos que Rebeca associa à idade da adolescência, contribuíram, na sua perspectiva, para que no 9º ano surgisse na turma um "factor que não existia o ano passado (...) Passaram a estar mais conversadores..." (idem).

Mesmo considerando que desde que começou a trabalhar com a grande maioria dos alunos, a turma "piorou" (E4, p. 3) no que respeita ao comportamento, a professora diferencia-a, pela positiva, do padrão que caracteriza a generalidade dos alunos que frequentam a sua escola:

> Os alunos da escola, de uma maneira geral, são fraquitos... não quer dizer que tenham assim muitas dificuldades... alguns têm, pronto. Mas não são alunos muito motivados... São miúdos que vêm de meios que... não têm grandes aspirações. Ou seja, não é bem motivados... se calhar não estarem motivados resulta de eles não terem grandes aspirações para o futuro deles. Com uma boa parte deles acontece isso. (...) Esta turma [do projecto] é das poucas melhores. Aliás este ano era esta e o 7ºA, do básico. (...) mas no secundário os professores também se queixam! Dizem que, pelo menos, há uns anos não era assim, que eles eram mais interessados e que agora, mesmo no 12º ano — que era um ano em que nunca havia problemas nenhuns — não se interessam. (E4, p. 3)

As aulas em que estive presente, as animadas conversas a que assisti antes ou após o seu início, o que escutei de Rebeca durante as entrevistas, nas sessões de trabalho ou noutros diálogos mais informais, revelaram-me que conhece muito bem os alunos e que estes se sentem com à-vontade para exprimirem o que pensam, quer diga respeito, ou não, a aspectos relacionados com o ensino e aprendizagem da Matemática. No decurso do projecto interroguei-me, várias vezes, se o clima de liberdade responsável que tenta imprimir às relações entre todos os elementos da turma, não terá contribuído, também, para a facilidade de relacionamento que eu própria experienciei, em pouco tempo, com os seus alunos.

Rebeca tece considerações de vários tipos sobre cada um dos alunos. Estas considerações vão desde características de natureza mais pessoal, referências a ambientes familiares e suas repercussões no modo de estar na escola, modos como estudam Matemática, dificuldades particulares relacionadas com a aprendizagem de tópicos específicos, natureza das relações interpessoais que estabelecem com colegas, cuidados que certas particularidades lhe exigem, evoluções ou retrocessos que tem percepcionado e níveis de envolvimento, motivação e participação nas aulas de Matemática. Com o objectivo de clarificar e apoiar estas ideias, apresento extractos de comentários seus que surgem quando, durante a quarta entrevista, lhe solicito que me fale sobre a turma. Contrariamente ao que aconteceu com outros tópicos que abordámos — em que a professora se socorreu de notas escritas que, previamente, elaborou para a ajudarem a reflectir — para a longa conversa que tivemos sobre este assunto, nas suas palavras, "não escrevi nada (...) porque sei de cor e salteado" (E4, p. 1).

Apoiando-se na ordenação alfabética dos nomes dos elementos da turma, Rebeca começa por falar sobre Alberto, o primeiro, e vai seguindo ordenadamente a sequência. Sobre este aluno diz que é "um miúdo muito esperto, muito inteligente" (E4, p. 4) mas que "piorou este ano o seu comportamento (...) não só a Matemática mas em todas as disciplinas" (idem); salienta que a "sorte é que os pais andam em cima dele (...) e depois lá encarrilha" (idem) e supõe que, no seu caso, a mudança se relacione com a adolescência: "Acho que é a adolescência, acho que é mesmo só isso, acho que não começou a ir por outros caminhos. É normal, todos passam um bocado por essas fases" (idem). De Bento, conta que era "um miúdo, no 7º ano, quase de nível 5 (idem, p. 6), mas que no 9º ano, a partir de certa altura, "desistiu foi de se esforçar" (idem, p. 5); destaca que "apesar de conversar, era discreto" (idem, p. 6) e recorda que numa das aulas gravadas no âmbito do projecto, ao chamar-lhe a atenção para a inadequação deste comportamento, até "arranjou aquela desculpa, de acordo com aquilo que ele sabia que era aceitável na aula (risos)" (idem). Conversando sobre Diogo evidencia que é "esperto" (idem, p. 8), tem um "espírito muito prático (...) diferente, de sobrevivência" (idem), que estuda, sobretudo, perto das datas da realização dos testes, com a ajuda de Rogério, tentando imaginar o "estilo de coisas que saíam" (idem) para as aprender; comenta, também, que dá "luta" a este colega, "apesar de não ser com tão bons argumentos como a Tânia" (idem, p. 18), pois "não tinha os conhecimentos muito consolidados" (idem, p. 8). Discorre, longamente, sobre Rogério, um aluno que "gosta de falar, de dar nas vistas, e de explicar" (idem, p. 14), que tinha problemas de relacionamento com os colegas no início do projecto — "era, assim, um bocadinho posto de parte, acho eu" (idem, p. 15) — mas que, apesar de ter um desempenho matemático muito bom, lhe dificulta, por vezes, o trabalho "porque monopoliza, não quer deixar os outros falarem" (idem, p. 16).

De uma forma sistemática, Rebeca vai diferenciando os alunos que têm uma participação mais espontânea na aula daqueles que a não têm e, no caso destes últimos, aponta factores que poderão estar subjacentes ao seu modo de agir e estratégias que delineou ou que poderiam ser experimentadas para incrementar a participação. Por exemplo, refere que Isabel era uma aluna exemplar (...) [que] fazia os trabalhos todos com muita perfeição (...) [e] participava bastante" (E4, p. 11); contrariamente a Isabel e João F. — que também participava "bastante" (idem, p. 12) — Vânia, embora seja "boa aluna" (idem, p. 18) tal como estes colegas, é "muito tímida" (...) [e] não tem confiança nas capacidades dela" (idem, pp. 18-9), o que exige chamá-la "de propósito para ela participar" (idem, p. 18). Esta situação complexifica-se, bastante, no caso de Noélia: "Esta é daquelas que eu não sei como é que a punha a participar (risos). (...) se alguma vez falou, foi muito raramente (...) mesmo noutras aulas" (idem, p. 14). A interpelação directa não resulta: "custa a sair alguma coisa da boca dela" (idem). Por feitio "não gosta de se expôr... (...) Só se fosse, se calhar, numa turma em que ela estivesse muito à-vontade, ou que fossem todos como ela (...) ela passasse a falar, se conseguisse... Não sei, mas acho muito difícil (idem). Os comentários de Rebeca sobre Tânia e com que encerro esta secção, são, na minha perspectiva, reveladores do cuidado que coloca nas relações que vai tecendo com os alunos e que, seguramente, contribuem para a qualidade do bom ambiente de trabalho que se vive nas suas aulas:

> A Tânia era boa aluna. Participava bem e eu acho que até respeitava os outros em termos de participação, porque penso que ela se continha um bocado. Ao contrário do Rogério que não queria saber (...) Houve uma altura em que eu até pensei que ela tivesse ficado melindrada... (...) Ela queria dizer qualquer coisa e eu não lhe pedi para dizer e ela depois na outra aula não falou nada, não disse nada e eu fiquei com receio que tivesse ficado melindrada. (...) cheguei a falar

> com ela. E apercebi-me que não tinha havido problema nenhum. Foi mesmo uma atitude de "deixa ser os outros a falarem". Mas eu fiquei preocupada e pensei: *queres ver que fui muito brusca e ela ficou chateada*. Mas não. (E4, pp. 17-8)

A propósito da tarefa *Números em círculos*

A tarefa *Números em Círculos* é uma adaptação do enunciado de uma das tarefas que incluí na versão inicial do dossier elaborado para apoio ao desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa. A aula de Rebeca com esta tarefa é leccionada cerca de três meses e meio após o início do trabalho conjunto e foi a primeira gravada por mim a ser objecto de reflexão no grupo de pesquisa. A tarefa surge enquadrada no tema *Ainda os números* e foi explorada numa aula dupla leccionada quando os alunos frequentam o 8º ano de escolaridade. O seu ponto de partida é um esquema constituído por um padrão de oito círculos dispostos de modo a formarem os "vértices" de um quadrilátero e dois triângulos (anexo 11). Um destes círculos, designado por círculo central, está desenhado sobre um vértice comum aos três polígonos. Em cada um destes círculos são representados, numa sequência crescente, números naturais consecutivos. Numa primeira parte solicita-se aos alunos que adicionem os números colocados nos vértices de cada um dos polígonos e, posteriormente, as três somas obtidas. Esta última soma é designada por "grande total". Em seguida, pretende-se que efectuem diversas experiências com números naturais, seguindo o padrão descrito, de modo a encontrarem uma relação entre os números representados no círculo central do padrão e os "grandes totais" obtidos. Numa segunda parte o objectivo é que analisem se a relação encontrada se mantém quando se inicia o processo com qualquer número inteiro negativo e, no caso de não se manter, que descubram uma nova relação que "funcione" com todos estes números.

Panorama geral sobre a aula

Como o próprio sumário indicia — Trabalho de grupo sobre padrões e regularidades — Rebeca pretendia que os alunos, organizados em grupo, explorassem a tarefa de modo a descobrirem regularidades que conduzissem à formulação de conjecturas. Pretendia, também, que produzissem a prova de uma das conjecturas que expectava que formulassem. Esperava, ainda, haver tempo para poderem explorar uma extensão da tarefa consistindo na descoberta de novas relações seguindo o padrão descrito, mas usando outras sequências numéricas (números pares, números ímpares, múltiplos de três, de quatro ou de cinco).

Estruturalmente, a aula organizou-se em três partes principais. A primeira, a mais curta, teve dois objectivos: a constituição de grupos de trabalho e o lançamento da tarefa. O primeiro decorreu do facto da professora pretender que os alunos explorassem a tarefa em grupo e esta não ser uma modalidade de trabalho muito habitual:

> Comigo estão mais habituados a trabalharem dois a dois. Eu o ano passado ainda fiz algumas vezes trabalho de grupo quatro a quatro, este ano só fiz uma vez mas foi na correcção de um teste (...) Foi uma situação diferente. (TST 14, p. 29, 12/03/02)

A turma tinha conhecimento prévio que, nesta aula, se iria realizar trabalho de grupo e Rebeca tinha já solicitado aos alunos que pensassem nos agrupamentos. Uma vez que antecipava poderem surgir alguns problemas, tinha preparado, com base no seu conhecimento das características e afinidades dos alunos, duas hipóteses possíveis de distribuição dos alunos que, embora não tendo determinado os grupos que vieram a constituir-se, se revelaram úteis face à inexistência, nalguns casos, de grupos auto-organizados e ao aparecimento de pontuais aspectos problemáticos relacionados com a integração de alguns alunos.

Formados os grupos de trabalho, Rebeca distribui uma ficha com o enunciado da tarefa e material de apoio constituído por repetições "vazias" do padrão de círculos nela representado, destinado a facilitar o registo das experiências feitas pelos alunos. A entrega destes materiais é acompanhada por uma intervenção que visa destacar alguns aspectos relativos à natureza do trabalho que espera que os alunos realizem e ao processo de funcionamento dos grupos:

> Vocês, em grupo, vão realizar uma tarefa envolvendo números e regularidades, padrões, vão explorar propriedades, vão tentar descobrir, portanto... (...) tentem resolver primeiro os problemas dentro do grupo, já sabem, e depois é que me chamam. E agora rentabilizem o vosso tempo, está bem? Em vez de falarem de futebol apliquem-se agora aí com unhas e dentes à ficha, vá... (TA 04/03/02, p. 1)

A segunda parte da aula, destinada ao trabalho de grupo, foi a mais longa: ocupou cerca de 60% do tempo total de trabalho. A sua duração, que ultrapassou o tempo previsto por Rebeca, prendeu-se com a opção de aguardar a descoberta de algumas conjecturas por todos os cinco grupos formados. Em três destes, depois de formuladas conjecturas não refutadas para cada uma das questões da tarefa, foi produzida uma prova algébrica para a conjectura "o grande total é igual a dez vezes o número do centro mais quatro" (conjectura "GT=10□C+4"[51]). De modo a proporcionar aos restantes alunos mais algum tempo que lhes permitisse descobrir as relações solicitadas na tarefa antes de passar à fase de trabalho com toda a turma, Rebeca lançou, posteriormente, a cada um desses três grupos, o desafio de encontrar uma relação entre o "grande total" e o número do centro seguindo o padrão descrito e usando outro tipo de sequências numéricas: múltiplos de três, no caso de um grupo, múltiplos de quadro, no caso de outro, múltiplos de cinco, para o terceiro.

Durante o trabalho de grupo, Rebeca circulou pela sala de modo a conhecer o trabalho que ia sendo realizado e a incentivar a prossecução da exploração da tarefa, dando, quando considerou necessário, orientações que poderiam, do seu ponto de vista, facilitar este processo. Esta estratégia permitiu-lhe, também, recolher informações que lhe foram úteis para imaginar e delinear actuações para a terceira parte da aula.

As interacções com os grupos tiveram, na quase totalidade dos casos, origem em solicitações dos alunos que, sobretudo nalguns momentos e no caso de alguns

[51] "GT=10□C+4" é a designação que adopto para indicar uma conjectura com este enunciado ou outro equivalente quanto ao conteúdo.

grupos, foram bastante intensas. O desequilíbrio que Rebeca reconhece ter existido na forma como geriu a distribuição do tempo de acompanhamento dos grupos constituiu, para esta professora, uma fonte de insatisfação. Ao reflectir sobre a aula refere que houve grupos que a solicitaram mais e outros menos, o que conduziu a que estes últimos tivessem sido mais esquecidos e menos ajudados. Esta situação poderá, na sua perspectiva, ser uma hipótese explicativa para o facto de dois dos grupos terem avançado mais lentamente na exploração da tarefa:

> Eu fui poucas vezes a este grupo [grupo da Lídia] porque os outros estão-me sempre a solicitar e esqueço-me delas, mas isto também me acontece nas outras aulas. Tenho que começar a obrigar-me, porque elas não me chamam e os outros estão-me sempre a chamar e eu vou é ao pé dos outros. (p. 6) (...) Isto [os grupos da Lídia e do Diogo não terem avançado tanto no trabalho como os restantes três grupos] também tem a ver com o serem, se calhar, os grupos que menos me solicitaram e que eu ajudei menos. Fui menos vezes ao pé deles. Conduzi-os menos. Daí terem ido mais devagarinho. Eu penso que foi isso. (TST 14, p. 15).

> [Os outros grupos] Já tinham feito tudo e mais alguma coisa. É difícil. Nós estamos ali a gerir. O ideal, se eu estivesse a ver a aula ao mesmo tempo que estava lá, era eu ter insistido mais no grupo do Diogo e no grupo da Lídia que estavam mais atrasados para os fazer avançar mais. Mas os outros estão sempre a chamar e a pessoa anda ali numa roda viva... (risos). (TST 14, p. 23)

A terceira parte da aula, que teve por finalidade "discutir os resultados [do trabalho de grupo] com toda a turma" (TA, 04/03/02, p. 24), organizou-se em duas fases. A primeira, focada na apresentação, pelos alunos, das várias conjecturas formuladas. A segunda centrou-se na prova algébrica da conjectura "GT=10□C+4". Esta prova é registada, no quadro, pela professora, que segue sugestões apresentadas pelos elementos da turma a partir de questões que coloca. Uma vez que os três grupos que produziram a prova desta conjectura usaram três diferentes formas algébricas de representar a sequência numérica do padrão, são registados no quadro cálculos relacionados com duas destas formas de representação.

Rebeca encerra a aula recordando e sistematizando o trabalho a realizar em casa e a entregar posteriormente. Parte deste trabalho derivou de uma decisão tomada no momento face à inexistência, na aula, de tempo para apresentar a prova da referida conjectura usando a terceira forma de representação da sequência numérica. A outra parte, consiste em "fazer o mesmo tipo de estudo" (TA 14/03/02, p. 25) para outras sequências numéricas diferentes da dos números inteiros:

> Houve três grupos que já quase fizeram o trabalho [referência aos grupos que já tinham explorado o padrão usando a sequência dos múltiplos de três, múltiplos de quatro e múltiplos de cinco]. No vosso caso, a ver se fica bem claro o que têm que fazer *(aponta para o grupo da Lídia e para o grupo do Diogo)*. É fazerem o mesmo estudo para números pares *(aponta para o grupo da Lídia)*. O que vai ficar dentro das bolinhas é 4,6,8 e por aí adiante. (...) Este grupo *(aponta para o grupo do Diogo)* faz o mesmo para os ímpares. E além de me entregarem esse trabalho... Calma!... Além de me entregarem esse trabalho vão entregar também a demonstração no caso do grupo da Tânia. (TA 14/3/02, p. 34)

Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas

A actividade relacionada com a formulação e avaliação de conjecturas decorreu em duas fases. A primeira focada na formulação de conjecturas pelos alunos durante o trabalho de grupo (primeira subsecção) e a segunda centrada, sobretudo, na apresentação destas conjecturas na turma e na sua compreensão pelos alunos (segunda subsecção).

Acompanhando, nos grupos, a formulação de conjecturas

Anteriormente a surgirem as primeiras observações relacionadas com a exploração do padrão usando a sequência dos números naturais (descoberta de regularidades ou conjecturas) houve momentos em que Rebeca foi solicitada, intensamente, por vários grupos que procuravam que a professora respondesse a questões ou validasse interpretações relacionadas com a compreensão do enunciado da tarefa. Deixar os alunos responsáveis por, autonomamente, interpretarem a tarefa, funcionando como recurso para os ajudar a ultrapassarem dificuldades, foi uma opção que a professora tomou porque, embora reconhecendo que deste modo se "leva mais tempo" (TST 14, p. 31), pretendia que os alunos "também trabalhassem em termos de interpretação" (idem, p. 30).

Ultrapassada a fase da compreensão da tarefa, começam a surgir, nos grupos, observações variadas mais ou menos directamente relacionadas com a descoberta das relações solicitadas. Rebeca lida com estas observações de forma diferenciada. Há, no entanto, em todos os casos uma grande preocupação em tentar encontrar sentido nas ideias que os alunos apresentam e, além disso, em tentar "conduzi-los" (TST, 14 p. 7; p. 8) para a descoberta das relações solicitadas no enunciado da tarefa. A ênfase nestas relações não leva, contudo, a que a professora negligencie ou desvalorize aspectos do trabalho dos alunos não directamente relacionado com esta descoberta. Esta ideia é apoiada, por exemplo, pela reflexão que faz sobre um episódio em que um aluno de um dos grupos tenta estabelecer uma conjectura relacionada com os totais parciais obtidos quando se adicionam os números colocados nos "vértices" do quadrado e de cada um dos triângulos incluídos no padrão, bem como pela análise das interacções que estabelece com os alunos desse grupo:

> Isto que se está aqui a passar no grupo do Diogo, se calhar também é interessante. O Duarte tentou estabelecer uma conjectura para cada um dos totais, não para os grandes totais, mas para cada um dos totais parciais. E dizia que num dos casos termina sempre em 4, noutro em 8, noutro sempre em 2 (...) E depois foi o Diogo que arranjou um contra-exemplo. (...) Foi ele que esteve a analisar outros casos para ver se se mantém a regularidade encontrada. E portanto, o Diogo mostrou que a conjectura do Duarte não era válida porque arranjou um contra-exemplo. (TST 14, p. 7).

Analisando as interacções ocorridas a propósito do momento da aula referido neste extracto, constata-se que Rebeca, depois de ter escutado a intervenção do Duarte anunciando a descoberta feita, refere: "portanto, isso é uma outra conjectura que tu estás a ver, não é pedida, mas foi uma conjectura que tu descobriste... (TA 04/03/02, p. 11)". Legitima, deste modo, a possibilidade de descobertas não relacionadas com as relações solicitadas e continua a dedicar atenção ao trabalho realizado pelos alunos relativo à descoberta feita. Quando se dá conta que Diogo encontrou um caso em que a conjectura falhava, escuta a sua explicação e relata a conjectura em análise. Salienta, depois, que "o Diogo arranjou um contra-exemplo. Arranjou uma situação em que falha, se tiver feito bem as contas..." (TA 04/03/02, p. 12). Prossegue confirmando, juntamente com os alunos, os cálculos realizados. Por último, nas suas palavras, "conduzi-os para aquilo que se queria" (TST 14, p. 7). Através desta actuação e do tempo e atenção que dedica à análise da conjectura enunciada pelo Duarte, Rebeca não só mostra ter valorizado o trabalho realizado, como torna evidente que uma conjectura que um aluno "está a ver", "que descobriu", mesmo que "não seja pedida", merece ser instituída enquanto objecto de análise.

No que respeita à formulação de conjecturas, o significado que Rebeca atribui a conduzir os alunos para a descoberta das relações solicitadas no enunciado da tarefa, pode ser intuído a partir da análise das interacções que estabelece com os vários grupos e da reflexão que apresenta sobre o trabalho que, neste âmbito, realizou:

> Ia tentando perceber e conduzia-os. Se via que estavam a ir bem dizia: *vá continuem a trabalhar e pensem*. Foi um bocado assim nesta primeira parte. Se via que estava mal tentava levá-los a perceber porque é que estava mal. Se calhar podia tê-los posto mais... mas isso é que é o mais difícil... Porque ainda centro as coisas todas um bocado em mim, não é? (TST 14, p. 16)

Apesar de Rebeca afirmar, evidenciando preocupação, que ainda centra "as coisas todas um bocado em si", momentos houve em que a intenção de levar os alunos a confrontarem as ideias que apresentam — tentando, em particular, não ser ela própria a validá-las ou invalidá-las — foi concretizada. O episódio *É o número central e um 4 ao lado*, que a professora qualifica de "interessante porque é José que vai esclarecendo os outros" (TST 29, p. 4, 15/07/02), ilustra um destes momentos. Simultaneamente, contribui para ilustrar um tipo de discurso entre os alunos que deseja que exista nas suas aulas.

É o número central e um 4 ao lado

1. José: Oh sôtora, o que eu vi é que dá quatro sempre no final
2. Rebeca: Termina sempre em quatro. E que relação é que isso tem com o número central? *(pausa)* Pede para descobrir uma relação com o número central... Vocês já descobriram uma regularidade...
3. José: O número central é ímpar e aqui é par.
4. Rebeca: E com os pares isso bate certo? Não puseram ainda nenhum par no centro?
5. José: Ah, estão a ouvir? Quanto dá a terceira?
6. Rebeca: Mas vocês estão a esquecer-se do número central. Não estão a ver se há alguma relação com o número central.

7. José: Estamos a ver. Aqui é ímpar, aqui é par... Calma lá... Ah, olha aqui pá... Dá sempre 4 e o número central.
8. Outro aluno: Ah, o primeiro número é o número do centro.
9. José: É o número central seguido de quatro, não é?
10. Outro aluno: Aah!...
11. José: Vês? É o número central e o quatro.
12. Rebeca: Então registem a vossa conjectura, não é?
13. José: Dá sempre 4 mais o número central. Então se o número central for 50, dá 504. Dá o número mesmo e o quatro. É assim? Então pronto.
14. Rebeca: Registem no vosso caderno, na vossa folha em que estão a fazer o trabalho. *(pausa)* E fizeram todos as mesmas experiências? Fizeram...
15. José: Agora podemos fazer todos os números que já sabemos o resultado.
16. Outro aluno: Sôtora, quer dizer que é o número central mais o 4 não é?
17. Rebeca: Eu não sei... O José é que disse...
18. José: É o número central e um 4 ao lado, não é mais um quatro, estás a perceber?

(TA 14/03/02, pp. 7-8)

Comentando este episódio, Rebeca refere:

> Uma das dúvidas, em termos de argumentação, é porque às vezes há formulação de conjecturas mas não há assim nenhum grande processo de argumentação, de justificar raciocínios. Há é um processo... no fundo em que os alunos discutem entre si uma determinada conjectura que formulam, que é o que está aqui em causa. Eles observaram uma regularidade, dava sempre quatro no final, depois houve uma discussão porque um dizia que dependia do número central ser par ou ímpar, eu chamo a atenção para que têm que descobrir a relação com o número central e depois José formula a conjectura e diz: *É o número central seguido de quatro, não é?* [§9]. Depois outro aluno diz: *Aah*!...[§10] e o José torna a apresentá-la: *Vês? É o número central e o quatro* [§11] e depois explica-a servindo-se de um exemplo: *Dá sempre 4 mais o número central. Então se o número central for 50, dá 504. Dá o número mesmo e o quatro. É assim? Então pronto* [§13]. Depois eu digo para eles registarem e o José diz *Agora podemos fazer todos os números que já sabemos o resultado* [§15]. Achei aqui interessante. Achou que a conjectura era verdadeira e queria já aplicá-la... (risos). Depois outro aluno pergunta: *Sôtora, quer dizer que é o número central mais o 4 não é?* [§16]. E eu achei que não devia ser eu a responder porque se tinha sido o José a dizer era ele que devia explicar e é o José que esclarece. Achei este episódio interessante porque é o José que vai esclarecendo os outros (TST 29, p. 4).

Analisando o episódio e o comentário que Rebeca tece a seu propósito, constata-se que a professora, começa por reformular, subtilmente, a afirmação de José "dá sempre quatro no final" parecendo reconhecer, através desta via, a importância do trabalho já realizado (§1). Procura, em seguida, que o grupo expanda o seu raciocínio começando por focar a atenção na necessidade de descobrirem uma relação entre as somas obtidas, isto é, os "grandes totais", e o número colocado, em cada caso, no centro do padrão (§2, §6).

Estas intervenções parecem ter facilitado a descoberta de uma conjectura pois, quase de imediato, dois alunos (§7, §8) constatam que o último algarismo do "grande total" é quatro e os restantes são os que aparecem no círculo central do padrão (conjectura "GT=C seguido de 4"[52]). Depois desta descoberta ter sido enunciada há um novo acto de ensino. A preocupação de Rebeca passa a ser que o grupo registe a conjectura formulada (§12, §14).

A questão "Sôtora, quer dizer que é o número central mais o 4 não é?" (§16), que lhe é endereçada por um aluno, faz surgir um novo movimento de ensino que parece ter subjacente duas intenções interligadas. Mostrar aos alunos que quem enuncia algo se deve responsabilizar pela sua explicação aos colegas e tornar visível que não é a sua autoridade, enquanto professora, que deve constituir o suporte que garante a correcção do que José designou por "resultado" (§15): "Se tinha sido o José a dizer era o José que devia explicar".

Globalmente, o acompanhamento, por Rebeca, do trabalho dos diversos grupos durante a fase de formulação de conjecturas tem vários traços em comum. Começa por verificar se o grupo descobriu alguma relação entre o número do centro do padrão e o "grande total" para o caso da sequência dos naturais. Na sua inexistência, intervém no sentido de "conduzir [os alunos] para a relação com o grande total, para a tarefa propriamente dita" (TST 14, p. 8), tentando, deste modo, que foquem a sua atenção na relação pretendida. Se necessário, coloca questões com vista à clarificação de aspectos que considera pertinentes e estimula-os a prosseguirem o trabalho. Caso os alunos tenham identificado alguma relação, nas palavras de Rebeca, "conduzi-os para fazerem para os negativos" (idem, p. 7), ou seja, pede-lhes que analisem se a relação se mantém para a sequência dos números inteiros negativos e, se não se mantiver, solicita que tentem encontrar uma nova

[52] Designo a conjectura "o grande total é igual ao número de centro seguido de quatro por "GT=C seguido de 4'". Mantenho a designação caso a formulação diferir desta apenas por questões não significativas referentes à forma.

relação que "funcione" com estes números. Quando anunciam que a descobriram, tenta perceber o seu significado e analisa, em especial, se as suas experiências respeitam o padrão numérico incluído no enunciado da tarefa. Em particular, observa se os números negativos usados foram escritos, ou não, por ordem crescente. Em caso negativo destaca, quer directamente, quer através de questões que coloca, a necessidade de respeitarem esta ordem. Em caso afirmativo, tenta começar a "conduzi-los para a prova" (idem, p. 9).

Lidando, na turma, com a apresentação das conjecturas

As conjecturas formuladas durante o trabalho de grupo são apresentadas, oralmente, por um ou vários dos seus autores a partir dos seus lugares. Rebeca faz alguns registos no quadro com o propósito, nomeadamente de tornar mais claras ideias apresentadas. No entanto, a globalidade do enunciado de cada uma das conjecturas comunicadas não é objecto de registo. "Porque [o grupo do José] foi o primeiro grupo que apresentou conjecturas" (TST 14, p. 21), Rebeca faz a transição para a discussão com a turma através de um aluno deste grupo a quem começa por pedir que indique "qual foi a primeira conjectura que vocês fizeram" (TA 04/03/02, p. 25). A resposta obtida leva-a a constatar que este aluno "abandonou" (TST 14, p. 21) a conjectura que o grupo tinha inicialmente formulado no âmbito da sequência dos números naturais ("GT=C seguido de 4"), pois apenas enuncia uma reformulação desta ("GT=10×C+4"). Como pretendia dar visibilidade a todas as conjecturas relacionadas com as relações solicitadas descobertas durante a fase do trabalho em grupo, ao ser confrontada com o "abandono" salienta que a conjectura enunciada "Foi a primeira que registaram, mas tinham feito uma outra primeiro" (TA 04/03/02, p. 25).

José enuncia, então, a conjectura "GT=C seguido de 4", mas não parece atribuir-lhe muita importância, pois logo em seguida destaca referindo-se, implicitamente a "GT=10×C+4", "Mas nós já fizemos a conta mesmo" (TA 04/03/02, p. 25). Esta observação proporciona o contexto para Rebeca reforçar que a segunda conjectura surgiu da primeira e, além disso, para questionar o grupo se a conjectura “GT=10×C+4” “foi a mesma para os positivos e negativos” (idem, p. 26). Alberto responde que “serve para determinar o resultado de todos estes aqui” (TA 04/03/02, p. 26), intervenção que tem implícita a ideia de que ela permite obter o “grande total” quer se utilize no padrão uma sequência crescente de números naturais consecutivos, quer de inteiros negativos.

Rebeca sabia que o grupo do Rogério, ao explorar o padrão no âmbito dos números naturais e dos inteiros negativos, tinha, numa primeira fase, formulado conjecturas diferentes para cada um destes casos, uma das quais não tinha sido ainda apresentada. Decide, assim, dar a palavra aos elementos deste grupo:

> E depois passei para o grupo do Rogério porque tinha diferente para os positivos e para os negativos. Não passei para o da Tânia porque era igual. Posso dizer aqui alguma coisa em relação ao que o Rogério fez? É assim: Ele estabeleceu aquela conjectura para os negativos que era o número do centro mais um e com um seis ao lado. E depois eu perguntei-lhe: que cálculos vais fazer aí, com esse seis aí ao lado para provares que isso é verdade? E depois ele percebeu que não conseguia fazer contas nenhumas. (TST 14, p. 21)

No âmbito da apresentação do trabalho desenvolvido pelo grupo, Rogério aborda a questão da conjectura formulada para os números negativos poder ser descartada porque a outra que tinham descoberto (“GT=10×C+4”) também se verifica para estes números: “Depois a sôtora veio aqui e explicou-nos e conseguiu-nos explicar que também dava para os números negativos” (TA 04/03/02, p. 26). A pedido da professora justifica esta ideia e Rebeca reformula as suas contribuições de modo a tornar o raciocínio mais claro. Sabendo que o grupo de Tânia formulou, tanto para a sequência dos inteiros positivos, como para a dos negativos, a conjectura “GT=10×C+4” que já tinha sido apresentada, Rebeca apenas refere este facto que Tânia confirma, acrescentando, de imediato, “fizemos a demonstração” (TA 04/03/02, p. 26).

O episódio *Foi do mesmo tipo da deles para os positivos, não foi?* ilustra como foi encerrada a apresentação, na turma, das conjecturas formuladas durante o trabalho de grupo.

Foi do mesmo tipo da deles para os positivos, não foi?

1. Rebeca: Eu vou fazer aqui só as bolinhas no quadro *(desenha o esquema do padrão no quadro)*. É que todos representaram de maneiras diferentes. Houve três grupos que chegaram lá. Houve dois grupos que estabeleceram também... Eu não vos perguntei uma conjectura que tenham estabelecido *(apontando para o grupo do Diogo)*. Foi do mesmo tipo da deles para os positivos, não foi?
2. Aluno *(do grupo do Diogo)*: Foi, foi...
3. Rebeca: Foi a mesma...
4. Duarte *(do grupo do Diogo)*: Não sôtora. Eles fizeram outras contas. A gente foi só juntar o quatro.
5. Rebeca: Só juntar o quatro. E nos negativos ainda não tinham chegado a conclusão nenhuma, não é? E vocês aqui? *(aponta para o grupo da Lídia)*
6. Diogo: Já, já, já tínhamos.
7. Rebeca: E qual era a conclusão?
8. Diogo: Portanto era o menos 170. Menos 17 vezes dez era menos 170, menos dez é igual a menos 160, mais menos seis era igual a menos 166.
9. Rebeca: Foi isso?

Rebeca tenta registar no quadro, utilizando linguagem matemática simbólica, o que o Diogo vai dizendo; como surgem algumas dúvidas de interpretação do que este aluno vai indicando, o Diogo vai ao quadro ajudar. No final a expressão registada é: -17x10 -(-10)+(-6).

10. Rebeca: Vamos ver se a do Rogério é diferente.

Rebeca, em interacção com os alunos, vai efectuando cálculos em -17x10-(-10)+(-6) de modo a transformar esta expressão em -17x10+4 e destaca que -17 é o número do centro do padrão.

11. Rebeca: Não foi a mesma coisa?
12. Diogo: A gente fez de outra maneira.
13. Rebeca: Fizeste aqui mais umas contitas mas foi da mesma maneira. O resultado é o mesmo. Fizeste foi mais contas intermédias para chegar lá. Agora vamos lá ver, para demonstrar. (...).

(TA 04/03/02, pp.26-7)

Quando Tânia refere "e fizemos a demonstração" a aula está muito perto do final. Rebeca pretende que haja tempo para que a prova algébrica que três grupos produziram seja ainda apresentada na turma e está preocupada por não ter tempo para atingir este objectivo. No entanto, está, simultaneamente, preocupada em que todos os grupos tenham oportunidade de apresentar as conjecturas que formularam e a dois deles não tinha, ainda, dado a palavra. A procura de um modo de agir compatibilizador destas duas preocupações parece ser o que está subjacente às interacções que Rebeca estabelece com os alunos no decurso deste episódio:

> Pois foi [o Diogo reformulou a conjectura que tinha enunciado durante a fase do trabalho de grupo]. E depois eu fiz os cálculos para ver se era a mesma coisa. (...) No fundo, ele soma 10, para avançar na casa das dezenas... E depois o menos seis corresponde a pôr o 6 ao lado como dizia o Rogério. Fiz os cálculos para verem que era a mesma coisa que os outros tinham feito e digo: *Fizeste aqui mais umas contitas mas foi da mesma maneira. O resultado é o mesmo. Fizeste foi mais contas intermédias para chegar lá* [§13]. Mas aqui já estou muito preocupada com o tempo. Queria chegar à prova nesta aula. (...) O grupo da Lídia, quando passámos à discussão, ainda estava a experimentar com os negativos. Não chegaram a fazer nenhuma conjectura para os negativos. Depois digo logo: *Agora vamos lá ver, agora para demonstrar (...).* [§13]. (TST 14, p. 24)

Com efeito, a intervenção de Tânia, ao fazer referência a que o seu grupo fez a "demonstração", proporcionou uma "passagem" natural para a professora mudar o foco do trabalho que estava a ser realizado e iniciar uma nova fase da aula centrada na prova. Imediatamente a seguir a esta intervenção, inicia um diálogo com um dos grupos que vai no sentido de obter informações relacionadas com a forma de representação usada na prova para a sequência numérica. Deste modo, a intervenção de Tânia pode ser interpretada como um recurso que usou para lidar com um problema com que, no momento, se estava a confrontar: precisar de tempo para a prova e o tempo da aula estar a esgotar-se.

Simultaneamente, o facto de haver dois grupos que ainda não tinham tido oportunidade de apresentarem as "suas" conjecturas, constrangeu a acção de Rebeca. O desejar que tivessem esta oportunidade, leva-a a retroceder e a perguntar ao grupo de Diogo se a sua conjectura "Foi do mesmo tipo da deles para os positivos, não foi?" (§1). Inflecte, assim, o rumo que a aula estava a tomar. Quando reflecte sobre a aula, a professora não se debruça sobre o formato desta pergunta. Pode até colocar-se a hipótese dele não ter resultado, no momento, de uma escolha consciente, uma vez que muitas das decisões de sala de aula, são tomadas, pelos professores, a um nível instintivo, "no calor da situação imediata" (Pimm, 1987, p. 51). Não parece estranho conjecturar, no entanto, que na altura, o recurso a este formato possa estar relacionado, também, com sua preocupação em gerir o pouco tempo que resta da aula de modo a conseguir que ainda seja feita a apresentação da prova. Com efeito, se o formato da pergunta é, por um lado, revelador de conhecimento do trabalho que o grupo realizou durante a segunda parte da aula, por outro lado, ao ser fechado, requer, em princípio, uma resposta menos "exigente" em termos de tempo do que a requerida pela adopção de um formato de pergunta mais aberto.

Posteriormente, Rebeca confronta-se com o facto, que desconhecia até ao momento, do grupo do Diogo ter chegado a uma "conclusão" (§5) para a sequência dos números negativos (§6). A preocupação em dar a palavra aos alunos para que possam apresentá-la e em perceber o raciocínio feito parece tornar-se dominante. O haver tempo para a apresentação da prova passa, nesta altura, para plano secundário. Com efeito, cria uma abertura para Diogo poder apresentar essa "conclusão" (§7), regista-a simbolicamente no quadro, auxiliada por este aluno, e faz os cálculos necessários para poderem ver se "não foi a mesma coisa" (§11) que um colega enunciou. No entanto, quando Diogo diz "a gente fez de outra maneira" (§12), encerra, rapidamente, a troca de ideias (§13). A análise de Rebeca relativa a este episódio faz supor que, subjacente a este encerramento, predomina, de novo, a preocupação com a gestão do pouco tempo de que dispõe nessa aula: "Mas aqui já estou muito preocupada com o tempo. Queria chegar à prova nesta aula".

Quando interpelei Rebeca sobre se, do seu ponto de vista, os alunos se teriam apercebido da equivalência das conjecturas "GT=C seguido de 4" e "GT=10□C+4" no âmbito dos números naturais, refere:

> Se calhar não. Se calhar devia ter chamado a atenção para isso. (...) Pois se calhar viram-nas como distintas e eu se calhar não esclareci bem isso. Eu acho que as devem ter visto como distintas. (TST 14, pp. 21-2)

Posteriormente acrescenta algumas razões que poderão estar subjacentes a não ter focado a atenção da turma neste aspecto:

> Não sei. Se queres que te diga se calhar não me lembrei de dar ênfase a isso. Ou fiquei satisfeita com esta [referência à conjectura "GT=10□C+4"] que era a que eu queria explorar... (risos). E há sempre a pressão do tempo porque eu queria chegar à prova naquela aula e efectivamente está cá. (TST 14, p. 23)

Reconhecendo que a análise da equivalência das conjecturas formuladas poderá ser importante, Rebeca procura equacionar modos de agir futuros que permitam enquadrar a possibilidade de desencadear uma discussão focada neste aspecto: "Eu se calhar ainda posso falar nisso quando voltarmos àquela parte da discussão, não sei... (...) Só sendo quando formos discutir as outras conjecturas para os múltiplos de três, etc., se eles falarem acerca disso" (TST 14, p.22). Esta mesma preocupação sobressai, por exemplo, na sua adesão imediata à hipótese que coloco de poderem ser registadas no quadro as conjecturas que os alunos enunciam: "Sim, sim, exactamente. Até por causa daquela discussão da equivalência das conjecturas" (idem, p. 32).

Problemas experienciados

Tive dúvidas se havia de mandá-las logo demonstrar para os positivos

Durante a preparação da aula em análise, Rebeca intuiu que os alunos, ao explorarem o padrão descrito na tarefa no âmbito da sequência dos números naturais, poderiam vir a formular, nomeadamente as conjecturas "GT=C seguido de 4" e/ou "GT=10×C+4". Embora sejam equivalentes em IN, a primeira não é válida quando se segue este padrão usando sequências de números inteiros negativos, contrariamente ao que acontece com a segunda. Os grupos começaram por formular "GT=C seguido de 4" e só mais tarde surgiu "GT=10×C+4". O grupo de Tânia escapa a esta regra. Quando comunicou à professora a primeira descoberta feita com a sequência dos números naturais, apresentou uma série de exemplos que tinham subjacente o sentido da segunda conjectura. O episódio *Dá 5x10+4* ilustra como Rebeca lidou com a situação.

Dá 5x10+4

1. Tânia: É assim: Dá 5x10+4. Depois nós fizemos com este número e também deu. 4x10+4 dá 44. Depois fizemos com três aqui e 3x10 dá 30 e mais 4 dá 34.
2. Rebeca: Sim senhor.
3. Tânia: É assim?
4. Rebeca: Não sei, mas está a bater certo, por enquanto...

5. Aluna: Temos que fazer isto até acabar isto tudo aqui? *(referência à folha distribuída com o desenho do padrão)*.
6. Rebeca: É assim. Podes fazer a folha cheia, não é? E na folha cheia bater sempre certo, não é? Mas não tens a certeza se voltares a fazer que volte a funcionar, não é? Quer dizer, se fizeres mais um... Pode funcionar para estes todos na folha cheia, mas se fizeres mais um pode não funcionar... Não tens a certeza absoluta que funcione para o próximo que vais fazer, não é? Não é por fazeres muitos e bater certo que tem que funcionar para todos, não é? E além disso, porque é que será que isso funciona sempre? Podemos tentar provar... Ou então antes de tentares provar podes também deixar a prova disso para o final e ir ver a pergunta número 2, experimentar se essa relação que aí está, que tu estás a descobrir se manterá com os números negativos.

(TA 04/03/02, p. 8)

Comentando este episódio, Rebeca refere:

> Disseram é o número do meio vezes dez mais quatro apoiando-se em vários exemplos, não é? [§1] (...) E depois é esta minha conversa toda [§6] porque eu tive dúvidas se havia de mandá-las logo demonstrar para os positivos, se havia de fazê-las passar para a segunda questão. Então tive esta conversa toda para as convencer da necessidade de demonstrar mas depois achei que elas deviam ir experimentar primeiro para os negativos e depois fazerem a prova para ambos. (...) e conduzi-as para irem fazer a segunda. (TST 14, pp. 5,6)

Rebeca não se debruça, em particular, sobre as razões subjacentes às dúvidas que se lhe colocaram. No entanto, a análise de algumas das suas intervenções no episódio *Dá 5x10+4*, articulada com várias das suas reflexões, permite identificar elementos cuja conjunção poderá contribuir para iluminar a compreensão da hesitação que sentiu.

Em primeiro lugar, sabia que, perante as conjecturas formuladas, aquilo de que os alunos estavam à espera — como aliás mostra a intervenção de Tânia (§3) — era que ela avaliasse o trabalho que tinham realizado e que se pronunciasse sobre a sua correcção, ou não:

> Exactamente, [quando os alunos têm uma conjectura chamam logo a professora] e é o que eles estavam à espera. Nós chegámos aqui professora, diga lá se está bem ou se está mal. Se a professora disser que está bem, pronto. (...) Se eu dissesse que estava mal eles continuavam a fazer experiências (risos). Não trabalhamos a prova. (TST 14, p. 19)

Rebeca pretendia alterar este padrão de comportamento. A forma como reage à intervenção de Tânia (§4) é ilustrativa desta intenção.

Em segundo lugar, queria sensibilizar os alunos para o facto de uma relação se verificar para muitos casos não permitir ter a certeza que se verifica para todos. A intervenção "Temos que fazer isto até acabar isto tudo aqui?" (§5) pode ter sido interpretada como uma boa "abertura" para fazer passar esta mensagem.

Finalmente, porque um dos objectivos de Rebeca para esta aula era a produção de uma prova algébrica para a relação referida no enunciado da tarefa e a formulação da conjectura "GT=10×C+4" é importante para a produção desta prova, era esta a conjectura que a professora "queria explorar" (TST 14, p. 23). A compreensão de que o grupo a tinha intuído, juntamente com o facto de estar consciente de que tinha que ser ela a introduzir a ideia da prova nos grupos — "Se eu não lhes chamasse a atenção para a prova não iam lá de certeza absoluta" (TST 14, p. 19) —, podem tê-la levado a interrogar-se se este não seria o momento mais adequado para desafiar o grupo a fazê-la.

Não tinha pensado que eles iam ordenar os números por ordem decrescente...

Um problema com que Rebeca se confrontou teve na sua origem uma situação, para ela inesperada, que surge no âmbito das interacções que estabeleceu com o grupo de Rogério: este aluno afirmava que se mantinha para a sequência dos inteiros negativos a conjectura "GT=C seguido de 4", que Rebeca sabia não se manter.

Rogério justificava a plausibilidade desta conjectura recorrendo a um exemplo numérico. Inicialmente, Rebeca suspeitou que "as contas estavam erradas" (TST 14, p. 17), o que a levou a pedir aos alunos para "conferir os cálculos" (idem) e a efectuá-los pessoalmente para se certificar da sua correcção. Deu-se conta que "aquilo estava tudo a bater certo!!..." (idem). Só passados alguns instantes, olhando com mais atenção, descobriu que os alunos estavam a usar uma sequência de inteiros negativos escritos consecutivamente, mas por ordem decrescente. Esta ordenação é diferente da descrita no enunciado da tarefa em que os números do padrão estão dispostos por ordem crescente. Foi surpreendida pela situação e enquanto não descobriu o que a originava teve receio e questionou-se sobre a possibilidade de terem existido incorrecções na exploração prévia da tarefa:

> Não estava à espera, não tinha pensado que eles iam ordenar os números por ordem decrescente. E chega ali o Rogério e aquilo estava a bater certo, dava -54... E eu fiquei logo assim... (risos) Pensei cá para mim: *Eh pá! Não me digas que isto bate certo e a gente se enganou!!...* (risos) (...) só pensava: *O que é que terá acontecido para aqui?!...* (risos) Foi mesmo. Não estava à espera desta. Depois olhei com mais atenção para os números e felizmente rapidamente, sem que eles se apercebessem, apercebi-me que os números estavam por ordem decrescente e chamei-lhes a atenção. (TST 14, pp. 17-8)

Nas suas palavras, apesar de nesta aula terem surgido "muitos problemas pequeninos" (TST 14, p. 17), "esta situação no grupo do Rogério foi a que me assustou mais (risos)" (idem, p. 18). Posteriormente, outros grupos escreveram também a sequência dos inteiros consecutivos negativos por ordem decrescente, mas este facto já não constituiu para Rebeca um elemento de perturbação: "Depois nos outros grupos já estava à vontade. Já sabia" (idem).

Rebeca fica feliz por ter descoberto, rapidamente, o que originava a afirmação de Rogério e, através das perguntas que coloca, foca a atenção do grupo na comparação entre a ordenação que usaram e a referida no enunciado da tarefa: "dei um esclarecimento para eles escreverem os números por ordem crescente" (TST 14, p. 6). O episódio *Está errado, não...* mostra como Rebeca lidou com a actividade desenvolvida, até ao momento, por estes alunos.

Está errado, não...

1. Rebeca: Portanto o processo de construção que usaram não foi o mesmo, pois não?
2. Aluno: Estão a ver?
3. Rebeca: Mas não risquem...
4. Rogério: Mas está errado...
5. Rebeca: Está errado, não... Fizeste uma outra experiência, ao contrário. Depois podemos ver se será válida essa conjectura com os números como tu fizeste. Vejam lá.

(TA 14/03/02, p.10)

Ao mesmo tempo que tenta compreender a descoberta feita pelo grupo do Rogério, que tenta lidar com a insegurança que lhe provoca o facto de não compreender o que acontecia e que procura identificar um modo de lidar com a situação, Rebeca apercebe-se das potencialidades que o trabalho realizado pode ter:

> Eu apercebi-me depois que quando os números estão escritos por ordem decrescente deve dar outra conjectura diferente. Apercebi-me que havia ali uma regularidade. É por isso que eu digo para não riscarem e que não está errado. Mas esta situação foi das que me surpreendeu mais. (TST 14, p. 18)

Tendo identificado estas potencialidades, procura valorizar a descoberta feita e quando Rogério tenta apagar os registos, argumentando "está errado" (§4), não só contraria esta afirmação (§5) como se preocupa em justificar o seu posicionamento. O modo como o faz (§5) torna visível para os alunos deste grupo que, numa tarefa matemática, é importante que as condições de partida sejam tidas em conta para se avaliar se uma dada solução é, ou não, apropriada.

Não percebi e conduzi para outro lado

A "conclusão" que Diogo enuncia durante a fase da aula correspondente à apresentação das conjecturas — episódio *Foi do mesmo tipo da deles para os positivos, não foi?* — parece ter surgido da necessidade de ter em conta observações feitas por Rebeca relativamente a uma relação entre o "grande total" e o número do centro, descoberta pelo seu grupo para a sequência dos números inteiros negativos. Diogo apresentava-a socorrendo-se de um exemplo. O episódio *Sôtora. Já encontrámos. É assim. Quer ver?* ilustra as interacções que, a este propósito, ocorreram.

Sôtora. Já encontrámos. É assim. Quer ver?

1. Diogo: Sôtora. Já encontrámos. É assim. Quer ver? É menos 17. Dezassete vezes dez dá 170 menos dez dá 160 mais seis que é o final de todos os números dá cento e sessenta e seis. Menos 166.
2. Rebeca: Ah, deu menos 166.
3. Diogo: Sim
4. Rebeca: Então explica lá essas coisas todas que tu fizeste.

5. Diogo: Como?
6. Rebeca: Dizes que é menos 17...
7. Diogo: Com números negativos então. Menos 17 vezes dez.... Isto é um exemplo, há mais. Menos 17 vezes dez dá menos 170.
8. Rebeca: Menos 170
9. Diogo: Menos 170 menos 10... (*olha para a máquina com ar de espanto*) Não dá... (*olha para a professora sorrindo*)
10. Ana: Como estavas a dizer dava...
11. Diogo: Mas agora estava a fazer com números negativos. Há bocado fiz com números positivos, professora.
12. Rebeca (*olhando para Ana*): Ele fez com números positivos antes... Faz lá com positivos. Escreve lá...

O Diogo repete o que antes tinha feito começando com o 17. A Rebeca regista na folha do Diogo os cálculos por ele efectuados — 17x10-10+6 — e olha para a expressão.

13. Rebeca: Dá 166. Foi o que deu?
14. Diogo: Sim...
15. Rebeca: Mas aqui dá negativo...
16. Diogo: Aqui dá negativo. Aqui dá positivo porque a gente começou com positivo.
17. Rebeca: Ah! Então deixa aqui ver uma coisa. Dezassete vezes dez menos dez mais seis. Fizeste duas operações. Podes fazer só uma. Menos dez mais seis quanto dá?
18. Duarte: Menos 4.
19. Rebeca: Menos 4, não é? Só que dá 166 positivo. Mas aqui está negativo. Se fizesses menos 17 vezes 10, não é?
20. Diogo: *(calcula com a máquina)*: Menos 17 vezes 10...
21. Rebeca: Dá menos 170, não é? O que tens que fazer ao menos 170 para obter menos 166?
22. Diogo (*calculando com a máquina*). Menos 170 mais... menos... não... espere lá... mais...
23. Rebeca: O que é que tens que somar para obter o menos 166?

O Diogo continua a fazer cálculos com a máquina e Rebeca acompanha o trabalho. Vários outros grupos chamam-na solicitando a sua atenção.

24. Rebeca: Então explica lá aos teus colegas. Ele quer descobrir uma relação entre o número do centro e o grande total. Têm que descobrir uma relação entre o número do centro e o grande total *(diz para continuarem e dirige-se a outros grupos).*

(TA 04/03/02, pp. 23-4*)*

Os momentos da aula correspondentes a este episódio são, para Rebeca, "uma parte importante que se passa com o Diogo e que eu na altura não percebi" (TST 14, p. 15). Na sua perspectiva, este aluno "até estava a pensar bem" (idem, p. 16), mas a compreensão do seu raciocínio só veio a acontecer ao ver a gravação da aula:

"agora a ver a cassete é que percebi o que tinha feito" (idem, p. 15). Lamenta este facto que teve como consequência, não só não ter conseguido aproveitar a contribuição do aluno para o ajudar a prosseguir na exploração da tarefa, como também ter conduzido a sua actividade num sentido que não era o dele, mas que correspondia, antes, ao enunciado da relação no formato que ela própria pretendia:

> Ele estava a fazer bem, coitado, e na aula não percebi. Não percebi o que ele estava a fazer e conduzi-o para outro lado. O que o Diogo fazia era isto: Imaginava que no centro estava um número negativo, mas pensava no valor absoluto do número, multiplicava por dez, subtraía 10 e somava seis e depois punha-lhe um menos atrás. Batia certo. E eu não percebi! Não consegui perceber a relação e não aproveitei!!... E o que é que eu fiz? Como não percebia o que ele me estava a dizer arranjei maneira de ele pôr no meio mesmo o número negativo que eu queria. Mas podia ter aproveitado isto que ele fez. A seguir era fazer o simétrico. Porque estava muito bem pensado, apesar de ser um bocado mais trabalhoso. Mas estava certo!!!... (entoação de quem lamenta o facto). (TST 14, pp. 15-6)

Distanciando-se da aula em análise, Rebeca reflecte sobre um aspecto do trabalho do professor associado à exploração, com os alunos, de tarefas com uma natureza idêntica à *Números em Círculos*. Sobretudo nestas aulas, um dos problemas que tem que enfrentar é "perceber as várias coisas a que os alunos chegam e tentar logo ali fazer o mesmo raciocínio que eles e compreender o raciocínio que fazem, o que nem sempre se consegue" (TST 14, p. 16). Lidar com esta questão não é tarefa fácil. Por exemplo, e recorrendo às suas palavras, a ideia que o Diogo apresentou "Foi mesmo uma coisa inesperada que não consegui digerir" (idem, p. 17).

Lidando com o ensino do discurso de prova

Conduzindo e acompanhando os grupos em direcção à prova

Como anteriormente referi, quando os alunos, durante o trabalho de grupo, referem ter encontrado uma relação entre o "grande total" e o número do centro para a sequência dos números inteiros negativos, Rebeca diz "comecei a conduzi-los para a prova" (TST 14, p. 9). A intervenção que a seguir apresento, feita no grupo de José, é ilustrativa do modo como faz a condução:

> Então é assim. Isto é outra conjectura que vocês fizeram. Mas porque é que será que isto funciona, não é? E vocês estão a fazer uma conjectura, mas podemos demonstrar essa conjectura. Vou já. E é assim, por mais experiências que vocês façam, se preencherem estes desenhozinhos todos que aqui têm, com números diferentes, não têm a certeza que funciona para todos os números. Funciona para aqueles que vocês estão a experimentar. E quando nós queremos provar para todos os números, normalmente o que é que nós usamos no sítio dos números? (TA 04/03/02, p. 14)

A análise desta intervenção, tal como das restantes feitas nos outros dois grupos que lidaram com a prova, denota a existência de dois tipos de intenções interligadas. Uma pode ser interpretada como uma justificação que apresenta aos alunos para a necessidade de produzirem a prova. Outra relaciona-se, directamente, com o facilitar o início do percurso de prova.

Rebeca justifica a decisão de introduzir, nos grupos, a ideia da prova, referindo que "se eu não falasse eles não provavam nada. Faziam mais uns quantos exemplos e ficavam satisfeitos" (TST 14, p. 19). Esta situação tem, a seu ver, origem no facto da prova não ser algo que faz parte da experiência habitual dos alunos: "Não trabalhamos a prova" (idem). Mesmo quando formulam conjecturas a partir de experiências que fazem, a sua veracidade, ou não, é, do ponto de vista de Rebeca, estabelecida pela sua "autoridade de professora":

> Eles não estão habituados a demonstrar muita coisa, sabes? A prova, o demonstrar não é algo que seja do dia-a-dia da aula. E a maior parte das vezes eles até fazem é experiências, estabelecem conjecturas e depois a veracidade delas é dada por mim, pela minha autoridade de professora. E era o que eles estavam ali à espera, que eu lhes dissesse se está certo ou se está errado. (TST 14, p. 19)

A situação agudiza-se quando se trata de demonstrações algébricas. Embora as variáveis sejam usadas para generalizar e, pontualmente, possam aparecer pequeninas provas em "situações pontuais em coisas pequeninas em aulas muito espaçadas, não é o dia-a-dia" (TST 14, p. 20).

Procurando justificar a necessidade de produzir uma prova, Rebeca apresenta-a como um meio que pode ser usado para progredir na compreensão da tarefa — "porque é que será que isto funciona" — e como um instrumento que pode permitir analisar se a conjectura formulada se mantém para todos os números e, assim, ultrapassar a incerteza proveniente da verificação da relação apenas por casos particulares: "não têm a certeza que funciona para todos os números. Funciona para aqueles que vocês estão a experimentar" (TA 04/03/02, p. 14).

O episódio *E quando nós queremos provar para todos os números?*, que se seguiu à intervenção destinada a conduzir o grupo de José para a prova, ilustra como Rebeca, através das questões que colocou e das indicações que deu, procurou ajudar os alunos a iniciarem o processo de prova.

E quando nós queremos provar para todos os números?

1. Rebeca: (...) E quando nós queremos provar para todos os números, normalmente o que é que nós usamos no sítio dos números?
2. Aluno: *x*
3. Rebeca: Uma letra, não é? Quem diz um *x*, diz outra letra qualquer, ou *a*. Pronto. Então, o que é que vocês vão fazer para tentar provar? Vão colocar no sítio desses números letras de maneira que se relacionem do mesmo modo que estes números se relacionam uns com os outros... Vocês sabem como se representam números consecutivos, não é?
4. Aluno: Sim...
5. Rebeca: Qual é o número consecutivo ao número *a*?
6. Aluno: *b*
7. Outro aluno: É o *b*
8. Rebeca *(risos)*: Como é que eu sei? Não pode ser o *c* ou o *d*? Mas como é que eu relaciono com o número *a*?
9. Aluno: a+1
10. Rebeca: Exactamente.
11. Aluno: Então aqui pode ser a+1 vezes 10 mais quatro?
12. Rebeca: Não, vão colocar é no sítio desses números vão colocar letras. Num sítio metem o *a*, noutro sítio têm que pôr o outro...
13. Aluno: *a*, *b*, *c*, *d*...
14. Rebeca: Pronto, pronto, podem fazer isso, só que para descobrirem alguma relação... Estavas a dizer pôr *a*, *b*, *c*, *d*, era? Depois vinha o *e*, *f*, *g*, *h*, é isso?
15. Aluno: Não pode ser a+x igual a *y*?
16. Rebeca: a+x igual a *y*?
17. Outro aluno: Oh sôtora, mas a conjectura aqui não se mantém sempre? O vezes 10 mais quatro?
18. Rebeca: Isso é uma conjectura. Agora quero que proves. E para teres a certeza de que isso bate certo só indo experimentar com letras, não é? Está bem? Não está bem... Então pensem lá melhor... *a*, *b*, *c*, *d*. É uma hipótese. Agora não sei é como é que vocês descalçam a bota com esse *a*, *b*, *c*, *d*. Se

> calhar têm que descobrir alguma relação entre este *a*, e o *b*, e este *c* e este *d*. Pensem um bocadinho em grupo.
>
> (TA 04/03/02, pp. 14-5)

Comentando este episódio, Rebeca refere:

> Um aluno disse *x* e eu disse que não tinha que ser *x*, que podia ser uma letra qualquer. E agora isto é engraçado. Eu pergunto *Qual é o número consecutivo ao número a?* [§5] e um aluno diz: é o *b*. Porque é a letra que vem a seguir no alfabeto (risos). (...) [Isto] repetiu-se em todos os grupos. (...) Eu no grupo do José ainda disse: *Como é que eu sei? Não pode ser o c ou o d? Mas como é que eu relaciono com o número a?* [§8] Eu queria que relacionassem e é engraçado que um ainda disse *a+1* mas ninguém lhe pegou apesar de eu ter dito *exactamente* [§10]. Estás a ver? Depois houve um aluno que disse: *Então aqui pode ser a+1 vezes 10 mais quatro?* [§11]. Mas *a+1* não era o que eles tinham no centro. E eu digo: *Não, vão colocar é no sítio desses números vão colocar letras. Num sítio metem o a, noutro sítio têm que pôr o outro...* [§12]. E um aluno diz: *a, b, c, d...* [§13] Lá está... (risos) Continuavam com o alfabeto... Depois um diz: *Não pode ser a+x igual a y?* [§15] e eu não percebi o que é que ele queria dizer com isto. E outro aluno diz: *Oh sôtora, mas a conjectura aqui não se mantém sempre? O vezes 10 mais quatro?* [§17]. Aqui houve uma dúvida deles que era se não se mantinha com as letras a conjectura que tinham feito com os números. Eu queria que eles provassem e eles não estavam a perceber a necessidade. (TST 14, p. 10)

O modo de agir de Rebeca que transparece no episódio *E quando nós queremos provar para todos os números?* e no comentário a ele associado, tem muitos traços em comum com a sua acção junto dos restantes dois grupos quando procurou que iniciassem a produção da prova. Começa por tornar visível a necessidade de recorrerem a "letras" para representarem uma sequência qualquer de números inteiros consecutivos (§1, §3). Para o efeito usa dois tipos de estratégias: apresentação explícita da sugestão, num dos casos, e colocação de questões cujas respostas interpreta de modo a destacar essa necessidade, nos outros dois. Quando confrontada com o facto de todos os grupos pretenderem usar a sequência alfabética como representação da sequência numérica, Rebeca, se, por um lado, não descarta explicitamente essa possibilidade, por outro, tenta semear a dúvida quanto à sua eficácia (por exemplo, §8, §14). Simultaneamente, foca a atenção dos alunos na importância de, tendo em conta o padrão, descobrirem relações entre as "letras" que pretendem usar (por exemplo, §18). Por fim, dá algum tempo aos alunos para pensarem sobre o assunto. Posteriormente, perante dificuldades de alguns alunos em descobrirem estas relações, recorda-lhes experiências anteriores que envolveram a representação algébrica de números consecutivos e recorre à análise de exemplos concretos para "induzir" (TST 14, p. 20), por analogia, uma representação do padrão em que todos os números consecutivos são expressos à custa de um deles representado por uma variável.

Ultrapassadas as dificuldades relativas à representação da sequência numérica, cada um dos grupos efectua, sem dificuldades, os cálculos algébricos necessários à prova da relação. Nesta fase, embora Rebeca tenha tido que enfrentar uma situação com que não foi fácil lidar — que referirei na subsecção *Convencê-lo que quando utilizou o x não tinha imposto nenhuma restrição não foi fácil* —, só pontualmente necessita de ajudar alguns alunos em aspectos relacionados com procedimentos de cálculo algébrico:

> Eles nos cálculos não tiveram dificuldade nenhuma. Não precisei de intervir. Não ajudei nada. Só ajudei o Duarte na distributiva. Para que ele visse a equivalência das duas expressões (TST 14, p. 20).

> Os meus [alunos] também tiveram dificuldades com o pôr em evidência. Só que eu para ultrapassar essa dificuldade optei por lhes sugerir que fizessem o contrário. Eles têm que provar é que uma coisa é igual à outra. Para eles é mais complicado pôr uma coisa em evidência, mesmo para os mais velhos. Têm que se habituar, mas ainda não têm muito traquejo nisso. Acho que a dificuldade esteve mais aí (TST 18, p. 20, 16/04/02).

Gerindo a apresentação da prova algébrica de uma conjectura

Na fase da apresentação, à turma, da prova da conjectura "$GT=10\times C+4$", Rebeca chama a si própria a responsabilidade de registar, no quadro, os modos de representação da sequência numérica usados pelos grupos e os cálculos algébricos associados à prova. Toma esta decisão porque o tempo que resta é pouco e tem consciência que pedir aos alunos para irem ao quadro explicar o que fizeram é um procedimento que, sendo mais moroso, inviabilizaria a apresentação da prova nesta aula, um dos objectivos que tinha. No entanto, a seu ver, os alunos "dispersaram-se mais para o final" (TST 14, p. 28), contrariamente ao que antes aconteceu. Reflectindo, em geral, sobre a fase de discussão do trabalho de grupo, considera que esta dispersão pode estar relacionada com a forma como a organizou e geriu:

> Em termos de discussão, se calhar, para eles estarem mais interessados e não se desligarem tanto, se calhar é fazer a discussão com toda a turma mas pôr alguns alunos de cada grupo a irem ao quadro. Eu tive que fazer como fiz por causa do tempo. Se naquela altura fosse pedir a cada um dos grupos para ir ao quadro, não dava. Eu optei na fase de discussão por ser eu a fazer tudo no quadro porque senão não tinha tempo. Pedir aos alunos do grupo para irem ao quadro explicar leva mais tempo. (TST 14, p. 30)

O episódio *Agora vamos lá ver, para demonstrar* ilustra como Rebeca inicia a fase da aula correspondente à apresentação da prova na turma.

Agora vamos lá ver, para demonstrar

1. Rebeca: (...) Agora vamos lá ver, para demonstrar. Há necessidade de demonstrar não só para perceber porque é que funciona, mas também para ver se funciona para todos os casos, se funciona sempre. Provar a nossa conjectura, está bem? Eu tinha perguntado ao José qual era a vossa representação, como é que vocês representaram os números para fazer a demonstração.
2. José: O primeiro é x+1, depois no lado esquerdo x+2, depois x+3, no centro x+4 e depois x+5, mais seis, mais sete, mais oito *(Rebeca regista no quadro as expressões, indicadas pelo José, no interior dos círculos do esquema do padrão aí desenhado, representado "mais seis, mais sete, mais oito" respectivamente por x+6, x+7 e x+8)*
3. Aluno: Ãaahh?!...
4. Rebeca: É a mesma coisa. Já agora, antes de fazer qualquer conta, vou aqui pôr as três representações diferentes. *(Rebeca desenha de novo o esquema do padrão no quadro)*. Diz lá Rogério, como é que vocês puseram.
5. Rogério: Nós tínhamos no primeiro círculo lá em cima x-3, depois x-2, x-1, no centro x, depois x+1, x+2, x+3, x+4 *(Rebeca regista as expressões enunciadas pelo Rogério no esquema do padrão)*
6. Rebeca: x+4. Agora por último o grupo da Isabel *(Rebeca vai desenhando, de novo, o esquema representativo do padrão, no quadro)*. Digam lá como é que vocês puseram.
7. Isabel: Em cima *a*, à esquerda a+1, à direita a+2, em baixo a+3, à esquerda em baixo a+4... *(Rebeca vai escrevendo no interior dos círculos as várias expressões)*.

(TA, 04/03/02, pp. 27-8)

A primeira intervenção revela a preocupação de Rebeca em justificar, perante a turma, a necessidade de realizar a prova. A exemplo do que tinha acontecido aquando da condução de alguns grupos para esta actividade, o conteúdo da justificação deixa transparecer que a professora apresenta a prova como tendo um duplo papel: um instrumento de compreensão e de validação. Para apoiar a apresentação da prova, começa por desenhar no quadro o esquema do padrão de círculos e solicita a José, que indique como, no seu grupo, "representaram os números para fazer a demonstração" (§1). É a estranheza manifestada por um colega (§3) face à forma de representação da sequência numérica indicada, que a leva a decidir, no momento, desenhar novos esquemas do padrão de modo a poder registar todas as representações adoptadas pelos outros grupos que sabia serem diferentes:

> O José diz: *O primeiro é x+1* [§2]. Eu aqui podia ter perguntado porquê, mas aqui já estou numa fase que quero despachar. Estou preocupada com o tempo. Depois um aluno diz: *Ãaahh?!...* [§3]. Só aqui é que eu decidi representar no quadro as três formas. Teve a ver com a reacção deles. E digo: *Diz lá Rogério como é que vocês puseram* [§4]. Não fui eu que disse ao Rogério para pôr *x*. Deve ter sido lá na discussão com os outros. (TST 14, p. 24)

A partir de uma questão colocada à turma, vários alunos indicam que todos os modos de representar a sequência numérica do padrão estão certos. Rebeca recorda a conjectura que se está a tentar provar e escreve no quadro as três expressões algébricas que representam o "grande total" tendo por base os diferentes modos de representação aí registados. Cada uma das expressões é escrita ao lado do respectivo esquema do padrão, o que torna visível que no primeiro esquema o número central é representado por x+4, no segundo por *x* e no terceiro por x+3.

Seguindo sugestões apresentadas por diversos elementos da turma relacionadas com procedimentos de cálculo a adoptar e respectivos resultados, Rebeca regista, no quadro, a prova algébrica da conjectura adoptando a representação usada pelo grupo de José. Neste processo, procura envolver alunos de grupos que, durante a segunda parte da aula, não ultrapassaram a fase da formulação de conjecturas: "E isto dá... Vou pedir ajuda a um grupo que não fez, está bem?... Aqui o Diogo. Diogo, como é que eu somo? *x+x+x+x*..." (TA 04/03/02, p. 29).

Os cálculos feitos não convencem, contudo, Rogério que, tendo usado uma forma de representação diferente, manifesta o seu desacordo quanto ao facto da conjectura poder ser considerada provada. Depois de um conjunto de interacções que, apesar das tentativas de Rebeca para envolver outros colegas, se desenrolam, fundamentalmente, entre ela própria e este aluno, o desacordo é ultrapassado. Subsequentemente solicita-lhe que indique os cálculos que efectuou para provar a conjectura e regista-os, também, no quadro.

Problemas experienciados

Não há uma interpretação matemática das letras

Um dos problemas com que Rebeca se confrontou na aula decorre do facto dos alunos, durante o trabalho de grupo, ao tentarem iniciar a prova da conjectura formulada para a sequência dos números inteiros, "em vez de considerarem a relação entre os números, consideram a sequência alfabética. Não há uma interpretação matemática das letras" (TST 32, p. 3, 05/09/02). Esta situação surpreendeu-a, uma vez que em anteriores ocasiões, nomeadamente no tema das *Equações*, não tinham tido dificuldades em lidar com tarefas que requeriam a representação de adições de três números consecutivos.

Por um lado, Rebeca pretendia que os alunos seguissem o seu próprio caminho. Não queria dizer-lhes o que deviam fazer para encontrar uma representação algébrica da sequência que lhes fosse útil para a prova. Por outro lado, tinha consciência de que a ausência da identificação das relações entre as várias "letras" que os grupos pretendiam usar, impedia a produção da prova algébrica que visava.

Identificar a forma mais adequada de lidar com esta situação foi a questão com que se debateu. Começa a focar a atenção na necessidade de terem em conta as referidas relações e concede algum tempo aos alunos para que reflictam sobre o assunto. No entanto, as dificuldades, em vários casos, mantêm-se. Assim, nas palavras de Rebeca, "tive que induzir. (...) Foi o processo que achei melhor, sem lhes dizer, de os fazer chegar às letras" (TST 14, p. 20). Para o efeito, recorre à análise das relações entre números em exemplos do padrão de modo a que, por analogia, os alunos intuam como representar, por exemplo, o número inteiro consecutivo a um outro representado por uma variável:

> A minha opção foi fazer com exemplos concretos as relações que existiam entre os números e depois perguntava-lhes para as letras. A minha opção foi verem com números. Por exemplo, se aqui é o 5, aqui é o quê? É o 4. O que é que fizeste? Aqui é o 5, aqui é o 6. O que é que fazes? E depois passar para as letras. Eles depois de fazerem um exemplo concreto são logo induzidos (...) Foi o processo que achei melhor, sem lhes dizer, de os fazer chegar às letras. (TST 14, p. 20)

Convencê-lo que quando utilizou o x não tinha imposto nenhuma restrição não foi fácil

Durante o processo de produção da prova surge, no grupo de Rogério, uma situação que Rebeca qualifica de "interessante" (TST 14, p. 21) mas que lhe deixa algumas dúvidas quanto ao modo como ela lidou. Este grupo tinha formulado para os números naturais a conjectura "GT=10□C+4" e, para a sequência dos inteiros negativos, a conjectura "o 'grande total' é igual ao número do centro mais um seguido de seis". Deixou o grupo estar com estas conjecturas e quando este a solicitou, depois de ter provado a primeira designando o número do centro por *x*, constatou que os alunos tinham interpretado *x* como representando, exclusivamente, um número positivo. Rogério queria demonstrar a segunda representando o número do centro por -*x*:

> Não perceberam que o *x* podia representar qualquer número. E ele [Rogério] perguntou-me: *Então agora vou provar para os negativos?* E depois chamei-lhe a atenção: *então, este x que está aqui...* Não sei se esclareci bem, mas pronto. É a tal coisa. Se calhar são os tais argumentos de autoridade (risos). Também não arranjei maneira melhor. Disse-lhe: *então, este x que está aqui... por algum motivo não poderá ser um número negativo? Tem sempre que ser necessariamente algum número positivo? Fizeste algum cálculo em que este x não possa ser um número negativo?* Disse-me que não, mas não me pareceu muito convencido. (TST 14, p. 21)

Segundo Rebeca "convencê-lo [Rogério] que quando utilizou o *x* não tinha imposto nenhuma restrição, não foi fácil" (TST 17, p. 14, 09/04/02). A estratégia usada para lhe mostrar que a conjectura "GT=10×C+4" se mantém quando se consideram sequências de inteiros negativos, foi indicar-lhe que experimentasse substituir o número do centro por um valor negativo e ajudá-lo a analisar essa experiência de modo a que entendesse que multiplicar um número negativo por dez e adicionar quatro é equivalente a adicionar um a esse número e escrever seis a seguir:

> Depois o que eu fiz foi pedir-lhe que fizesse uma experiência com números para ele ver o que se passava e analisar se não era a mesma coisa. Por exemplo se o número do centro for -4, o grande total dá -36. Levei-o a experimentar e ver que somar mais um ao número do centro e escrever um seis a seguir era a mesma coisa que multiplicar o -4 por 10 e adicionar 4. Mostrei que somar 4 aos negativos fazia com que andasse para as dezenas anteriores. (TST 17, p. 14)

Esta foi uma das situações de que Rebeca “não estava à espera” (TST 14, p. 28) e com que teve que lidar na própria aula. Embora se questione se não se terá apoiado na sua autoridade para convencer Rogério, a estratégia que adoptou revela a sua preocupação em conseguir que este convencimento se enraíze, não nesta autoridade, mas na compreensão das ideias matemáticas que estão em jogo:

> Eu lembrei-me de ir para o tal exemplo para ele [Rogério] ver, foi o que me surgiu na altura, mas também aí não estou a ver uma maneira melhor de trabalhar. Mesmo se pensasse acho que não me surgia outra, porque depois já pensei e não estou a ver uma outra forma. (TST 14, p. 28)

Esta preocupação ao extravasar o próprio momento da aula, parece, além disso, enraizar-se, em Rebeca, numa inquietação pela busca de outras possibilidades, essencial à identificação de melhores caminhos de acção futura.

Queria que eles provassem e eles não estavam a perceber a necessidade...

Embora o modo como Rebeca introduz a prova nos grupos e inicia a sua apresentação na turma seja revelador da intenção de que os alunos se apercebam da sua necessidade e importância, na reflexão que faz sobre esta aula são vários os momentos em que se questiona sobre se terá conseguido tornar esta ideia inteligível: “Aqui houve uma dúvida deles que era se não se mantinha com as letras a conjectura que tinham feito com os números. E eu queria que eles provassem e eles não estavam a perceber a necessidade” (TST 14, p. 10); “Eu não sei se consegui passar bem. Tenho-me questionado. Não sei. Não sei se os alunos sentiram a necessidade da prova aqui, à mesma" (idem, p. 27).

Procurando interpretar o que poderá estar subjacente a algumas das questões ou ideias apresentadas pelos alunos e identificar possíveis causas de dificuldades, coloca a hipótese de, pelo menos alguns, terem entendido a prova algébrica apenas como uma outra "experiência com letras":

> Acho que não perceberam que aquilo era mesmo uma demonstração com as letras. Achavam que eu queria fazer uma experiência com letras também. Portanto, para eles se já tinha dado para os números, se calhar com as letras também dava (risos). (...) Era mais uma experiência só que com letras. Lendo isto agora outra vez é a ideia que me está a dar. (TST 14, p. 10)

Esta mesma hipótese surge quando Rebeca tenta entender o que poderá ter levado Rogério — aluno de um dos grupos que durante a segunda parte da aula produziu a prova algébrica da conjectura "GT=10×C+4" — a responder: *"Utilizar um exemplo. Pode ser o um, sôtora, por exemplo. (...) Podemos pôr o um. Dez vezes um mais quatro"* (TA 04/03/02, p. 29). Esta resposta surge já na terceira parte da aula, quando coloca à turma uma questão sobre como proceder para provar a conjectura usando qualquer um dos modos de representação: "Será que ele terá percebido a necessidade da prova, ou será que achou que fazer com números ou com letras que era a mesma coisa?" (TST 14, p. 25).

Durante a aula, Rebeca não comenta esta contribuição de Rogério: "mas eu não lhe liguei, ou não ouvi, ou..." (TST 14, p. 29). A importância do que poderá significar só sobressai na sessão de reflexão. Na aula, ela surge, quase em simultâneo, com uma outra apresentada por uma colega que contém a sugestão de se adicionarem as expressões registadas num dos esquemas do padrão. É esta sugestão que Rebeca segue.

A análise dos trabalhos escritos entregues pelos grupos a propósito do trabalho de casa que lhes propôs, reforça, em Rebeca, a ideia de que os alunos podem não ter compreendido que tinham estado a provar a relação conjecturada e conclui que este é um aspecto a que, no futuro, tem que dedicar mais atenção. Estes trabalhos confirmam que terá que ajudar os alunos a "perceberem que os exemplos não chegam para provar" conjecturas, uma das dificuldades com que se confrontou na aula em análise:

> Os alunos perceberem que os exemplos não chegam para provar, foi uma dificuldade que eu senti quando lhes propus a tarefa *Números em círculos*. Até nos trabalhos que lhes pedi para me entregarem no fim dessa aula me apercebi dessa dificuldade. (TST 22, p. 33, 17/05/02)

Neste âmbito, identificar e propor tarefas que tornem visíveis as limitações do raciocínio indutivo poderá, do ponto de vista de Rebeca, ser uma possibilidade adequada para facilitar a aprendizagem de como se pode provar a falsidade de uma conjectura e, além disso, mostrar a relevância de se investirem esforços em tentativas de produção de provas de conjecturas que não se refutam:

> Se calhar, depois disto, fazer uma outra tarefa em que também pareça óbvio que é... Porque para eles foi óbvio e depois bateu certo, percebes? Se calhar fazer uma outra situação em que fosse muito óbvio e depois fossem tentar demonstrar e aquilo falhasse... e depois arranjavam um contra-exemplo... Aí talvez sentissem mais a necessidade da prova. Era difícil em paralelo, na mesma aula, fazer as duas coisas, mas se calhar arranjar brevemente uma situação que pareça mesmo que é e depois não é. Talvez os faça sentir mais essa necessidade da prova. (TST 14, p. 27)

Lidando com a emergência e resolução de desacordos

No âmbito da produção da prova da conjectura "GT=10×C+4", surge, como anteriormente referi, um desacordo que emerge a partir da iniciativa de Rogério. Apresento, nesta secção, o que, para este aluno, é motivo de discordância, bem como os principais aspectos referentes ao processo que permitiu ultrapassá-la.

Emergência do desacordo

O episódio *Aí está provado é que é o número do centro vezes dez mais quarenta e quatro*, que ilustra o que originou o desacordo, surge na sequência do registo, no quadro, dos cálculos relativos à prova da conjectura "GT=10×C+4" adoptando a forma de representação da sequência numérica usada no grupo de José.

Os alunos deste grupo designaram o número do centro do padrão por x+4 o que, naturalmente, conduziu à representação do "grande total" por 10x+44.

Aí está provado é que é o número do centro vezes dez mais quarenta e quatro

1. Rebeca: E agora é assim. Eles chegaram a 10x+44, está bem? Agora pergunto aos outros grupos. O resultado final da soma, o grande total, está representado como 10x+44. Está provado que é o número do centro vezes dez mais quatro? *(aponta para o esquema).*
2. Rogério: Não. Aí está provado é que é o número do centro vezes dez mais quarenta e quatro.
3. Rebeca: O número do centro é *x*?
4. Vários alunos: Não. É x+4.
5. Rebeca: Então? Será que não é a mesma coisa? O que é que eu posso fazer?
6. Rogério: Já me baralhei todo!
7. Rebeca *(rindo-se)*: Ãh? O que é que vocês fizeram? *(dirige-se ao grupo do José)*. Escreveram isto *(aponta para 10x+44)* com aquele aspecto *(aponta para 10(x+4)+4)* ou aquilo *(aponta para 10(x+4)+4)* com este aspecto *(aponta para 10x+44)?*
8. Rogério: Não percebo.

Rebeca coloca de novo a questão, deslocando-se ao longo do quadro, de modo a indicar as duas expressões a que se refere usando a designação "grande total". O grupo do José indica que escreveram 10(x+4)+4 na forma 10x+44.

9. Rebeca: Este *(aponta para 10(x+4)+4)* com aquele aspecto *(aponta para 10x+44).* Então vamos lá ver se não é a mesma coisa. Vamos lá fazer aqui umas contitas *(apontando para a expressão 10(x+4)+4)*. Temos aqui um parêntesis, não é? O que é que fazemos?
10. Vários alunos: 10x+40
11. Rebeca: Distributiva *(escreve 10x+40)*
12. Rogério: Agora mais quatro dá 10x+44. Fica igual.
13. Rebeca: Fica igual. Está ou não provado?

Ouvem-se algumas vozes dizendo "está".

14. Rogério: Não está... Pronto, eles compreendem o deles, eu compreendo o meu, os outros compreendem o dos outros...
15. Rebeca: Então mas tu não percebes o deles, Rogério? Então eles provaram ou não provaram que o resultado obtido...
16. Outro aluno: Provaram, sôtora!!!...
17. Rogério: Se eles entendem tudo bem, eu não percebo sôtora, não estou a perceber...
18. Rebeca: Olhem lá... Esperem, esperem... *(dirigindo-se a outros alunos cujas intervenções iam num sentido diferente).* Rogério...

19. Rogério: O que eu não estou a entender é que um dá mais 4 e o outro mais 44. São quarenta números de diferença, sôtora!
20. Rebeca: Expliquem lá vocês aí...

(TA 04/03/02, pp. 30-1)

É o facto de Rebeca ter interrogado os grupos que não adoptaram a forma de representação da sequência numérica usada para apresentar, no quadro, a prova da conjectura (§1) que proporciona a abertura para Rogério, aluno que tinha usado *x* como designação para o número central do padrão, poder expressar, não só a ideia de que a conjectura não está provada, mas também o que, do seu ponto de vista, a justifica (§2).

A reflexão de Rebeca sobre este episódio é ilustrativa de como interpretou a origem da dificuldade do aluno e ajuda a iluminar o porquê da pergunta "o número do centro é *x*?" (§3) com que escolhe iniciar, na sequência da resposta do Rogério, as interacções com a turma:

> Ele [Rogério] não queria aceitar que fosse a mesma coisa. Numa dava 10x+44 e na outra dava 10x+4 e portanto ele não identificou o número do centro como x+4, tanto que não tinha percebido logo no início aquela representação. Disse: *Está bem avance!* mas fez aquelas caras esquisitas. Daí a dúvida agora. (TST 14, pp. 25-6)

Nesta reflexão Rebeca faz referência a um momento da aula anterior àquele em que o episódio ocorre. As suas palavras parecem indiciar que é aí que situa o embrião do desacordo que aqui se veio a manifestar. Este momento surge imediatamente após terem sido registadas no quadro as três expressões matemáticas que traduzem a conjectura tendo por base os três modos de representação da sequência numérica usados pelos grupos.

Nessa altura, Rogério tinha já manifestado a sua estranheza face ao "grande total" poder ser representado por 10(x+4)+4, a primeira expressão a ser escrita. Rebeca começou, aí, por destacar que no esquema do padrão usado pelo grupo do José, "o número do centro está representado por x+4" (TA 04/03/02, p. 28). Esta observação mereceu a adesão de Rogério, mas não o esclareceu. Dirigindo-se à professora, explicita, não só a sua incompreensão, mas também o que parece estar a causar-lhe perpelexidade: “Ali não temos *x*, sôtora. É só x+1, x+2, x+3,...” (TA 04/03/02, p. 28).

Na sequência, uma colega argumenta, dirigindo-se a Rogério, que o grupo do José começou por x+1. Rebeca abre os braços e encolhe os ombros num gesto que parece indiciar não só a aceitação do comentário da aluna, como a legitimidade da opção usada pelo grupo para representar a sequência numérica. Estas acções parecem levar Rogério a mudar de atitude e estratégia. Com efeito, as duas questões que, subsequentemente, coloca já não se focam na compreensão do processo usado pelo grupo do José, mas antes em averiguar, primeiramente, se é necessário segui-lo — o que origina o comentário de José “são a mesma coisa” (TA 04/03/02, p. 29) — e, posteriormente, se o usado pelo seu grupo não é, também, uma possibilidade. Rogério termina a segunda questão dizendo, para a professora, “siga” o que poderia indiciar que as objecções que tinha colocado à representação da conjectura poderiam ter sido ultrapassadas. No entanto, esta não é a interpretação de Rebeca: “Mas eu percebi que ele não percebeu tanto que a seguir volto lá e insisto: *Não, não diz lá...* E depois chamo a atenção para que o que importa é a relação entre os números” (TST 14, p. 25).

Rogério insiste com a professora para continuar com a aula, argumentando já ter percebido. Esta posição é reforçada pela verbalização da palavra “exacto” que diz na sequência da observação feita por Rebeca para destacar a importância da relação entre os números. Durante todas as interacções descritas, Rogério falou para a professora que se encontrava ao pé do quadro. No entanto, quando Rebeca inicia o registo das duas outras expressões que traduzem a conjectura, olha para os colegas que estão atrás dele e a sua expressão facial e os gestos que faz contrastam, claramente, com as suas afirmações relativas à compreensão da representação da conjectura usando as designações adoptadas pelo grupo do José.

Processo de resolução do desacordo

Rebeca ao constatar que Rogério não considera provada a conjectura, tenta identificar o que poderá estar na origem da sua posição. Para o efeito, evoca o seu conhecimento das interacções já estabelecidas com este aluno a propósito da representação da conjectura, bem como o significado que lhes atribuiu. Parecem ter sido estes aspectos que a levaram a imaginar que o que designou por "dúvida" deste aluno se poderia enraizar no facto de ainda não ter identificado o número do centro como x+4 e estar a usar, para representar este número, a designação *x* adoptada no seu grupo.

Assim sendo, a primeira pergunta que coloca à turma (§3) visa, por um lado, focar a atenção dos alunos na importância de ter em conta a representação do número do centro na tradução, em linguagem matemática, da relação observada no padrão entre este número e o "grande total". Simultaneamente, o formato desta pergunta parece constituir um meio indirecto que Rebeca utiliza para levar Rogério a questionar-se sobre a validade da sua posição. Na sequência da indicação, dada por vários alunos, de que o número do centro não é *x* mas sim x+4 (§4), procura avaliar se a visibilidade dada a esta representação permitiu a Rogério alterar a sua posição (§5). A resposta deste aluno (§6), a que reage com humor, pode ser interpretada como indiciadora de que o gérmen da dúvida, quanto à posição assumida, se começou a esboçar em Rogério. No entanto, não é esclarecedora quanto à causa da sua posição.

Rebeca tem consciência de que a expressão matemática 10(x+4)+4 — registada no quadro ao lado do esquema adoptado pelo grupo do José e usada para representar o "grande total" na tradução, em simbologia matemática, da conjectura — tem uma forma diferente da obtida durante o processo de prova (10x+44). Sabe, também, que os alunos deste nível de escolaridade e, em particular, os da sua turma "ainda não têm muito traquejo" (TST 18, p. 20) em pôr factores em evidência. Por exemplo, durante o trabalho de grupo tinha lidado com dificuldades relacionadas com este aspecto, optando "por lhes sugerir que fizessem ao contrário" (idem). Esta sugestão, que contém uma referência implícita à transformação de 10(x+4)+4 em 10x+44 através do recurso à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, é, na sua perspectiva, justificável porque os alunos "o que têm que provar é que uma coisa é igual à outra" (idem, p. 20). É todo este conhecimento que parece orientar o movimento de ensino que se segue à resposta de Rogério. Este movimento foca-se, já não na representação do número do centro, mas antes na análise da relação entre estas duas expressões de modo a tornar visível a sua equivalência (§7 - §11).

Rogério não tem dificuldade alguma em concluir que 10(x+4)+4 "fica igual" a 10x+44 (§12) e Rebeca, legitimando, através da repetição, esta conclusão, usa-a como ponto de partida para uma questão destinada a avaliar, de novo, a posição da turma e, em particular, de Rogério, sobre a conjectura poder ser, ou não, considerada provada (§13). As respostas que surgem mostram, claramente, que há uma divergência de opiniões na turma e que o trabalho realizado não proporcionou a Rogério boas razões para alterar o seu ponto de vista.

A análise do comentário do aluno na sequência da explicitação da sua posição (§14) e das interacções que, posteriormente, se estabelecem (§15 - §20), revela que os caminhos que Rebeca e Rogério pretendem usar para lidar com o desacordo são muito diferentes. Ao aluno parece bastar-lhe compreender o seu próprio processo, posicionamento que não agrada à professora:

> Ele [Rogério] é muito individualista. O dele estava bem, portanto o que interessa o dos outros? Percebes? E diz: *Até gosto mais do meu, é mais simples*... (...) desde que faça bem pelo processo dele, os processos dos outros não interessam. (TST 14, p. 26)

Rebeca actua de modo a, simultaneamente, contrariar o individualismo que reconhece existir em Rogério, criar as condições necessárias para a divergência ser ultrapassada e mostrar à turma que um desacordo, uma vez expresso publicamente, deve ser analisado e todos devem participar neste processo. Com efeito, as suas intervenções deixam transparecer a preocupação de mostrar, implicitamente, a Rogério que o raciocínio dos colegas é merecedor da sua atenção e seu respeito intelectual (§15). Além disso, o pedir a colegas — que trocam impressões entre si não relacionadas com a discussão que está a ocorrer — que "esperem", passando, de novo, a palavra a Rogério (§18), revela que não só considera importante que se reflicta, com seriedade, sobre o desacordo que emergiu, como espera que o aluno que o exprimiu acrescente informações que possam permitir à turma compreender o porquê da sua posição, o que vem, de facto, a acontecer (§19). A sua intervenção "Expliquem lá vocês aí..." (§20) traduz o seu desejo de envolver outros alunos na troca de ideias.

Ao episódio *Aí está provado é que é o número do centro vezes dez mais quarenta e quatro* segue-se um conjunto de interacções entre Rebeca e a turma que termina quando Rogério afirma ter já percebido e explica que o que lhe estava a "fazer confusão [era] estar ali x+4 e ali x+44" (TA 04/03/02, p. 32). No processo de resolução do desacordo, Rebeca tenta, inicialmente, que outros alunos da turma se envolvam, mas sem grandes resultados. Posteriormente e perante um exemplo que este aluno usa para explicar e justificar o seu ponto de vista, é ela própria quem controla o discurso através da colocação de questões cujas respostas usa como ponto de partida para novas questões destinadas a ajudar Rogério a aperceber-se do porquê da incorrecção do seu raciocínio. Neste âmbito, pede ao grupo de José que enuncie "desde o início" (idem, p. 31) a conjectura formulada; segue a sugestão, apresentada por Rogério, para considerar, por exemplo, 5 como número central; questiona-o como está, no caso do grupo do José, representado este número; e quando Rogério, depois de responder correctamente x+4, continua a insistir que, no seu caso, o grande total "dá 54 e no deles 94" (TA 04/03/02, p. 32), conduz os alunos de modo a concluírem que x+4 é igual a 5. Regista e resolve, no quadro, a equação x+4=5 e usa a sua solução para mostrar que, em ambos os casos, o grande total é 54.

A reflexão de Rebeca sobre esta aula revela que, embora esta tenha terminado, a sua inquietude em tentar identificar possíveis causas para o desacordo expresso por Rogério se mantém. Neste âmbito, apresenta uma nova possibilidade explicativa enraizada no conhecimento que tem de uma estratégia usada por este aluno, durante o trabalho de grupo, para representar a sequência numérica do padrão usando variáveis:

> Isto tem a ver com... Repara, eu digo: *Então x+4 é 5. Então qual é o valor de x?* e os alunos *É 1*. Agora é que estou a pensar nisto. Lembras-te que ele há bocado

> quando esteve a fazer aquelas representações com *a*, *b*, *c*, *d*, *e*... e depois somou, e não pôs o *f* porque já tinha usado essa letra para representar outro número? Como era a mesma letra ele achou que devia representar o mesmo número. Acho que é esse o problema dele. Porque ele teve a preocupação antes de usar letras diferentes para representar números diferentes. Como estava *x* na representação do José e na dele, ele pensou que o *x* representava o mesmo número e não conseguiu ver que o significado dessa letra estava relacionado com a forma de representação que estava a ser usada. (TST 14, p. 26)

Esta reflexão faz referência a um acontecimento em que Rogério propõe, para representar a sequência numérica, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Rebeca aceita esta possibilidade referindo "é uma hipótese" e incentiva o aluno a continuar. Rogério indica, então: "Agora, por exemplo, *d* mais *c* mais *b* mais *a* dá *f*. Não, não pode ser *f* porque já cá está... Dá *m*, pronto. " (TA 04/03/02, p. 17). Para si, "este raciocínio até é bastante interessante, pois está a usar uma linguagem simbólica e teve a noção que não podia usar a mesma letra para representar números diferentes. Foi usar outra letra" (Rebeca, TST 14, p. 12). Foi a evocação deste modo de pensar que lhe permitiu ver, sob uma outra perspectiva, a objecção levantada por Rogério quanto à conjectura poder considerar-se provada. Esta perspectiva permite-lhe atribuir um novo significado a algumas das intervenções deste aluno ao longo do processo de resolução do desacordo:

> Acho que foi o problema dele e faz sentido pensando no que ele fez lá atrás. Tanto que ele não estava a perceber porque é que o *x* num sítio valia uma coisa e noutro outra. Tanto que quando deu o exemplo do 5 ele fez as contas com o 5 nos sítios do *x*. E num sítio dava noventa e tal e noutro sítio dava outro valor. (TST 14, p. 26)

Problemas experienciados

Não está preocupado em perceber o raciocínio dos colegas, não lhe dá importância

A situação ilustrada pelo episódio *Aí está provado é que é o número do centro vezes dez mais quarenta e quatro* foi considerada por Rebeca uma situação problemática pois, na sua perspectiva, Rogério "não está preocupado em perceber o raciocínio dos colegas, não lhe dá importância, ou melhor dá, mas desiste facilmente" (TST 32, p. 3).

Esta reflexão, a par das outras que faz a propósito deste episódio, permite destacar um problema com que Rebeca parece ter-se confrontado nesta aula. Rogério, através das intervenções que fez e da persistência que colocou na defesa dos seus pontos de vista, foi um recurso que pôde usar para legitimar a possibilidade da expressão de desacordos — um aspecto que considera importante —, para o ajudar a entender como e porquê poderia ultrapassar-se, na situação concreta, a divergência de pontos de vista e, além disso, para facilitar a compreensão da prova, um dos objectivos que visava. No entanto, o fluxo contínuo das questões que lhe colocou, a par da concepção de que na aula a "professora é que interessa" (TST 14, p. 26) constrangeram a acção de Rebeca impedindo que a explicação se descentrasse dela própria. O modo como geriu as interacções que conduziram à resolução do desacordo, deixam-na insatisfeita na medida em que a sua intenção em envolver outros alunos da turma na discussão não foi conseguida:

> Eu aqui tentei que fosse outro grupo a explicar. Digo: *Expliquem lá vocês aí...* E depois: *Eu não estou a perceber. Vejam lá vocês se conseguem explicar*. Mas falhei, não consegui, porque depois ele voltou a fazer mais perguntas. Eles acabaram por não explicar. O Rogério continuou a insistir, a fazer mais perguntas e acabei por ir eu... Ele não deixou os outros explicarem logo, continuou a perguntar e a fazer intervenções e eu depois fui na onda dele e esqueci-me dos outros. Acabei eu por explicar. (TST 14, p. 25)

O elevado grau de intervenção de Rogério, em simultâneo com a pouca importância que atribui a ideias apresentadas por outros que não a professora, constitui um obstáculo ao desenvolvimento de uma actividade conjunta em que todos participam interagindo de modo a encontrarem sentido nas ideias matemáticas. Coloca Rebeca perante o desafio de ensinar não só Rogério, mas todos os alunos da turma, que o respeito mútuo e a escuta atenta das ideias publicamente expressas, por qualquer um, são valores importantes na aula de Matemática.

Ensinando para e através da constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático

Foco-me nesta secção sobretudo no trabalho de Rebeca nas fases de actividade colectiva, ou seja, desenvolvida com a globalidade da turma, procurando destacar aspectos prioritariamente relacionados com a constituição de uma comunidade de discurso matemático.

Procurando constituir uma comunidade de discurso matemático

A observação da aula em que foi explorada a tarefa *Números em círculos*, revela que Rebeca tem uma comunicação fácil com os alunos. Sorri com frequência, é espontânea e por algumas das suas intervenções, bem como pelos cuidados que colocou na constituição dos grupos de trabalho, mostra conhecer bem os alunos, quer em termos das suas características pessoais, quer do seu conhecimento matemático e das questões com que, neste âmbito, podem confrontar-se. A boa relação que mantém com a turma é evidente e o ambiente da aula é confortável e seguro para que os alunos possam, com à-vontade, exprimir as ideias que têm e pedir ajuda nos momentos em que experimentam dificuldades. Exemplo disso é o episódio *Aí está provado é que é o número do centro vezes dez mais quarenta e quatro* em que Rogério, por iniciativa própria, expressa o seu desacordo em relação à conjectura ser considerada provada, mantendo o seu ponto de vista até compreender porque o estava.

Para fazer surgir contribuições dos alunos, Rebeca recorre a questões endereçadas à turma, em geral, ou a alguns dos seus elementos, em particular, e a observações que alimentam a conversação. As respostas que obtém possibilitam-lhe obter indicações sobre os modos como os alunos estão a lidar com particularidades da tarefa e são usadas para conduzir e apoiar o progressivo desenvolvimento da aula tendo em conta os objectivos que visa. Perante estas respostas procura, antes de mais e na generalidade das vezes, compreender os raciocínios que lhes estão subjacentes, embora reconheça que, na aula em análise, nem sempre o conseguiu. Por vezes, perante respostas incorrectas ou consideradas pouco prometedoras face aos seus objectivos, reformula perguntas que colocou de modo a torná-las mais precisas ou coloca novas questões em que introduz elementos que guiam os alunos no sentido de encontrarem as respostas que lhes permitam continuar a exploração da tarefa.

Este modo de agir não significa, contudo, que Rebeca, recorrendo à sua autoridade, impeça os alunos de seguirem processos diferentes dos que ela própria tinha imaginado. Nestas situações, tenta respeitar estes processos embora, se pressente que conduzem a becos sem saída, procure encaminhar os alunos num sentido que imagina vir a facilitar-lhes a prossecução do trabalho. O comentário que faz ao episódio *Sôtora. Já encontrámos. É assim, quer ver?* — revelador de que Rebeca lamenta ter conduzido a actuação de Diogo porque não compreendeu, no momento, o raciocínio que ele tinha feito —, bem como uma intervenção subsequente à ideia, apresentada por Rogério, de usar *a*, *b*, *c*, *d*... para representar a sequência numérica do padrão, são reveladores dessa actuação: "Então vão por esse caminho mas depois vejam se não há uma maneira mais fácil, se não conseguem relacionar... Tu andaste lá perto agora Rogério, vê lá se não consegues relacionar este número com o número antes..." (TA 04/03/02, p. 17).

Na fase da discussão com toda turma, o padrão de interacção dominante foi entre a professora e alunos particulares — a quem Rebeca dá a palavra ou que, espontaneamente, apresentam contribuições — ou entre a professora e a turma. Os alunos expressam as suas ideias, dirigindo-se, na generalidade das vezes, à professora, embora, pontualmente, reajam, por iniciativa própria, a afirmações feitas por colegas. No processo de orquestração da discussão, Rebeca, por vezes, rediz contribuições apresentadas, repetindo-as ou reformulando-as de modo a torná-las mais claras. Os alunos que intervém fazem-no de forma passível de serem ouvidos por todos. Neste âmbito, surge uma justificação, apresentada por um elemento da turma, a pedido de Rebeca, e uma tentativa, que reconhece não ter dado os resultados desejados, de envolver os alunos na apresentação de explicações que permitissem chegar a um consenso sobre se a conjectura poderia ou não, num dado momento da aula, ser considera provada.

Estando consciente de que os alunos esperam que seja ela a decidir sobre a correcção das suas respostas, o que é contrário ao tipo de discurso que deseja para as suas aulas, Rebeca esforça-se, permanentemente, por não agir de modo a reforçar esta tendência. Reconhece, lamentando o facto, que acabou por ser ela própria a explicar a Rogério porque é que o processo usado pelo grupo do José constituía a prova da conjectura. No entanto, o modo como tentou conduzir o processo de resolução do desacordo expresso por este aluno, ilustra bem esta preocupação. Em particular, pretende que os alunos pensem sobre as ideias que apresentam e que decidam sobre a sua correcção ou não, através de raciocínios matemáticos e não pelo recurso à sua autoridade de professora: "Estou sempre a fazer um esforço para não ir lá eu e dizer: está certo, está errado, é assim muito bem, muito mal (risos). Esforço-me por dizer: pensem lá, para não dizer logo se está certo ou errado" (TST 14, p. 17).

Reflectindo sobre a globalidade da aula em análise, Rebeca refere que o "balanço geral foi positivo" (TST 14, p. 28). Fundamenta esta avaliação através de argumentos diversos:

- a relação afectiva que os alunos estabeleceram com a tarefa: "gostaram da tarefa, acho que foi motivadora" (TST 14, p. 28);
- o empenhamento na exploração da tarefa que observou ter existido: "de uma maneira geral, eles estiverem a trabalhar (...) estiveram empenhados a trabalhar, não houve ninguém a dispersar-se" (TST 14, p. 28);
- a natureza da actividade matemática que desenvolveram: "fizeram experiências", "todos estiveram empenhados mesmo em descobrir as relações" (TST 14, p. 28), e
- a possibilidade dos alunos trabalharem com conceitos e procedimentos matemáticos particulares incluídos currículo:

> E mesmo sem pensar em tarefa de investigação, também os obrigou a trabalhar outros conceitos, não é? Tiveram que fazer bastantes cálculos algébricos, em termos de raciocínio, de relacionarem números uns com os outros representados de forma algébrica (...) Há ali outras coisas que têm também a ver com o programa, não só em termos de tarefas de investigação, que também se desenvolvem. (TST 14, pp. 28-9)

No entanto, Rebeca salienta que "há uma série de coisas que poderiam ser melhores" (TST 14, p. 28). A sua pouca experiência e a dos alunos com tarefas com as características da que foi proposta é, a seu ver, uma possível razão para alguns dos problemas com que se confrontou: "Mas isso tem a ver também não só com a prática que eles têm a trabalhar este tipo de coisas mas também a prática que eu tenho... É mesmo isso, talvez a prática" (idem).

Problemas experienciados

Aqui podem surgir mais situações de que não estamos à espera...

As reflexões de Rebeca a propósito da conjectura formulada por Rogério ao ordenar a sequência numérica por ordem decrescente, permitem ilustrar que, a seu ver, a gestão de aulas em que se pretende que os alunos explorem tarefas de investigação, como é o caso de *Números em círculos*, constitui uma fonte de dificuldades:

> Estas são situações difíceis de gerir, em que surgem muitas situações imprevistas. Não é bem como aquelas aulas em que se levam ali as coisinhas todas preparadas, em que se sabe à partida onde é que eles vão sempre chegar e trabalha-se a partir daí — e mesmo nestas, às vezes surgem coisas imprevistas. Aqui podem surgir mais situações de que não estamos à espera e temos que lidar com elas na própria aula. E quando mais isso for trabalhado e se reflectir acerca disso, mais pode ser melhorado. (TST 14, p. 28)

As palavras de Rebeca incluídas neste extracto revelam que, na sua perspectiva, a imprevisibilidade é inerente ao próprio trabalho de ensino. Revelam, também, que ela é acrescida quando se propõem aos alunos tarefas não rotineiras que originam situações inesperadas com que há que lidar no momento, ou seja, em que há que identificar rapidamente como reagir e responder a algo em que não se tinha pensado. Como mostra, em particular, a análise relativa ao episódio *Não tinha pensado que eles iam ordenar os números por ordem decrescente*, há que enfrentar as incertezas inerentes a situações em que se percorrem caminhos, que conjuntamente, se vão construindo com os alunos à medida que todos vão caminhando. Revelam, ainda, que, a seu ver, é pela prática de trabalhar com tarefas de investigação e pela reflexão sobre a actividade desenvolvida que o trabalho de ensino pode ser melhorado.

Mas podia pô-los, de algum modo, a confrontarem-se mais uns com os outros...

A colocação de questões aos alunos é, como anteriormente referi, um meio que Rebeca usa para fazer surgir as suas ideias. No entanto, este meio não é, para si, suficiente para garantir a existência de discussões significativas. Sente necessidade de mudar os modos de interagir com os elementos da turma de modo a conseguir que haja, entre eles, um maior confronto de ideias. O contexto em que profere a frase “ainda centro as coisas todas um bocado em mim”, bem como a entoação que a acompanha, evidenciam bem a insatisfação que sentiu por, nesta aula, ao ter conduzido muito, do seu ponto de vista, a actividade dos alunos, ter dificultado a emergência de oportunidades para confrontarem uns com os outros as ideias que apresentaram:

> Se calhar podia tê-los [os alunos] posto mais... mas isso é que é o mais difícil... porque ainda centro as coisas todas um bocado em mim, não é? Eu é que estou ali a... Está bem que tenho que fazer perguntas, não é? Mas podia pô-los, de algum modo, a confrontarem-se mais uns com os outros... Lançar mais para eles... para eles próprios se contestarem uns aos outros. (TST 14, p. 16)

Ser capaz de comentar as ideias dos alunos de modo a fazer surgir e alimentar uma conversação matematicamente significativa é, assim, uma função que, para Rebeca, parece complementar a colocação de questões, um dos papéis que considera dever desempenhar. A aprendizagem desta função não é, no entanto, tarefa fácil. Requer que se aprenda a decidir, tendo em conta o que se ouve em cada circunstância concreta, o que calar, o que dizer, quando o dizer e a quem o dizer:

> Por exemplo, quando põem por ordem decrescente, podia ter arranjado maneira de pôr outro a ver que aquilo... mas eu é que os conduzo muito. Tento não dizer as coisas mas vou fazendo perguntas, tento não dar a resposta mas vou fazendo perguntas pequeninas que os vão conduzindo. (TST 14, p. 16)

Mesmo consciente de que apesar de tentar “não dizer as coisas” vai conduzindo os alunos através das “perguntas pequeninas” que lhes vai fazendo e do desconforto que esta situação lhe provoca, Rebeca sente que modificar “uma tendência enorme para dizer está certo ou errado, ou não é assim” (TST 14, p. 17) de modo a conseguir que os alunos interajam mais uns com os outros e tenham um outro papel no discurso que se desenrola na aula, lhe exige um esforço constante:

> Eu hoje estive a esforçar-me por não dizer.... acho que estou sempre... é constante. (...) Há uma tendência enorme para dizer está certo ou errado, ou não é assim. E eu tento controlar-me (...) E às vezes para não fazer isso fujo dos alunos. Por exemplo aqui nos grupos para não estar a dizer mais coisas tentava fugir para outro grupo. Afastava-me logo que era para não ter a tendência de fazer tudo... (TST 14, p. 17)

Incentivar e facilitar o confronto de ideias passa, por outro lado, por encontrar equilíbrios para que as conversações ocorram sem que as vozes, em particular de alguns alunos, se sobreponham de tal modo que silenciem as vozes de outros. Sobretudo quando há elementos com as características de Rogério, que quando quer compreender algo apresenta "as suas quinhentas perguntas" (TST 14, p. 26) mesmo que os colegas também queiram colocar questões, encontrar estes equilíbrios não é tarefa fácil:

> O Rogério é muito interveniente. Nas aulas tenho às vezes que o mandar calar porque se não... e mesmo os outros às vezes põem-no na linha. Dizem-lhe: *Deixa ouvir*: E ele está logo a dar respostas e a querer perguntar e a querer saber se é assim e se é assado. É um aluno muito participativo mas difícil de gerir na aula com os outros todos. Se não tenho cuidado monopoliza as coisas todas. O Rogério é assim. (TST 14, p. 8)

Rogério tem, na turma, o estatuto de bom aluno e tende a dominar as discussões dificultando, assim, que a voz dos colegas seja ouvida. Rebeca, não só nesta aula, mas também noutras ocasiões, tenta contrariar esta tendência o que não é simples de conseguir uma vez que pretende manter a abertura necessária para todos os alunos poderem apresentar contribuições espontâneas que considerem relevantes.

Quanto menos dirigirmos, mais tempo perdemos; quanto mais dirigirmos, mais tempo poupamos...

A reflexão de Rebeca sobre a opção de responsabilizar os alunos por, num primeiro momento, interpretarem sozinhos a tarefa que lhes foi proposta só intervindo no caso de ser solicitada, permite evidenciar um dilema com que se parece ter-se confrontado não só ao preparar esta aula, mas em muitos outros momentos da sua prática:

> Eu no início tinha duas hipóteses. Podia ter lido a tarefa com eles e eles perceberem. Mas optei mesmo por lha entregar sem a ler porque queria que eles também trabalhassem em termos de interpretação, não é? Que fossem eles a interpretar a tarefa. Isso tudo leva mais tempo. Mas foi uma opção. Achei que deviam ser eles. (...) acho que é importante eles conseguirem interpretar o que têm que fazer. É que é das tais coisas. Nós poupamos tempo mas também dirigimos mais. Quanto menos dirigirmos, mais tempo perdemos; quanto mais dirigirmos, mais tempo poupamos. Agora depende da opção que tomarmos (risos). (TST 14, pp. 30-1)

Rebeca sabe que "dirigir mais a actividade dos alunos" torna mais rápida esta actividade, mas sabe, também, que o custo desta actuação é relegar para um plano secundário objectivos que considera importantes. A opção que tomou neste momento da aula revela que privilegiou a autonomia dos alunos à rapidez na compreensão da tarefa que, do seu ponto de vista, poderia ter sido conseguida se a lesse com os alunos e os ajudasse a compreendê-la. Noutras ocasiões, as suas decisões vão em sentido contrário a este, como aconteceu, em particular, quando a aula se aproximava rapidamente do final e pretendia "poupar tempo" para conseguir a apresentação da prova algébrica da conjectura, um dos objectivos da sua agenda de ensino para a aula.

É a consciência de que as suas acções enquanto professora — que deseja não serem demasiado condutoras do pensamento e actividade matemática dos alunos — podem entrar em conflito com o tempo previsto, quer para os alunos explorarem e discutirem uma tarefa particular de acordo com a planificação que faz do seu trabalho, quer, num sentido mais amplo, com o tempo necessário para que possa ajudá-los a aprender os tópicos matemáticos incluídos no currículo, que permite a Rebeca lidar com este conflito e decidir, em cada momento da sua prática, qual a opção a tomar de modo a prosseguir os objectivos que, na altura, pretende valorizar.

A propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas*

A tarefa *À procura de dízimas finitas* foi proposta à turma em 17/10/02, aula que constitui a 12ª de Rebeca gravada por mim no âmbito do projecto de colaboração e a primeira observada na sua segunda fase. No momento em que é leccionada, os alunos frequentam o 9º ano de escolaridade e a tarefa surge integrada no tema *Números Reais*. Entre a aula em que esta tarefa é apresentada aos alunos e aquela em que trabalharam com *Números em círculos* passaram-se cerca de sete meses.

Rebeca seleccionou *À procura de dízimas finitas* a partir de uma pesquisa na *internet*. Apresentou-a numa das sessões de trabalho da equipa do projecto por considerar que era adequada para trabalhar determinados conteúdos curriculares que pretendia leccionar no momento e também porque, face à sua natureza, intuía ser potencialmente desencadeadora de argumentação matemática.

A tarefa *À procura de dízimas finitas* (anexo 12) integra o conjunto de materiais construídos no âmbito do projecto *Explorar e Investigar para Aprender Matemática* (APM, 2000). Em traços gerais, apela à exploração de casos particulares tendo em vista a descoberta de regularidades, à formulação de conjecturas e à sua posterior avaliação e prova. Numa primeira etapa, e depois de apresentados dois exemplos de fracções do tipo 1/n ($n \in \mathrm{IN}$), que originam, num caso, uma dízima finita e noutro uma dízima infinita, solicita-se aos alunos que indiquem outras fracções do mesmo tipo que correspondam a dízimas finitas e que formulem conjecturas sobre as fracções que as originam. Numa segunda etapa, pretende-se que os alunos investiguem se as conjecturas formuladas se mantêm para fracções com numeradores diferentes de 1, procurando-se, deste modo, alargar o estudo anteriormente feito.

Panorama geral sobre as aulas

A exploração da tarefa iniciou-se em 17/10 e prosseguiu durante toda a aula de 21/10 e grande parte da aula de 24/10. No total os alunos trabalharam nela durante cerca de 205 minutos[53]. Ao propô-la aos alunos, Rebeca procurava que "formulassem conjecturas e as refutassem ou provassem e que tomassem consciência desse processo" (TST 38, p. 38). Em particular, pretendia "verificar que as fracções da forma 1/n que originam dízimas finitas são da forma $1/2^n x5^p$ (...) e [que] se o numerador não for 1, a fracção não é irredutível" (idem). Durante a primeira aula decide investir num objectivo que, embora na sua perspectiva esteja implícito nos que anteriormente definiu, ganha, pelo decurso da acção, uma relevância acrescida: "O meu objectivo era que eles percebessem o que era um contra-exemplo para aquela conjectura, que não era uma fracção ao acaso. E a aluna não me estava a dar um contra-exemplo" (Rebeca, idem, p. 40). Pressentindo a existência de dificuldades significativas com a noção de contra-exemplo, decide investir aí os seus esforços uma vez que o que estava em causa era "tentar clarificar para os alunos o processo de formular conjecturas e como é que nós as contrariamos mesmo" (idem).

As três aulas tiveram focos e estruturas diferentes, tal como foram diferentes as modalidades de trabalho adoptadas e a sua articulação. A primeira aula centrou-se na formulação e apresentação de conjecturas. Na segunda iniciou-se a produção da prova de uma conjectura não refutada, actividade que se prolongou para a terceira aula. Em todas houve fases de discussão com a turma, embora a sua duração e localização tenham sido variadas. A primeira e a segunda incluíram, também, momentos de trabalho em pares ou em grupo.

Aula de 17/10/02

Nesta aula podem distinguir-se três partes, a primeira das quais muito breve. Rebeca começa por solicitar aos alunos que se organizem em grupos, distribui-lhes uma ficha com o enunciado da tarefa, certifica-se de que dispõem de calculadoras e pouco tempo depois passa-se a uma segunda parte da aula, a mais longa, em que os alunos trabalham em grupo. Focam-se na compreensão da tarefa, na exploração de fracções com o objectivo de seleccionarem as que originam dízimas finitas, na

[53] A aula de 21/10 teve uma duração de 45 minutos e as restantes de 90.

observação dos exemplos seleccionados de modo a identificarem regularidades que lhes permitam descobrir conjecturas e no teste dessas conjecturas através da procura de contra-exemplos.

Na terceira parte, que encerra a aula, a modalidade adoptada é o trabalho com toda a turma orientado por Rebeca. A sua finalidade é a apresentação, pelos grupos, de todas as conjecturas formuladas ou em vias de formulação, bem como a descrição e análise do processo que permitiu refutar aquelas que foram consideradas falsas.

A aula termina com a solicitação aos alunos de que, em casa, elaborem um registo escrito, a entregar em 21/10, com as conjecturas formuladas nos seus grupos, incluindo as já refutadas e a justificação desta posição. Rebeca indica, ainda, que deverão tentar aprofundar as descobertas relativas a regularidades existentes nos denominadores das fracções que originam dízimas finitas, que estavam a ser feitas quando a aula terminou, e que, até ao momento, não tinham sido contrariadas pela apresentação de contra-exemplos.

Aula de 21/10/02

Estruturalmente, esta aula organizou-se em três partes principais. Numa primeira, Rebeca, recorrendo à projecção de acetatos, começa por apresentar as várias conjecturas recolhidas de trabalhos dos alunos, bem como os contra-exemplos que tinham permitido refutar algumas delas. Posteriormente, apoiando-se nas descobertas feitas por um dos grupos e comunicadas à turma no final da aula anterior, faz uma apresentação, organizada em três grupos, de várias fracções que originam dízimas finitas, bem como da decomposição dos seus denominadores em factores primos: num grupo inclui as que têm por denominador uma potência de 2, noutro uma potência de 5 e num terceiro o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5. Rebeca usa esta apresentação para recordar algumas regularidades que tinham sido observadas na aula anterior e, em seguida, desafia os alunos a formularem uma conjectura que, tendo em conta estas regularidades, permita descobrir as fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas. Pretendia que chegassem a um enunciado indicador de que no denominador de fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas apenas podem aparecer só potências de 2, ou só potências de 5, ou o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5 (conjectura "c. pot·")[54].

Na segunda parte da aula, depois de sugerir aos alunos que escrevam, sob a forma de fracção decimal, algumas dízimas finitas, que decomponham os seus denominadores em factores primos e que analisem o tipo de números que aí surgem, Rebeca propõe-lhes trabalharem em pares com o objectivo de encontrarem uma justificação para a referida conjectura. Já perto do final, inicia-se a terceira parte cujo foco é a apresentação à turma, feita por um dos grupos, de um início de justificação baseado na análise de um exemplo e sua discussão.

Aula de 24/10/02

A exploração da tarefa *À procura de dízimas finitas* foi dada por concluída, nesta aula, ao fim dos primeiros setenta minutos. Os restantes vinte foram dedicados ao tema *Valores aproximados*.

A modalidade de trabalho adoptada foi o trabalho com toda a turma que em várias ocasiões se revestiu da forma de uma discussão, orquestrada por Rebeca, em que procurou não só fazer emergir as ideias dos alunos, como desencadear formas de interacção que levassem à análise, pela turma, de sugestões apresentadas. Em termos de estrutura, podem identificar-se, na parte da aula destinada à exploração da tarefa, quatro partes principais.

Numa primeira parte, através de um modo afirmativo de discurso, Rebeca recorda a questão a que os alunos procuravam responder — quais as fracções do tipo 1/n que dão origem a dízimas finitas? — a conjectura que, até ao momento, tinha resistido a tentativas de falsificação e as tentativas de prova desta conjectura que tinham começado a ser apresentadas na aula anterior depois dos alunos terem

[54] Manterei a designação "c. pot." para a conjectura com um conteúdo equivalente a este cujo enunciado foi construído pela turma, embora a forma deste enunciado não seja exactamente coincidente com este.

analisado casos particulares de fracções decimais e de se ter clarificado que a expressão $k/10^n$, com n e k números inteiros, representa todas as dízimas finitas.

A segunda parte inicia-se quando desafia os alunos a analisarem se as fracções do tipo $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n x 5^p$, com n e p números inteiros, "estão contempladas em $k/10^n$" (TA 24/10/02, p. 2). Este desafio dá origem a um conjunto de interacções que conduz à constatação deste facto e à sua justificação.

A terceira parte da aula tem na sua origem uma questão, colocada por Rebeca à turma, focada em como transformar fracções do tipo $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n x 5^p$ em fracções do tipo $k/10^n$ o que permitiria garantir que representavam, efectivamente, dízimas finitas, tal como tinha sido conjecturado na aula anterior. Começa por ser discutido o caso $1/2^n$ e uma vez clarificado o processo algébrico de transformação deste caso em $k/10^n$, há alunos que indicam, sem dificuldade alguma, como é que partindo de $1/5^n$ se pode chegar a $k/10^n$. Transformar $1/2^n x 5^p$ numa fracção decimal é, para a generalidade da turma, um processo bem mais problemático em que enfrentam várias dúvidas e questões, derivadas, fundamentalmente, de uma sugestão apresentada e, veementemente, defendida por um aluno. A prova algébrica deste caso é produzida a partir de interacções que Rebeca estabelece com a turma quando decide seguir esta sugestão e considera que está compreendido, pela turma, o raciocínio que ela envolve.

Na quarta parte da aula, Rebeca, recorre, de novo, a um modo de discurso predominantemente afirmativo e apresenta um balanço reflexivo sobre o trabalho realizado nas três aulas em que foi explorada a tarefa, articulando-o e relacionando-o com a natureza do trabalho dos matemáticos. Para ilustrar o que vai dizendo recorre, frequentemente, a memórias de situações vividas nas aulas. No balanço que apresenta, destaca, em especial, o caminho percorrido pela turma, as principais etapas do processo de exploração da tarefa e o valor da actividade de formulação de conjecturas. Usa a importância desta actividade como justificação, que apresenta aos alunos, para a decisão de, no futuro, solicitar relatórios sobre o trabalho que irão desenvolver nas aulas em que lhes irão ser propostas tarefas de investigação.

Embora, a exploração da tarefa tenha sido dada por concluída decorridos 70 minutos desta aula, Rebeca considera que nem todos os objectivos previstos foram atingidos:

> Em termos de objectivos para estas aulas eu tinha aqui: verificar que as fracções da forma 1/n que originam dízimas finitas são daquela forma $1/2^n x5^p$. E o outro é se o numerador não for 1 a fracção não é irredutível. A primeira acho que acabou por ficar provada e a segunda não ficou provada explicitamente mas implicitamente acabou depois por ficar com aquela história do *k*. Só que não ficou bem claro para os alunos que tinham provado essa. Ficou para depois discutirem. (TST 38, p. 38)

Este extracto faz referência à segunda questão incluída no enunciado da tarefa que tinha por objectivo a investigação de se as conjecturas formuladas para fracções do tipo 1/n se manteriam para fracções com outros numeradores. Embora durante a segunda parte desta aula, os alunos tivessem sido confrontados com fracções que não estavam na forma irredutível e tivessem discutido em que condições é que uma fracção do tipo $k/10^n$ poderia originar fracções do tipo $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n x5^p$, Rebeca apercebe-se, já depois de ter apresentado o balanço reflexivo sobre o trabalho realizado e referido a necessidade futura de relatórios escritos, que não tinha sido explicitamente analisada esta questão. Decide, no entanto, não o fazer nesta aula. Opta antes por desafiar os alunos a pensarem nela e a discutirem as explorações e descobertas que forem fazendo ao longo das aulas subsequentes:

> Vocês quando estão a investigar vão registando as coisas que são importantes para pôr no relatório, está bem? E terminamos. Ah, não terminamos nada. Havia uma segunda pergunta na ficha. Essa segunda pergunta fica como desafio e eu espero que seja como desafio mesmo para toda a gente. Não é como os outros relatórios que eu pedi para casa e só quatro pessoas é que fizeram. Vão pensar nisso e podem até em várias aulas vir ter comigo, perguntarem-me coisas, discutir comigo a tarefa. Vão pensar isso e eu vou-vos perguntando também nas próximas aulas o que é que vocês acharam e o que é que exploraram. Mas é para explorar mesmo, está bem? Quem sabe se eu mais tarde não incluo isso noutro relatório qualquer. Logo se vê. E damos por concluída esta tarefa aqui na aula. Vamos para os valores aproximados. (TA 24/10/02, p. 17)

Nas reflexões apresentadas, Rebeca não explicita o porquê da decisão que toma. Poder-se-á, no entanto, conjecturar que uma das possíveis justificações se enraíza no facto de ter sido bastante ultrapassado o tempo previsto para a exploração da tarefa e de se sentir constrangida por pressões relacionadas com a necessidade de trabalhar outros conteúdos matemáticos incluídos na sua planificação do currículo. Com efeito, indica ter ocupado mais tempo com a tarefa do que inicialmente tinha pensado, opção que tomou face a objectivos que, na altura, considerou serem prioritários:

> Eu tinha pensado que aquela tarefa era para aquela aula de 1h 30m e depois decidi avançar para mais uma e ainda para mais outra. Acaba por ser uma decisão, não é? Eu podia ter decidido acabar ali e pronto, ou deixar para trabalho de casa. Pronto, mas achei que era importante aquela parte da discussão, por exemplo. E isso prende-se com dificuldades, nomeadamente a tal dificuldade deles perceberem a importância das conjecturas que são formuladas e que contrariam. Eles abandonam e não registam, esquecem, não é? (TST 38, p. 38)

Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas

Esta secção incide sobre o trabalho realizado durante a primeira aula em que foi explorada a tarefa e a primeira parte da segunda, alturas em que foi desenvolvida a actividade relacionada com a formulação e avaliação de conjecturas.

Acompanhando, nos grupos, a formulação de conjecturas

Os grupos iniciam animadamente o trabalho, passado pouco tempo da distribuição da tarefa e após breves intervenções pontuais de Rebeca destinadas a clarificar aspectos relacionados com a compreensão do seu enunciado e feitas na sequência de solicitações de alguns alunos. Empenham-se, com entusiasmo, na transformação de fracções em dízimas usando como recurso a máquina de calcular.

Tal como aconteceu em muitas outras aulas, durante esta fase Rebeca circula pela sala com os objectivos de conhecer o trabalho que vai sendo realizado, de incentivar a sua prossecução e de recolher informações que lhe permitam delinear estratégias de acção futura. Um exemplo que ilustra este último objectivo é a sua opção de pedir aos alunos que, no final da primeira aula, entreguem um registo escrito com as conjecturas formuladas quando constata que vários não fazem qualquer anotação sobre a actividade que desenvolvem e que muitos não dão valor às conjecturas que refutam: “Tentei ultrapassar esse facto [os alunos não valorizarem as conjecturas que refutam] com o pedido da folha com as conjecturas e com a conversa no final das três aulas” (TST 38, p. 38).

Em traços gerais, a actividade dos grupos — que foi acompanhada por Rebeca e, pontualmente, por mim própria na sequência de apelos de alguns alunos — rege-se pelo seguinte ciclo: escolha de fracções e sua transformação em dízimas, observação dos números decimais obtidos, selecção das fracções que originam dízimas finitas, tentativas de identificação de regularidades nos denominadores destas fracções, enunciado de conjecturas quando conseguem descobrir regularidades, teste destas conjecturas através da procura de exemplos que as contrariem e abandono/reformulação das conjecturas que conseguem refutar. Findo este processo, o ciclo inicia-se com a exploração de novas fracções e/ou procura de novas regularidades.

Esta actividade dos grupos parece indiciar que, neste momento, a generalidade dos alunos não só já interiorizou o significado e estatuto de conjectura como se apropriou do processo que permite formulá-las: “O estatuto da conjectura e como se formulam conjecturas parece-me que, de uma maneira geral, já perceberam. Também já perceberam que a partir do momento em que provam uma conjectura já podem usá-la. Já não é conjectura” (Rebeca, TST 39, p. 39, 02/01/03).

Há, no entanto, um grupo em que ainda se manifestam dificuldades relacionadas com estes aspectos, o que, provavelmente, não é independente de dele fazerem parte Susana e uma outra aluna não integradas na turma no anterior ano lectivo. O episódio *O que é uma conjectura?* ilustra como Rebeca lida com o desconhecimento, por Susana, do significado de conjectura.

O que é uma conjectura?

1. Rebeca: (...) Ah, ela não sabe o que é uma conjectura... O que é uma conjectura?
2. Jacinta: Não é uma coisa que a gente tem que provar?
3. Rebeca: Pode-se provar ou não. Se provares que é verdadeira continua a ser conjectura?
4. Jacinta: Não. Mas como é que se prova que 2 mais 2 são 4?

5. Rebeca: Ah, isso é uma coisa muito complicada para vermos aqui (risos) partimos do princípio que é verdade (risos) (...) Não registaram ainda nenhuma conjectura? Digam-me uma conjectura que tenham formulado, para ver se ela percebe o que é uma conjectura.

(silêncio)

6. Rebeca: Com base... Vocês têm que fazer experiências ou não? Chegam aí e formulam uma conjectura...
7. Aluna: Não, não. Temos que fazer várias experiências.
8. Rebeca: E com base nas experiências há alguma coisa que vocês observam...
9. Aluna: Pode ser uma relação qualquer...
10. Rebeca: E então vocês formulam uma conjectura... Acham que... imaginam, por exemplo que... Se, por exemplo, o denominador for um número primo dá sempre dízimas finitas... É uma conjectura... Isto é um exemplo de uma conjectura. Enquanto não provarmos permanece conjectura, mas vamos tentar testar para ver se a conseguimos contrariar ou não...

(TA 17/10/02, pp. 1-2)

Ao constatar o desconhecimento de Susana sobre o significado de conjectura, Rebeca questiona o grupo parecendo procurar, através da pergunta que coloca (§1), uma explicação que clarifique este significado. Perante a sua inexistência usa a questão de Jacinta (§2) para mostrar que o significado de conjectura não está dependente da existência de uma prova. Paralelamente, recorre a uma nova questão para averiguar qual o conhecimento desta aluna sobre o estatuto de uma afirmação provada e para tornar visível este estatuto para as colegas (§3). A intervenção seguinte de Rebeca (§5), por um lado, mostra uma intenção clara de focar a atenção do grupo no que está a ser analisado. Por outro lado, traduz uma mudança de estratégia em relação à via de clarificação do significado de conjectura. Com efeito, a parte final desta intervenção foca-se, já não numa explicação mais ou menos abstracta deste conceito, mas no pedido de um exemplo concreto de uma conjectura formulada que poderá ser usado "para ver se ela percebe o que é uma conjectura". Face ao silêncio do grupo, que poderá ser indiciador da inexistência de conjecturas formuladas, Rebeca tem um novo movimento de ensino centrado no próprio processo de formulação de conjecturas (§6). Na reflexão que faz sobre esta aula, não explicita o porquê deste movimento. No entanto, não é estranho conjecturar que possa estar relacionado com o destacar a importância da realização de experiências para o processo de formulação de conjecturas — “Vocês têm que fazer experiências ou não?”— e também com o indagar qual o conhecimento do grupo sobre este processo: “Chegam aí e formulam uma conjectura...”.

Usa, em seguida, a resposta de uma aluna (§7) para, implicitamente, salientar que é com base nas experiências feitas e na sua observação que se estas formulam (§8). Na última intervenção (§10), retoma o significado de conjectura, que procura clarificar pelo recurso a um exemplo adaptado à tarefa, rediz uma ideia anteriormente apresentada relacionada com o estatuto das conjecturas — “Enquanto não provarmos permanece conjectura” — e termina explicitando a necessidade de testar as conjecturas que se formulam. Posteriormente, durante a fase de trabalho em grupo, Rebeca conversou, de novo, com estas alunas sobre os significados de contra-exemplo e conjectura, bem como sobre o processo de formulação de conjecturas.

Passada cerca de metade da aula, os diversos grupos tinham já formulado conjecturas variadas que, na generalidade, tinham refutado e havia já algum tempo que a maioria dos alunos lutava com dificuldades relacionadas com a identificação de conjecturas que resistissem a tentativas de falsificação. Neste momento, Rebeca decide apresentar à turma a “sugestão de decompor os denominadores” (TST 38, p. 38). O episódio *Vou dar uma dica que não demora nada* ilustra a forma como foi apresentada e justificada esta sugestão.

Vou dar uma dica que não demora nada

1. Rebeca: Meninos, prestem lá atenção… Duarte! Desculpem lá interromper. Lídia!
2. Aluno: Sôtora, agora que a gente está a descobrir…
3. Rebeca: Agora que eles estão a descobrir isto!!… *(risos)* É para não interromper? É só um segundinho. Eu vou dar uma dica que não demora nada e vocês continuam com vosso raciocínio. É assim. É para vos ajudar a avançar. Reparem o numerador é sempre 1… Ainda estão na primeira questão. Vão aos denominadores que vocês encontraram, das fracções que deram dízimas finitas e vão ver como podem decompor os denominadores, nomeadamente pensando na decomposição dos denominadores em factores

> primos, como produto de números primos e vejam se observam alguma regularidade, está bem? Então podem continuar. Continuem lá.
>
> (TA 17/10/02, p. 2)

Fruto de anteriores experiências, Rebeca tem consciência de que não é fácil interromper o trabalho dos alunos quanto estes estão empenhados em explorarem uma tarefa:

> Outra dificuldade que eu sinto muito é a tal história de parar, quando eu os mando parar na aula porque temos que ir discutir. Eu já senti essa dificuldade antes e continuo a sentir. Por exemplo, aqui na aula de dia 17 eu digo: *Meninos, prestem lá atenção… Duarte! Desculpem lá interromper. Lídia!* [§1] (TST 38, p. 39)

Embora consciente desta dificuldade, face ao conhecimento da actividade dos grupos, da atitude de alguns alunos e do tempo que já decorreu, opta por intervir uma vez que considera que sem a sugestão que lhes apresentou "eles não conseguiam avançar. Já estavam há uma data de tempo com a tarefa e alguns já estavam a ficar desmotivados" (TST 38, p. 42). A primeira parte da sua intervenção (§3, linhas l-3) poderá ser interpretada com uma forma que adoptou, nesta situação, para lidar com os constrangimentos resultantes da dificuldade que experienciou em várias outras ocasiões. Com efeito, perante a reacção de um aluno (§2), indiciadora de que não deseja que a professora detenha as descobertas que a turma está a fazer, os primeiros movimentos de Rebeca consistem em explicitar a brevidade e intenção da intervenção — "É só um segundinho. Eu vou dar uma dica que não demora nada" —, em clarificar que os alunos terão oportunidade de prosseguirem as suas descobertas — "e vocês continuam com vosso raciocínio" — e em justificar porque a faz: "É para vos ajudar a avançar". Só em seguida passa à apresentação do conteúdo da sugestão, terminando com uma chamada de atenção para a necessidade da observação de regularidades, aspecto fundamental à formulação de conjecturas.

O trabalho de grupo prossegue focado na descoberta de conjecturas. Neste processo, a actuação de Rebeca reveste-se de formas muito diversas. Ouve, sem validar ou invalidar, o que os alunos lhe comunicam relativamente às descobertas que vão fazendo; responde a questões relacionadas com o significado de conceitos matemáticos que os alunos usam na exploração da tarefa: por exemplo, depois de uma aluna ter apresentado a definição de número primo e de lhe ter perguntado se estava correcta, a professora responde afirmativamente; ajuda a ultrapassar alguns problemas relacionados com a identificação de dízimas finitas e infinitas a partir dos números visualizados nos ecrãs das calculadoras; incentiva a partilha e explicação de ideias dentro de cada grupo; apresenta sugestões facilitadoras da prossecução do trabalho mas que não limitam ou condicionam a actividade de pesquisa dos alunos: por exemplo "pensem numa outra maneira de ver"; salienta a necessidade de registos do trabalho feito, a intervenção mais frequente; e, a partir de determinada altura, ajuda alguns grupos a organizarem os seus registos.

Lidando com a apresentação, formulação e avaliação de conjecturas

A apresentação das conjecturas formuladas durante o trabalho de grupo, bem como a sua análise e aperfeiçoamento, decorreu durante a terceira parte da aula de dia 17 e a primeira parte da leccionada em 21/10. Analisando a globalidade do trabalho que, neste âmbito, Rebeca realizou com os alunos, constata-se que foi orientado, fundamentalmente, por dois objectivos interligados: (a) a compreensão do processo de refutação de conjecturas e (b) a formulação da conjectura que indica que as fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas são aquela cujo denominador é uma potência de 2, ou de 5 ou um produto destes dois tipos de potências ("c. pot"). À medida que decorria este trabalho foram sendo clarificados vários aspectos referentes ao processo de formulação de conjecturas.

Organizo a presente secção em duas partes principais. Através da primeira, procuro ilustrar aspectos relevantes do trabalho da professora mais directamente relacionados com o primeiro objectivo. Nesse sentido, foco-me na actividade da turma centrada na apresentação e avaliação de conjecturas formuladas pelos alunos durante o trabalho de grupo ou, posteriormente, em casa, diferenciando as refutadas das que o não foram. A segunda parte incide no trabalho orientado pelo segundo objectivo que se iniciou com a apresentação, por um grupo, de regularidades observadas na decomposição, em factores primos, dos denominadores das fracções que originam dízimas finitas. Esta apresentação, desencadeou um conjunto de interacções, da iniciativa de Rebeca ou de outros alunos da turma, que conduziu a novas descobertas que depois de aprofundadas, em casa, pelos alunos e reanalisadas no início da segunda aula, vieram a conduzir à formulação, pela turma, da conjectura "c. pot.". Através do esquema representado por figura 8 procuro destacar os principais aspectos da macroestrutura da actividade desenvolvida, bem como relações entre componentes desta actividade.

Gerindo a partilha e avaliação de conjecturas formuladas pelos alunos

Rebeca dá início à partilha de conjecturas na turma salientando que devem ser apresentadas todas as formuladas, ou seja, também "as contrariadas" (TA 17/10/02, p. 3). Tornado público um enunciado, procura dar-lhes visibilidade através do discurso oral e escrito e preocupa-se com a sua compreensão pela turma. Posteriormente lida, diferentemente, com as que sabe, ou supõe[55], serem falsas ou verdadeiras. Em relação às primeiras, promove sempre a sua análise e discussão até que, no caso das falsas, sejam apresentados um ou vários contra-exemplos. Por vezes estes contra-exemplos são indicados, de imediato, pelos alunos responsáveis pela sua formulação. Outras vezes surgem fruto da discussão ocorrida na turma. As segundas, em número de duas, são tratadas de modo diferenciado como adiante procurarei fundamentar.

[55] Uso a expressão "supõe serem falsas" para evidenciar que Rebeca, fruto da sua interpretação do enunciado de uma conjectura formulada em casa por uma aluna, a inclui indevidamente no conjunto das falsas. Abordarei este aspecto na secção *Lidando com a emergência e resolução de desacordos*.

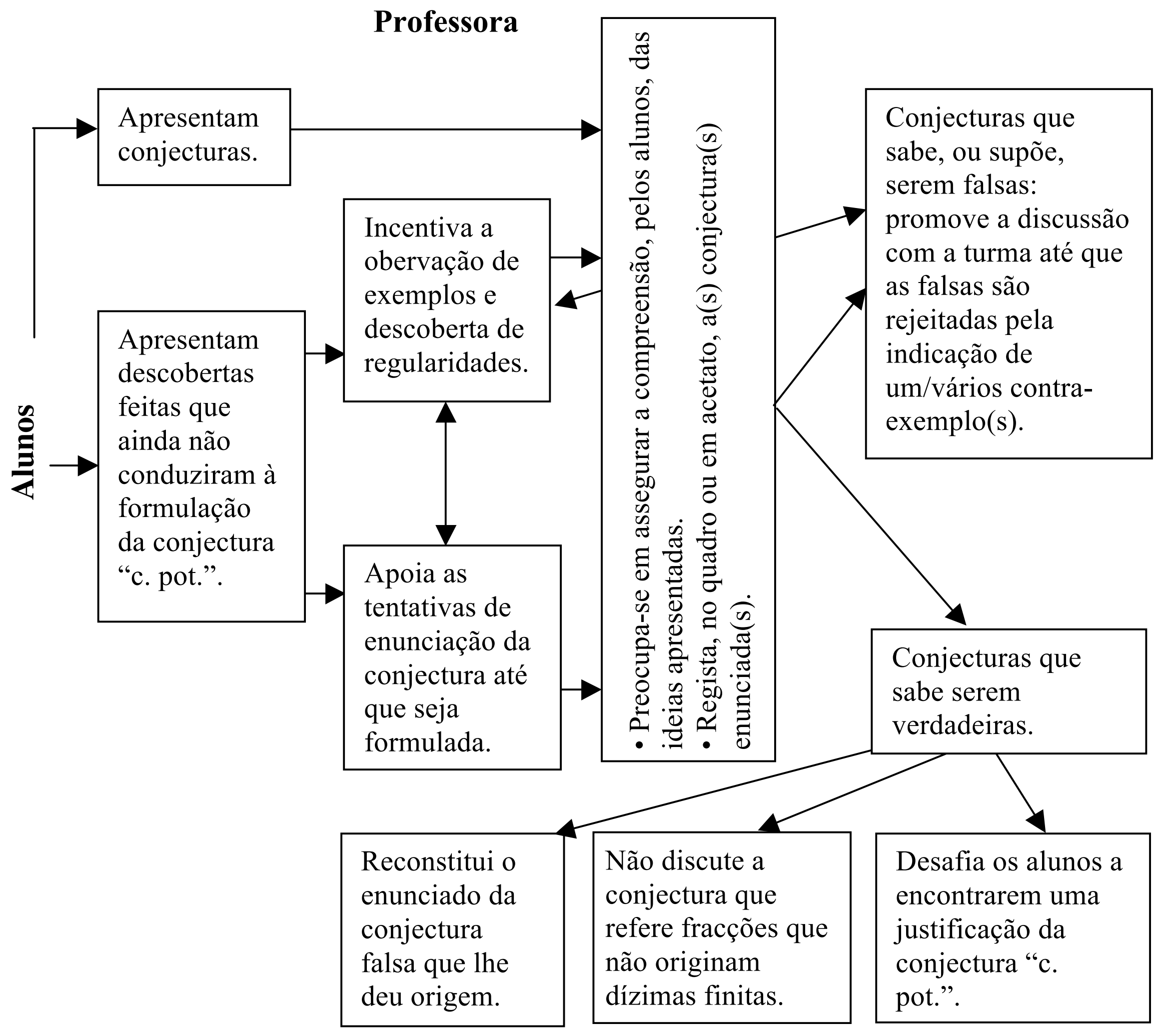


Figura 8: Apresentação e avaliação de conjecturas na aula da Rebeca: Macroestrutura da actividadedesenvolvida

Conjecturas "contrariadas"

Rebeca escolhe para iniciar a apresentação de conjecturas o grupo de Susana, aquele em que tinham surgido, durante a fase de trabalho em grupo, dúvidas e dificuldades relacionadas com este conceito. Uma parte muito substancial do trabalho desenvolvido com a globalidade da turma focado no processo de formulação e refutação conjecturas, surge na sequência imediata da descoberta enunciada por esta aluna. Aspectos significativos deste trabalho podem ser observados nos episódios (a) *Quando o denominador é primo dizem que dá uma dízima finita*, (b) *Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?* e *(c) Isto chega para justificar?* que foram seleccionados por Rebeca, enquanto objecto de análise detalhada, numa das sessões de reflexão sobre as aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas* (TST 38, p. 42).

Quando o denominador é primo dizem que dá uma dízima finita

1. Susana: *(grupo da Jacinta, Vina e Camila):* Podemos verificar que os números primos em forma de fracção correspondem a dízimas finitas.
2. Rebeca: Podemos verificar que os números primos em forma de fracção correspondem a dízimas finitas. O que é que vocês querem dizer com isso? Esperem lá. Vou escrever *(começa a registar no quadro o que as alunas indicaram)*. Esta não contrariaram ainda, não?
3. Susana: Sim.
4. Rebeca: Ah, foi uma que fizeram e contrariaram.
5. Rogério *(para Susana)*: O que estás a dizer? É fracções do tipo 1/2, 1/3, 1/5… é? Os números primos? É isso que estás a dizer?
6. Susana: Sim.
7. Rogério: Mas 1/3 é uma dízima infinita…
8. Susana: Mas nós já contrariámos… O 1/20...
9. Isabel: Oh Rogério, elas já contrariaram.
10. Rebeca: Então vamos lá ver. Quando o denominador é primo dizem que a fracção dá uma dízima finita… finita *(ênfase)*…
11. Susana: Isso foi o que nós pensávamos.
12. Aluna *(do mesmo grupo)*: Mas depois contrariámos.
13. Rebeca: E depois contrariaram.

(...)

(TA 17/10/02, pp. 3-4)

A principal preocupação de Rebeca, ao ser confrontada com a conjectura do grupo de Susana, centra-se em clarificar para ela própria e para a turma o significado desta conjectura e também o posicionamento do grupo face à sua validade. Começa por repetir a conjectura (§2), legitimando-a através desta via, e dirige a sua intervenção à turma em geral. Em seguida, parecendo aperceber-se da ambiguidade da terminologia usada, restringe ao grupo a direcção da sua próxima fala, solicita-lhe, através da questão formulada, que apresente uma explicação do significado atribuído à conjectura — "O que é que vocês querem dizer com isso?" — e, de modo a torná-la mais visível, inicia o seu registo no quadro. A elocução "Esta não contrariaram ainda, não?" dirigida, também, a este grupo, cria a abertura necessária para se tornar transparente para o resto da turma o estatuto atribuído à conjectura, conhecimento que, até este momento, era da esfera privada dos elementos que a ele pertenciam.

O movimento seguinte de Rebeca consiste em redizer, expandindo, o "sim" de Susana, articulando, deste modo, informação pressuposta (§4). Ao agir deste modo, contribui para a posição do grupo se tornar mais visível para a turma. É neste momento que Rogério, por iniciativa própria, entra na conversação, procurando clarificar e compreender a conjectura formulada: "O que estás a dizer? (...) É isso que estás a dizer?" (§5). Neste processo, a voz do destinatário é incorporada e reflectida nas elocuções de Rogério que a tornam não ambígua e a expandem através de um processo de reformulação: "É fracções do tipo 1/2, 1/3, 1/5… é? Os números primos?" (§5).

A contribuição de Rogério, funciona, para Rebeca, como um recurso que usa para relatar a conjectura enunciada por Susana numa forma mais precisa e transparente: "Então vamos lá ver. Quando o denominador é primo dizem que a fracção dá uma dízima finita… finita (ênfase)" (§10). Nesta intervenção repete e destaca, através do tom de voz que usa, a palavra "finita" enfatizando, através deste meio, um aspecto pertinente do enunciado desta conjectura. Rebeca não refere, explicitamente, porque age deste modo. No entanto, algumas das ideias apresentadas, quer quando reflecte sobre este momento da aula, quer quando analisa uma das aulas leccionadas por Anita, podem contribuir para iluminar onde se poderá enraizar este movimento.

Rebeca pretendia que os alunos se apropriassem de "como se formulam conjecturas e como se refutam" (TST 38, p. 44). Tem, no entanto, consciência que Rogério, um aluno com um desempenho matemático muito bom e com uma voz poderosa na turma mas "um bocado individualista" (idem, p. 42), se sobrepõe frequentemente aos colegas não os deixando terminar o que estão a tentar explicar:

> O Rogério diz: *Mas 1/3 é uma dízima infinita…* O Rogério quer logo perceber o que os outros dizem e farta-se de fazer perguntas logo aos outros também (...) Pois, por um lado é [isso também é interessante e importante]. Mas só que às vezes também não deixa os outros acabarem o que estão a dizer... (...) quer perceber antes mesmo dos outros acabarem de explicar. E depois quando ele já percebeu já não interessa, os outros já não precisam de dizer mais nada porque ele já percebeu, mesmo que os colegas não tenham percebido... (TST 38, p. 41)

Simultaneamente, considera que o professor ao repetir, com uma "certa entoação", intervenções de um aluno particular pode contribuir para o próprio aluno, ou outros colegas, virem a debruçar-se sobre elas:

> Há duas maneiras de repetir. Nós podemos repetir porque não se ouviu e é para os alunos ouvirem e nós podemos repetir mesmo para pôr em evidência, independentemente dos outros terem já ouvido. Mas o facto de ser repetido por nós com uma certa entoação diferente pode pôr mais evidência o que um aluno disse para ele ou os outros depois lhe pegarem. São dois objectivos diferentes para o repetir. (TST 37, p. 16)

A contribuição de Rogério (§7), ao incluir um contra-exemplo para a conjectura enunciada por Susana, podia ter proporcionado uma boa abertura para Rebeca iniciar uma discussão focada no processo de refutação de conjecturas. No entanto, mobilizando o seu conhecimento sobre o modo de ser e de estar deste aluno, opta por "esquecer", momentaneamente, a contribuição. O relato da conjectura, a repetição da palavra "finita" e a entoação com que a pronuncia, movimentos subsequentes à clarificação do seu significado, poderão ser interpretados como recursos através dos quais procura que as suas autoras retomem a apresentação da avaliação que dela fizeram, para poder iniciar-se a discussão dessa conjectura, o que, de facto, veio a acontecer (§11, §12). O episódio *Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?*[56] ilustra como prossegui a discussão.

[56] De acordo com o que indiquei no capítulo IV, o número atribuído à primeira intervenção do episódio *Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?* é o consecutivo à última registada em *Quando o denominador é primo dizem que dá uma dízima finita* pois os episódios são subsequentes.

Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?

(...)

14. Susana: Vimos que não dava com 1/16.
15. Rebeca: Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?
16. Susana: 1/16.
17. Rebeca: 1/16 contraria? 1/16 contraria aquilo que elas estavam a dizer? *(dirigindo-se à turma)* Elas disseram que se o denominador for número primo que 1/16 contraria...
18. Rogério: Não. 1/16 é uma dízima finita sôtora...
19. Rebeca: Esperem lá, esperem lá, que eu agora não estou a perceber... prestem lá todos atenção...
20. Rogério: Sôtora, o que elas estavam a dizer é que as fracções quando têm os denominadores que são números primos são dízimas finitas...
21. Rebeca: Finitas... É isso? E que exemplo é que vocês usaram para contrariar essa conjectura? *(dirigindo-se ao grupo da Susana)*
22. Susana: Metemos 1/20 e dava uma dízima finita, mas depois...
23. Rebeca: Dava uma dízima finita. E o número 1/20... O 20 é um número primo? *(dirigindo-se ao grupo da Susana)*
24. Susana: Não...
25. Rebeca: Então servia para contrariar?
26. Tânia: Mas 1/5 é e não vai contrariar.
27. Aluna *(do grupo da Susana)*: Não, mas depois podia arranjar um número primo que contrariava.
28. Rogério: 1/3.
29. Outro aluno: 1/2.

(vários alunos falam ao mesmo tempo)

30. Rebeca: Espera, espera... Arranja… Diz lá...
31. Rogério: 1/3.
32. Rebeca: 1/3. 1/3 já contrariava. Ah! Então vá lá *(continua o registo no quadro)*. Quando o denominador é um número primo as dízimas são finitas, é isso?
33. Alunos: É.
34. Rebeca: E quais foram os casos que vocês observaram que vos levaram a formular esta conjectura? *(dirigindo-se ao grupo da Susana)*
35. Susana: Fizemos 1/20...
36. Rebeca: Fizeram 1/20. Para formular a conjectura? Para formular?
37. Susana: Não. Fizemos 1/20 na resposta anterior. E depois vimos que havia números primos que davam dízimas finitas e outros não davam.
38. Rebeca: Então quais foram aqueles que deram? Calma! *(dirigindo-se a alguns alunos)* Vocês prestem atenção, agora têm que deixar as vossas coisas *(dirigindo-se ao grupo da Tânia que continua mais interessado em prosseguir a exploração da tarefa do que em participar na discussão das conclusões do trabalho do grupo de Susana)*.

(TA 17/10/02, pp. 4-5)

Rebeca começa por instituir a turma como audiência da resposta de Susana, que lhe foi inicialmente dirigida. Reformula-a alterando-a de um modo subtil, mas substantivo, o que lhe permite tornar mais clara a relevância dos exemplos no processo de refutação de conjecturas: "Viram que não dava com um exemplo" (§15). Através da questão que coloca, tenta, em seguida, reforçar a visibilidade do caso particular que permitiu ao grupo contrariar a conjectura que estava a ser analisada: "Qual é o exemplo?"(§15). Por último, através de uma mensagem que é, claramente, dirigida ao resto da turma e não ao grupo que detém a autoria do exemplo, procura, através de questões e do relato da posição deste grupo, que sejam avaliadas as ideias apresentadas e que os alunos se posicionem em relação ao conteúdo do que foi dito (§17).

As posteriores intervenções de Rebeca vão no sentido de explicitar a necessidade de compreender o que está a ser apresentado e de focar a atenção da turma na discussão (§19, §30); de averiguar, de novo, junto do grupo, qual o exemplo usado para contrariar a conjectura (§21); de indagar qual o seu conhecimento sobre o significado de número primo (§23); e tendo-se certificado de que, pelo menos, Susana tem consciência de que o denominador do referido exemplo não é um número primo (§24), de questionar o grupo sobre a possibilidade da fracção servir para refutar a conjectura apresentada (§25).

A resposta verbalizada pela colega de Susana (§27) poderia indiciar que durante o trabalho de grupo tinham encontrado exemplos de fracções com denominadores primos que lhes tinham permitido contrariar a conjectura que formularam. Contudo, Rebeca, perante as dificuldades do grupo em referir um contra-exemplo para esta conjectura, interroga-se se esta noção estará clara para os seus elementos. As suas dúvidas acentuam-se face à contribuição de um outro aluno (§29) que refere como contra-exemplo um caso que o não é. É todo este questionamento que a leva a prosseguir a discussão:

> Tive um bocado de dificuldades em perceber o Rogério, porque ele disse-me 1/3 e eu validei. Disse: *1/3. 1/3 já contrariava. Ah! Então vá lá* [§32] e continuei o registo no quadro. (...) No entanto eu não acabei a conversa por aqui. Vá lá... (risos). (...) Houve alguém na turma que disse 1/2. Pelos vistos

> ainda não tinham percebido o que é um contra-exemplo. E isto é importante. E achei que o grupo da Susana não tinha ainda percebido também. (TST 38, p. 42)

A intervenção de Rebeca "E quais foram os casos que vocês observaram que vos levaram a formular esta conjectura?" (§34) revela uma inflexão no foco do diálogo que até aqui estava a ser mantido com este grupo. A questão colocada deixa de visar a obtenção do exemplo que tinha permitido refutar a conjectura e passa a centrar-se nos casos que tinham permitido formulá-la. A resposta de Susana não é esclarecedora para a professora tanto mais que 1/20 — o caso apresentado — já tinha sido indicado pela mesma aluna quando o grupo tinha sido interpelado sobre o exemplo usado para contrariar a conjectura. É o papel desempenhado por este caso durante o trabalho realizado pelo grupo que a professora procura, em seguida, clarificar (§36).

A discussão prossegue com Rebeca continuando a procurar compreender o raciocínio que permitiu ao grupo quer formular, quer refutar a conjectura. Esta tarefa não se lhe revelou fácil. Ao reflectir sobre a aula refere, explicitamente, ter sentido dificuldades em entender as ideias apresentadas:

> No caso das alunas do grupo da Susana eu não estava a perceber era, como elas me apresentavam os tais 1/16 e 1/20 e 1/5 e não sei quê, quais é que tinham sido os exemplos que tinham servido para formular a conjectura e quais tinham sido os que tinham servido para a refutar. Tive dificuldades em perceber o que elas me diziam, o raciocínio delas. (TST 38, p. 45)

Susana indica que o seu grupo analisou três exemplos (5, 10 e 20) em que apenas um, o 5, é um número primo. Nas suas palavras, a partir daí decidiram escrever "aquilo que a sôtora escreveu ali no quadro, mas depois vimos que havia certos primos que não davam" (TA 17/10/02, p. 6). Rebeca usa esta intervenção para focar, de novo, a atenção da turma no conceito de contra-exemplo e, em particular, num caso que permitisse refutar a conjectura. Neste processo, repete informação apresentada articulando-a de modo a tornar visíveis as condições a que este caso deve obedecer: "Então dêem lá um exemplo para contrariar, de uma fracção cujo denominador seja um número primo e que não dê origem a uma dízima finita" (TA 17/10/02, p. 6).

Ouve-se 1/6, 1/3 e 1/9. O caso 1/6 é excluído pela resposta negativa que vários alunos dão à questão “6 é um número primo?” (Rebeca, TA 17/10/02, p. 6). O episódio *Isto chega para justificar?* ilustra como foi encerrada a discussão da validade da conjectura enunciada pelo grupo de Susana. Surge na sequência de Rogério e Tânia afirmarem que 1/3 contraria a conjectura e de Rebeca registar, no quadro, apoiando-se em contribuições que ouve, “1/3 é uma dízima infinita periódica”.

Isto chega para justificar?

1. Rebeca: Isto chega para justificar? Atenção. Se eu em vez de pôr 1/3 pusesse 1/9. Justificava? Também dava?

(Há alunos que dizem que sim e outros dizem que não).

2. Rebeca: Se eu em vez de pôr ali… Franco!… Se eu em vez de pôr 1/3 pusesse 1/9 também contrariava aquela conjectura?
3. Isabel: Não sôtora, porque já não estava ali um exemplo de um número que correspondia à conjectura.
4. Tânia: Não cumpria aquilo.
5. José: O 9 é um número primo mas não dá…

(reacções de discordância da Tânia e da Isabel)

6. Rebeca: O 9 é um número primo?
7. Alunos vários: Não.
8. Rebeca: O 9 é um número primo?
9. Rogério: 9?!…Não!!…
10. Tânia: Não, mas se fosse 11 já dava.
11. Rebeca: Ah! Calma! Então o que eu estou a dizer, o que eu estou a querer dizer é se basta eu dizer ali é falsa porque o 1/3 é uma dízima infinita e periódica. Eu tenho que dizer mais qualquer coisa...
12. Tânia: E 3 é um número primo.
13. Rebeca: Exactamente e o 3 é um número primo, ou podia ter dito ao contrário *(acaba o registo no quadro)*. Mais conjecturas... (...)

(TA 17/10/02, pp. 6-7)

Reflectindo sobre este episódio, Rebeca refere:

> Então para a contrariar [a conjectura enunciada por Susana] temos que arranjar um exemplo que dê origem a uma dízima infinita, mas não é um qualquer. Tem que ser uma fracção que tenha no denominador um número primo. São as duas coisas. E os alunos, alguns primeiro estavam a dar-me exemplos de fracções que davam dízimas finitas e que tinham números primos. Essas não serviam. E, por outro lado, indicavam outras que eram infinitas mas cujos denominadores não eram números primos. Também não serviam. Tinham que obedecer às duas

> condições. E a discussão toda aqui, a partir de uma certa altura, foi para tentar arranjar o tal exemplo que servia para as duas coisas. (TST 38, p. 45)

> Não parei [a discussão depois de Rogério e Tânia terem indicado 1/3] porque, para já, alguns, se calhar, não tinham percebido. Quem estava aqui mais convencido que 1/3 dava era o Rogério e a Tânia, não é? E depois não teriam percebido a tal noção de contra-exemplo. O exemplo tem que contrariar as afirmações que estão lá e aqui não basta só dar infinita. Tem que haver uma outra condição, o tal facto de ser um número primo. (...) Foi de propósito que eu escolhi um número não primo que fosse denominador de uma fracção que originasse uma dízima infinita. (...) Por isso [porque o contra-exemplo tinha que obedecer às duas condições] é que eu escrevi no quadro: e 3 é um número primo. É importante, porque se não fosse não dava para refutar. Havia aqui 1/6, tinham-me indicado já 1/6 que era infinita. (TST 38, p. 46)

Analisando conjuntamente estas reflexões e os movimentos registados no episódio *Isto chega para justificar?*, constata-se que quando os dois alunos — Rogério e Tânia — indicam que 1/3 permite contrariar a conjectura, Rebeca apercebe-se que quem está "mais convencido que 1/3 dava" são precisamente estes dois alunos. Consciente deste facto e tendo dúvidas sobre se o resto da turma teria, na realidade, percebido que não basta indicar uma fracção representável por uma dízima infinita para ela constituir um contra-exemplo para a conjectura em análise — o que teria consequências na compreensão do significado de contra-exemplo —, opta por prosseguir a discussão e escolhe, deliberadamente, submeter à análise da turma uma fracção (1/9) que corresponde a este tipo de dízima mas cujo denominador é um número não primo. Esta opção origina um desacordo entre os alunos cuja resolução conduz à rejeição de 1/9 como possível contra-exemplo. Porque considera importante destacar que a justificação da falsidade da conjectura apenas fica completa quando se consideram conjuntamente as duas condições, chama explicitamente a atenção da turma para a insuficiência de uma só (§11), valida e repete a segunda condição — "3 é um número primo" (§13) — apresentada por uma aluna (§12) e conclui a escrita, no quadro, dessa justificação: a conjectura é falsa porque 1/3 é uma dízima infinita periódica e 3 é um número primo.

A análise das conjecturas consideradas falsas, apresentadas pelos alunos na aula de dia 17 ou por Rebeca na seguinte com base na síntese elaborada a partir dos trabalhos, teve muitos aspectos em comum com a actividade desenvolvida na turma a propósito da conjectura enunciada por Susana. As diferenças que ocorreram prenderam-se, sobretudo, não com a natureza do trabalho realizado, mas com o tempo dedicado à observação e discussão de cada uma dessas conjecturas que foi inferior ao investido naquela actividade. Este facto deveu-se ao maior à-vontade que, na generalidade, os alunos que as formularam e os colegas revelaram na indicação de contra-exemplos. Neste âmbito, foram revisitadas pela turma, em geral, e por alunos particulares, ideias anteriormente discutidas, o que proporcionou novas oportunidades de compreensão nomeadamente do significado e papel dos contra-exemplos. Além disso, usou as discussões que ocorreram para clarificar noções de lógica relevantes para a formulação de conjecturas, tal como transparece nas seguintes intervenções:

> Está aqui uma palavra… Meninos! Oh Diogo! Está aqui uma palavra que é importante, que é "se colocarmos qualquer" *(sublinha o qualquer)*, porque há números pares que nós podemos pôr no denominador e que dão dízimas finitas. Há ou não há? (TA 21/10/02, p. 2)

> Daquelas que tu observaste. Estão a perceber? *(dirigindo-se à turma)* Isto é uma coisa muito importante… (...) Porque é a tal coisa, é dizer num sentido ou noutro, não é? Tu dizes que nem todas as fracções em que os denominadores acabam em 2 ou em 4 ou em 6 ou em 8 dão origem a dízimas finitas, mas que aquelas que são finitas e em que o seu denominador acaba em 2 ou em 4 ou em 6 ou em 8, este denominador é uma potência de 2. Mas isto foi num contexto particular, não é? (TA, 21/10/02, p. 2)

Conjecturas não "contrariadas"

As opções tomadas por Rebeca face às duas conjecturas que os alunos consideraram não ter contrariado foram, como anteriormente referi, diferentes. No primeiro caso que apresento, decide não promover a discussão da conjectura. No segundo regista no quadro, não o enunciado apresentado, mas antes a conjectura que esteve na sua origem rejeitada pelo grupo que a comunicou.

A conjectura que, nas palavras de Rebeca, "registei (...) no quadro mas depois não avancei com ela" (TST 38, p. 47) por "opção" (idem), surge na sequência imediata do episódio *Isto chega para justificar?* e é enunciada por Alberto. Este aluno indica que o seu grupo descobriu que "nenhum número que seja múltiplo de 3 dá uma dízima finita" (TA 17/10/02, p. 7). Posteriormente, um colega de grupo acrescenta terem também verificado não ser necessário que "todo" o denominador seja múltiplo de três, bastando que o último algarismo do número que aí figura o seja. A professora não regista no quadro esta última parte e justifica a sua actuação dizendo que é "só para avançar mais depressa para o contrário, para as conjecturas com dízimas finitas" (TA 17/10/02, p. 7). Rebeca, explicando as razões da opção tomada e, simultaneamente, reflectindo sobre ela, refere:

> Decidi avançar para as outras, mas também podia ter sido uma opção pegar nela para ver quais as fracções que à partida já não podiam ser. Mas também não tínhamos provado, não é? O que eu estou a dizer é que também podia ter pegado naquela para pensar. Se essa conjectura fosse verdadeira, à partida já saberíamos que no denominador não poderiam aparecer os múltiplos de 3. Mas por outro lado, não sei se seria bom, se não os confundiria e também não poderíamos usar esse resultado na medida em que era uma conjectura. Não estava provado. Daí ter optado por focar-me na outra. (TST 38, p. 47)

Ao ser confrontada com a conjectura de Alberto, Rebeca sabe que ela "não se pode contrariar (...) é verdadeira" (TST 38, p. 47). Sabe, também, que um resultado descoberto não pode ser usado como base de um raciocínio que se pretende validar a menos que seja provado. Ao longo do desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa esta foi, aliás, uma ideia que deliberada e recorrentemente foi abordada em muitas das discussões que ocorreram nas aulas. A professora pretende que a actividade a desenvolver não contrarie esta ideia, pelo que "pegar" na conjectura enunciada por Alberto para eliminar fracções que "não podiam ser" passaria, necessariamente, pela sua prova. Segundo refere, ao avaliar esta possibilidade, "pareceu-me que era mais difícil provar" (TST 38, p. 47) não vislumbrando mesmo o modo de o fazer sem o recurso à conjectura "c. pot." que, na altura, não estava sequer formulada: "Nem estava a ver como é que havia de provar, sem a outra, não é?" (TST 38, p. 47). Independentemente da facilidade, ou não, da produção desta prova, questiona-se, também, se desafiar a turma a reflectir sobre a conjectura de Alberto não poderia ter contribuído para confundir os alunos, uma vez que o que estava em causa, na realidade, era a descoberta de conjecturas referentes a fracções a que correspondem dízimas finitas e não aquelas que não as originam.

Face aos problemas que supõe poderem surgir quando imagina outras possibilidades de acção, Rebeca considera ser de manter a opção tomada. Lamenta, no entanto, não ter retomado posteriormente a avaliação da validade da descoberta feita pelo grupo de Alberto e procura equacionar o que poderia ter feito de diferente para que, de futuro, não deixe "escapar", não intencionalmente, conjecturas que considere merecer a pena analisar:

> Se calhar faltou... olha, agora estou aqui a pensar... se calhar tinha sido bom no final ter o tal registo, sermos muito organizadinhas e no final, depois da outra estar provada, ir buscar essa conjectura e vermos que afinal até era verdadeira. Até era fácil... Perguntar-lhes se afinal estava ou não também provada... Porque depois esquecia-a! Há coisa que vão escapando no meio das coisas todas. (TST 38, p. 47)

Um registo pessoal das conjecturas formuladas e o desenvolvimento da capacidade de auto-organização surgem, para Rebeca, como recursos que podem ajudar a evitar que, no meio dos múltiplos acontecimentos que surgem na aula, "escapem", sem se dar conta, aspectos considerados importantes: neste caso revisitar uma conjectura anteriormente enunciada e desafiar os alunos a averiguarem a sua validade depois de provado um resultado que, do seu ponto de vista, lhes permitiria, facilmente, chegarem à conclusão que era verdadeira. As descobertas feitas, por um lado, provocaram-lhe alguma inquietude face à desvalorização, embora não intencional, da conjectura de um grupo, fruto do esquecimento em que caiu, mas possibilitaram-lhe, por outro lado, um acréscimo de consciência e conhecimento para, no futuro, delinear possíveis linhas de acção.

Passando ao segundo caso. Foi a explicação do percurso seguido pelo grupo de Tânia para formular a conjectura que apresentou, que permitiu a Rebeca reconstituir o enunciado daquela que lhe deu origem e que registou no quadro. O episódio *Primeiro pensávamos que todos os que fossem pares davam…* permite apoiar esta ideia e revela a conjectura comunicada por esta aluna na sequência imediata do pedido de indicação das que foram descobertas durante o trabalho de grupo.

Primeiro pensávamos que todos os que fossem pares davam…

1. Tânia: Nem todos os números pares que estão no denominador dão origem a uma dízima finita.
2. Isabel: Primeiro pensávamos que todos os que fossem pares...
3. Tânia: Davam, só que depois vimos, depois encontrámos uns que não davam.
4. Rebeca: Outra conjectura que elas formularam...
5. Tânia: Elas? Eles!...
6. Rebeca: Está bem, o grupo. Prestem atenção! Eu vou pedir uma coisa que não devia pedir... mas eles vão repetir. Não devia pedir porque vocês estavam distraídos. Não se importam de repetir? Digam lá então.
7. Francisco: Oh sôtora, isso é suposto escrever no quadro...
8. Tânia: Nós chegámos à conclusão... Nós pensávamos que todos os números que tivessem denominadores pares davam. Só que depois encontrámos um que não dava, que era o 78, por exemplo.

Rebeca escreve no quadro: Se o denominador for par

9. Tânia: Nuns casos dá e noutros não dá.
10. Rebeca: Mas inicialmente pensavam que sim, não foi?
11. Tânia: Inicialmente pensávamos que sim, mas depois encontrámos um que não dava.

Rebeca escreve no quadro: Se o denominador for par, a fracção dá origem a uma dízima finita. Pergunta se a conjectura é falsa e o grupo responde afirmativamente. Regista no quadro o exemplo que permitiu refutar a conjectura (1/78).

(TA 17/10/02, pp. 7-8)

A iniciativa da explicação do raciocínio que levou à formulação da conjectura enunciada pertence a Isabel (§2). Tânia apenas, posteriormente, começa a intervir colaborando na explicação. Observando as interacções registadas no episódio, constata-se que os alunos tinham conhecimento, fruto do padrão seguido até ao momento, que a professora registaria no quadro as conjecturas apresentadas. A intervenção de Francisco (§7) ilustra esta ideia. Na posse deste conhecimento, Tânia, embora Rebeca tenha solicitado a indicação de todas as conjecturas formuladas, independentemente de terem sido contrariadas ou não, restringe o seu discurso ao enunciado de uma que sabe não ser falsa. E quando a professora inicia o processo de registo adoptando uma formulação diferente da que antes a aluna adoptou ("Se o denominador for par"), Tânia ajusta a forma do enunciado, mas mantém, no essencial, o significado e validade da conjectura: “Nuns casos dá e noutros não dá” (§9).

Tendo em conta estas observações, pode suspeitar-se que Tânia e Rebeca tinham, em relação ao conteúdo da conjectura a registar no quadro, duas agendas opostas. A aluna pretendia que fosse passada a escrito uma conjectura não refutada, constituindo a explicação do raciocínio um meio, habitual na turma, de revelar como se pensou. Em contrapartida, a professora visava a visibilidade, acrescida pela existência de registo, da conjectura “contrariada” que esteve na sua origem, funcionando essa explicação como um recurso que lhe possibilitou a reconstituição mantendo, no entanto, a autoria no grupo.

É Anita quem destaca não ter sido registada no quadro a conjectura enunciada por Tânia que constitui, nas suas palavras, “o aperfeiçoamento de uma que o grupo refutou” (TST 38, p. 51). Neste contexto, interroga-se, e interroga a colega, se a actuação de Tânia, ao não incluir a apresentação de todas as conjecturas formuladas pelo seu grupo mas apenas a que foi reescrita em consequência da correcção de outra, não revelará que “ela, se calhar, também não está a dar o valor devido ao que refuta” (Anita, TST 38, p. 51). Rebeca não descarta esta possibilidade que não lhe tinha ocorrido até ao momento: “Se calhar, não lhes deram valor tal como os outros” (TST 38, p. 52). Simultaneamente, procura reflectir sobre o que poderá ter originado a sua actuação:

> Ah, pois houve aquela [Nem todos os números pares que estão no denominador dão origem a uma dízima finita]. Olha, estás a ver? E se calhar porque eu estava a pensar que queria que me dessem a dos pares, não me apercebi que estava aqui uma outra conjectura. (...) Mas o que é que eu pensei? Eu estava a pensar na outra, queria a outra, a das potências, nem me lembrei desta (risos). Estás a ver que está aí uma conjectura que me passou? Lá está... Não estava no meu guião, escapou... (risos) (TST 38, p. 53)

No momento em que Tânia apresenta a conjectura, a aula aproxima-se do final. Fruto do acompanhamento do trabalho de grupo, Rebeca sabe que o desta aluna foi aquele que mais avançou na descoberta de regularidades nos denominadores das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas. A descoberta da conjectura "das potências" ("c. pot.") — a outra em que estava a pensar, a que queria, quando ouve Tânia — assenta na estratégia que estava a ser seguida pelos elementos deste grupo. Várias das regularidades que permitem a sua formulação tinham já sido, por eles, identificadas. Assim, era importante existir a possibilidade de apresentarem o trabalho realizado, pois a aula prevista para a exploração da tarefa estava a esgotar-se e a turma estava ainda muito longe de a ter concluído.

Rebeca sabe, também, que vários alunos da turma não tinham valorizado as conjecturas que refutaram. Sabe, além disso, que pelo menos alguns deles tiveram dificuldades em encontrar exemplos adequados à refutação de conjecturas. Queria alterar esta situação e quando é confrontada com a conjectura de Tânia e com o raciocínio que lhe deu origem, possivelmente, porque esta preocupação se sobrepôs — "queria que me dessem a dos pares"— não se apercebeu que estava perante uma outra conjectura.

Todos estes aspectos acrescidos do facto da conjectura de Tânia não fazer parte do guião que Rebeca tinha para a aula — ou seja, do que preparou para orientar o seu trabalho — e de ser a primeira vez que propôs a exploração da tarefa numa das suas turmas — o que, em conjunto, se traduz na impossibilidade de evocar memórias que poderiam facilitar o reconhecimento do enunciado apresentado enquanto conjectura —, contribuíram para que não compreendesse e tivesse perdido — expressões sinónimas da palavra "escapar" a que recorre para expressar o seu pensamento — a conjectura comunicada por Tânia. Consequentemente, contribuíram para que se perdessem as possibilidades que poderiam advir da sua discussão se, face às circunstâncias concretas da aula, fosse este o caminho que consciente e deliberadamente tivesse decidido seguir.

Apoiando a construção do enunciado de uma conjectura

A identificação de regularidades nas decomposições, em factores primos, dos denominadores de fracções que originam dízimas finitas, inicia-se com o registo no quadro, por Rebeca, de exemplos destas fracções a partir de indicações dadas por elementos do grupo de Tânia. Os primeiros casos registados são 1/2, 1/4 e 1/8.

Diogo observa que "são todos múltiplos de 2" (TA 17/10/02, p. 8), contribuição usada para averiguar, junto da turma e dele próprio, se, implicitamente, não estará a ser formulada a conjectura "todos os múltiplos de 2 dão origem a dízimas finitas" (idem, p. 9). Embora o mesmo aluno tenha, posteriormente, indicado um contra-exemplo, ao reflectir sobre este momento da aula, Rebeca lamenta não ter aproveitado a ocasião para evocar a conjectura dos números pares, antes analisada de modo a destacar a equivalência destas duas conjecturas:

> Acho que eu aceitei coisas que eles disseram como sendo coisas diferentes. É que na ocasião parece que estivemos a falar de múltiplos de 2 como se fossem coisas diferentes dos pares. Devia ter-lhe dito: Nós não tínhamos já visto que nem todos os pares davam? Devia ter aproveitado isto dos múltiplos de 2 para dizer que era equivalente ao que tínhamos feito. (TST 38, p. 53)

Numa segunda fase é Isabel, colega de grupo de Tânia, quem se desloca ao quadro, a pedido de Rebeca, para completar os registos já por si iniciados. No final estes registos assumem o seguinte aspecto:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{160}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2x5}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^2 x5}$	$\frac{1}{5^2}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^3 x5}$	$\frac{1}{2^4 x5}$	$\frac{1}{2^5 x5}$

O episódio *Dois mais dois dá quatro; temos um dois e passou a dois ao quadrado* surge na sequência imediata do término destes registos quando Rebeca solicita a Isabel que explique as descobertas feitas.

Dois mais dois dá quatro; temos um dois e passou a dois ao quadrado

1. Isabel: Ah! 2 mais 2 dá 4; temos um 2 e passou a 2 ao quadrado *(aponta para as fracções 1/2 e 1/4)*; depois 4 + 4 dá 8 *(aponta para as fracções 1/4 e 1/8)* e passámos a ter um 2 ao cubo. Depois 8 e 8 dá 16 *(aponta para as fracções 1/8 e 1/16)* e passámos a ter à quarta. Depois 16 e 16 dá 32 *(aponta para as fracções 1/16 e 1/32)* e passámos a ter à quinta. 32 e 32...
2. Rogério: 64.
3. Isabel: Ah, não fizemos 64.
4. Rebeca: Põe aí em baixo.

5. Rogério: Olha, também dá. Acho que é 2 à sexta.
6. Tânia: E depois arranjámos duas formas. Uma para estes *(referência às fracções cujo denominador é uma potência de 2)* e outra para os que têm 5.

Vários alunos falam ao mesmo tempo.

7. Rebeca: Calma, calma. Isabel explica lá para eles que eu acho que não estão a perceber e eu acho que já sei mais ou menos o que fizeram.
8. Rogério: Isabel, podes continuar porque 64 é 2 à sexta. Eu também tenho.
9. Isabel: E depois também achámos para o 10. 5 e 5 são 10 *(aponta para as fracções 1/5 e 1/10)*.
10. Tânia: Não! Oh sôtora é assim: É 2x5, depois é 2 ao quadrado vezes 5, depois 2 ao cubo vezes 5.
11. Uma aluna: Baixa-te Tânia.
12. Isabel: Sim, mas isto começa com o 5, porque depois aparece aqui o 2 *(aponta para 2x5)*.
13. Rebeca: Vejam lá a discussão delas. Percebem?
14. Rogério: Não, porque se calhar acho que só faltava/ficava (*imperceptível*) ali 2. Isabel, oh Isabel...
15. Isabel: 5 e 5 são 10 e aparece o 2. Depois 10 e 10 são 20 e aparece 2 ao quadrado vezes 5.
16. Rogério: Pois, e depois é que continua.
17. Tânia: Depois dá com o 3 (*referência a que 20 e 20 são 40 ou seja, 2 ao cubo vezes 5*). Depois 40 e 40, 80 dava com o 4 (*referência a que 40 e 40 são 80 ou seja, 2 à quarta vezes 5*) depois mais 80 dava com o 5.

(...)

22. Rogério: Sôtora, eu fiz assim uma parecida só que não consegui explicar.
23. Rebeca: Vejam lá se os outros perceberam. Elas ali não te estão a ver bem Isabel. Ou estás na frente. Vejam lá... Estão a perceber o que a Isabel disse?
24. Rogério: Ela está a formular uma para os que não têm...
25. Tânia: Para os que têm 5 e para os que têm 2.
26. Rebeca: Uma para os que têm só potências de base 2 e outra...
27. Tânia e Isabel: Em que é o 2x5.
28. Rebeca: Em que é o 2x5. Aqui o expoente vai andando.
29. Isabel: Vai andando.

(...)

A Isabel aproxima-se da Tânia e troca impressões com ela. Entretanto o Rogério continua:

35. Rogério: Se multiplicarmos o denominador por 2, temos que andar uma casa para a frente ali em baixo. Por exemplo, sôtora, faça lá. 2 vezes 2, 4, não é?
36. Isabel *(entusiasmada):* Oh sôtora, já temos outra.
37. Rebeca: Esperem lá, esperem lá. Um de cada vez que essa não sei se ficou percebida. Ficou percebida a segunda, a do 2 vezes 5? Ficou?

(...)

40. Rogério: Então mas isso é a começar só no 10, Isabel...

41. Tânia: Mas é que nós já sabemos outra para o 5.
42. Rogério: Mas é que aparece sempre o 2!!...
43. Rebeca: Então vejam lá a outra. Calma. Então a outra. Rogério, escuta lá o que a Isabel diz. Diz para eles.
44. Isabel: 5 vezes 5 dá 25 *(aponta para 1/5 e 1/25)* e nós temos 1 sobre 5 e temos base 5 e em 1/25 temos 1 sobre 5 ao quadrado.
45. Rogério: Ah, pois é!!... Olha! Também!
46. Tânia: E o 125 dá 5 ao cubo.
47. Isabel: 25 vezes 5 dá 125 e temos 5 ao cubo.
48. Rebeca: Então vamos sintetizar essas três. Foi três coisas, não foi?
49. Isabel: Foi. Foi para o 2, foi para o 5 e foi para o 2 vezes 5.

Rebeca pede à turma para ajudar a Isabel a formular conjecturas mais gerais.

(...)

58. Rebeca: Vamos ajudar a Isabel a formular conjecturas mais gerais. A primeira coisa que ela disse... De que tipo tinha que ser o denominador na primeira regularidade que ela observou? Vânia! De que tipo tinha que ser o denominador na primeira regularidade que a Isabel observou? De que tipo tinha que ser o denominador? De que tipo tinha que ser o denominador?

(TA 17/10/02, pp. 10-2)

Isabel começa por se focar nos denominadores das fracções cuja decomposição em factores primos origina uma potência de 2 (§1). Rogério, como indica Rebeca referindo-se não só às suas intervenções neste episódio, “arranjou-lhes mais exemplos” (TST 38, p. 54), e contribuiu, através da sua actuação, para reforçar a plausibilidade da regularidade descrita (§5, §8).

Ao indicar “arranjámos duas formas” (§6), que em seguida explicita, Tânia torna visível para a turma que as regularidades apresentadas pela colega correspondem apenas a um dos tipos de descobertas feitas. A explicação do raciocínio do grupo passa a focar-se na segunda forma, ou seja, no padrão observado nas fracções que originam dízimas finitas cuja decomposição dos denominadores em factores primos inclui 2 e 5 (§9, §10, §12, §15, §17). Ao longo do processo, Rogério, ao recorrer à palavra formular que, na turma, está associada a conjecturas (§24), bem como Tânia e Isabel, ao tornarem visível o que tinham descoberto, constituíram recursos úteis para Rebeca realizar o trabalho de ensino. Com efeito, não só contribuíram para reforçar o motivo da actividade que estava a ser desenvolvida — a formulação de conjecturas que tivessem em conta as regularidades observadas —, como alimentaram o discurso com contribuições que, ao serem reditas pela professora — através de uma reformulação e expansão que permitiu tornar menos ambígua a terminologia usada (§26) e articular informação pressuposta (§28) —, permitiram clarificar o conteúdo da conjectura que se visava.

Enquanto Isabel explica à turma o raciocínio feito pelo grupo, dá-se conta da existência de regularidades que antes não tinha observado e começa a trocar impressões com Tânia que, embora no lugar, se encontra muito perto do quadro: "De repente apercebeu-se que havia mais qualquer coisa e começaram as duas, muito entusiasmadas, a interagir uma com a outra" (Rebeca, TST 38, p. 54). Rogério, tendo já compreendido as descobertas comunicadas pelas colegas, começa a questionar que elas possam representar todas as fracções que originam dízimas finitas. A objecção que levanta tem implícitos dois argumentos: os denominadores das fracções só começam no 10 (§40) e neles "aparece sempre o 2" (§42), referência implícita à exclusão de exemplos de fracções do tipo 1/n em que *n* é uma potência de base 5. Perante esta objecção, a professora opta por focar a atenção do aluno na explicação de Isabel:

> Ele [Rogério] parecia que estava a pôr em causa que as descobertas que elas estavam a apresentar representassem todas as fracções que originam dízimas finitas. E eu disse-lhe para ouvir a Isabel. Ela tinha dito que já tinham outra e a Tânia acrescentou que tinham outra para o 5. E depois foi quando a Isabel disse: *5 vezes 5 dá 25* [§44]. (TST 38, p. 55)

Na altura em que Isabel e Tânia interagem entusiasticamente uma com a outra, Rebeca está preocupada com a compreensão, pela turma, das descobertas que tinham apresentado. A conversa entre estas alunas passa-se em voz baixa, pelo que a professora não toma conhecimento do conteúdo da nova descoberta que estava a ser feita. Simultaneamente, Isabel e Tânia, ao anunciarem a sua existência, não o revelam com clareza (§36, §41). No entanto, Rebeca consegue compreender o significado do que é implicitamente dito, o que não é, certamente, independente do conhecimento que lhe advém da sua própria exploração prévia da tarefa. Foi este conhecimento que lhe permitiu interpretar as informações apresentadas por Isabel e Tânia, apesar da sua incompletude, e intuir que a objecção de Rogério poderia ser ultrapassada se este aluno ouvisse o que Isabel tinha para dizer, o que veio, de facto, a acontecer, como bem ilustra a reacção posterior deste aluno (§45).

Depois de apresentada a nova descoberta e de Rebeca ter dado visibilidade a que se estava perante três tipos de regularidades, tenta envolver a turma no que designou por "conjecturas mais gerais". Neste âmbito começa por focar a atenção na primeira das regularidades apresentadas e solicita aos alunos que indiquem "de que tipo tinha que ser o denominador" (§58).

As intervenções subsequentes ao episódio *Dois mais dois dá quatro; temos um dois e passou a dois ao quadrado*, revelam que, embora vários elementos da turma saibam que nem todos os múltiplos de 2 podem constituir denominadores de fracções que originam dízimas finitas, esse conhecimento não é suficiente para a turma formular uma conjectura tradutora da regularidade descrita. Na perspectiva de Rebeca, os alunos "não se lembravam do termo potência" (TST 38, p. 58), uma "dificuldade" (idem) de que "não estava à espera" (idem) e foi esta dificuldade que a levou a optar por intervir no sentido de evocar este conceito, embora sem o referir explicitamente:

> Ouçam lá, quando eu multiplico um número por ele próprio muitas vezes, que nome é que eu dou a isso? Quando eu faço o produto de um número por ele próprio um determinado número de vezes, que nome é que eu chamo à forma mais simples de o representar? (TA 17/10/02, p. 12)

Neste momento a aula está no final. Não há tempo para concluir a formulação da conjectura "c. pot." pelo que o trabalho relativo a este processo prossegue na primeira parte da aula de dia 24. Esta aula inicia-se com a apresentação, por Rebeca, do acetato elaborado com base nos trabalhos entregues pelos alunos. Aos exemplos aqui incluídos são acrescentados novos exemplos, a partir de indicações dadas por um elemento da turma. Neste contexto, surge um desacordo relacionado com a inclusão, ou não, de um dos casos apresentados. Uma vez ultrapassado, procura mobilizar a turma para a formulação de uma conjectura que englobe os três tipos de regularidades observadas. Perante as indecisões dos alunos é ela própria quem profere as primeiras palavras do enunciado — "as fracções que dão origem a dízimas finitas" (TA 21/10/02, p. 4) — que é completado por Tânia: "o seu denominador ao ser decomposto em factores primos tem base 2, 5, ou 2x5" (idem). É esta formulação que é registada no quadro.

O processo que Rebeca designa por "construção do enunciado da conjectura com os alunos" (TST 39, p. 6) teve por objectivo o aperfeiçoamento desta formulação de modo a tornar mais preciso o enunciado. Nas suas palavras, este processo foi "sempre feito em construção com os alunos" (idem). O significado que atribui a esta expressão pode ser intuído a partir da seguinte descrição:

> Estava a conduzir e achei que era mais fácil não falar de expoentes mas depois mudei de ideias por causa dos alunos. Eles sentiram a necessidade de falar nos expoentes. (...) Estava de certa forma a conduzir a construção, a ajudá-los, mas mudei de ideias porque eles sentiram a necessidade de explicitar os expoentes. (TST 39, p. 6)

Rebeca assume o papel de conduzir "de certa forma" a turma, ou seja, de ir encaminhando os alunos de modo a ajudá-los a progredirem no aperfeiçoamento do enunciado da conjectura mas sem que o percurso de aperfeiçoamento seja, inteiramente, determinado por si própria. Com efeito, durante este percurso as contribuições de alguns alunos, entre os quais está Rogério, vão no sentido de incluírem na formulação da conjectura uma generalização algébrica dos expoentes das potências que tinham constatado existirem nas decomposições, em factores primos, dos denominadores das fracções que originam dízimas finitas: "Sôtora, mas eu estou a dizer 2 elevado a x vezes 5. Podíamos pôr assim, porque x é um número que varia" (Rogério, TA 21/10/02, p. 5). Face a esta situação, a professora decide respeitar a vontade dos alunos e, assim, altera o caminho que previamente tinha pensado seguir, na sua perspectiva mais vantajoso porque "mais fácil". Neste âmbito, procura, através

- das questões que coloca: "E o 5 nunca tem expoente?" (TA 21/10/02, p. 5),
- das observações que faz: "Pronto. Vá. Então vejam lá a linguagem (lê o que se encontra registado no quadro): As fracções que dão origem a

dízimas finitas, no seu denominador ao decompor em factores primos aparecem potências… agora não é de base, pois não? porque já temos ali potências… do tipo” (idem),

- e da reformulação de algumas das contribuições tendo em vista tornar não ambígua a informação apresentada: “Rogério: 2x vezes 5; Rebeca: 2 elevado a x vezes 5?” (idem),

ajudar a turma a alterar o enunciado escrito no quadro até ser registada a seguinte formulação: “As fracções que dão origem a dízimas finitas, no seu denominador, ao decompor em factores primos, aparecem potências do tipo 2 elevado a *x*, ou 5 elevado a *y*, ou 2 elevado a *x* vezes 5 elevado a *y*” (TA 21/10/02, p. 5).

Esta formulação não convence, contudo, Rogério que, numa referência implícita à primeira questão da tarefa, expressa o seu desacordo: “A conjectura não responde muito bem à pergunta que a sôtora pôs naquele papel” (Rogério, TA 21/10/02, p. 5). Rebeca interpreta estas palavras como expressando a vontade de passar para a prova — “Interpretei que ele [Rogério] achava que aquilo tinha que ser provado” (TST 39, p. 11) —, pelo que considera concluído o processo de construção do enunciado da conjectura e desafia a turma a pensar sobre como poderá justificá-la.

Problemas experienciados

Uma dificuldade foi eles não terem dado importância às conjecturas que refutaram...

Na altura em que é proposta a tarefa *À procura de dízimas finitas*, os alunos sabem que a actividade matemática da aula inclui, em determinados momentos, a formulação de conjecturas e, muito frequentemente, envolvem-se, com entusiasmo, na exploração de exemplos e na identificação e descoberta de regularidades que lhes permitam formulá-las. Este modo de estar, por um lado, pode ser indiciador de que atribuem algum valor à formulação de conjecturas, mas por outro lado, não é suficiente para Rebeca. Na sua perspectiva, refutar conjecturas faz parte do trabalho matemático e é esta experiência matemática que pretende que os alunos também valorizem. Uma das dificuldades com que se confrontou nas aulas em análise, prende-se, precisamente, com a desvalorização, pelos alunos, das conjecturas que refutam: "Uma dificuldade foi o eles não terem dado importância às conjecturas que refutaram... (...) eu estive na aula e senti isso (TST 38, p. 58).

Esta dificuldade começa a ser sentida logo na aula de dia 17, durante a fase de trabalho de grupo. São vários os elementos da turma que não fazem registos sobre o trabalho que vão realizando, apesar dos esforços permanentes de Rebeca para destacar a sua importância e necessidade. Enunciam oralmente conjecturas — baseando-se em anotações, frequentemente desorganizadas e pouco pormenorizadas, de fracções e correspondentes dízimas ou apenas no que vão visualizando no ecrã da máquina de calcular — e, em seguida, tentam refutar essas conjecturas procurando contra-exemplos que também não registam. Quando o conseguem, o que aconteceu em vários casos, não fica traço algum da actividade desenvolvida. Esta atitude, para Rebeca, é indiciadora de que a actividade de formulação de conjecturas, em si mesma, não tem, pelo menos para alguns alunos, a importância que deveria ter o que, do seu ponto de vista, constitui um problema. Mais tarde, durante a terceira parte da mesma aula, reforça a ideia de que há elementos da turma que não dão valor às conjecturas que refutam. O caso de Rogério e seu colega é paradigmático:

> Pronto, mas achei que era importante aquela parte da discussão, por exemplo. E isso prende-se com dificuldades, nomeadamente a tal dificuldade deles perceberem a importância das conjecturas que são formuladas e que contrariam. Eles abandonam e não registam, esquecem, não é? E isso é bem patente no Rogério que diz que não formulou nenhuma conjectura e tinha formulado umas quantas. Só que como as refutou, não as registou e por isso achou que não fez nada. Não valoriza este trabalho. (TST 38, p. 38)

Preocupa-se, assim, ao longo das três aulas em análise, em delinear estratégias que possam contribuir para alterar a situação e, além disso, incrementar a frequência dos registos, tanto mais que considera que a sua inexistência dificulta a descoberta de novas conjecturas, o aperfeiçoamento das já existentes e a sua partilha com os colegas. Dia 17, passado algum tempo de trabalho em grupo, indica à turma que no final da aula irá recolher as folhas com as anotações relativas às descobertas feitas. Esta indicação provocou reacções de descontentamento de alguns alunos que argumentavam terem-nas feito nos seus cadernos e Rebeca opta por adiar a data de entrega para a aula seguinte. No entanto, contribuiu para que vários grupos, com mais cuidado e frequência, passem a tomar notas sobre a actividade que iam desenvolvendo.

Ao constatar, mais tarde, que ainda persistem dificuldades relacionadas com o processo de refutação de conjecturas e com a descoberta de regularidades que permitam intuir que apenas as fracções do tipo 1/n cujo denominador é uma potência de 2 ou de 5 ou o produto de ambas, correspondem a dízimas finitas, decide, por um lado, solicitar aos alunos que procurem aprofundar, em casa, o caminho que está a ser seguido. Por outro lado, opta por iniciar a aula de dia 21 com uma sistematização, previamente organizada, de todas as descobertas feitas até ao momento elaborada a partir da análise dos registos escritos que lhe iriam ser entregues pelos alunos[57]. Um dos objectivos visados com esta sistematização era, precisamente, destacar que as conjecturas que se refutam também constituem actividade matemática com valor:

> E nesse sentido, decisões que eu tomei para contrariar isso [não valorização do trabalho de formulação de conjecturas que são refutadas], foi também um bocado levar aquele acetato com as conjecturas refutadas, para insistir um bocado sobre o seu valor, e não incluir no acetato apenas aquela que não tinha ainda sido refutada. (TST 38, p. 38)

Outra das decisões tomadas para destacar a importância dos registos do trabalho realizado e, simultaneamente, o valor da actividade de formulação de

[57] Dia 17 Rebeca tinha acordado com os alunos que os registos da actividade desenvolvida seriam entregues na aula de 21, o que era incompatível com a elaboração de uma sistematização destes registos feita previamente a esta aula. Numa conversa informal no final da aula de dia 17, Rebeca e eu procurámos encontrar formas de ultrapassar a situação sem interromper a exploração da tarefa e sem alterar o dia de entrega indicado aos alunos. A análise do seu horário e do da turma permitiu-nos descobrir uma solução que Rebeca pôs em prática: Nas aulas de turnos existentes entre 17/10 e 21/10, comunicaria aos alunos que deveriam ter os trabalhos prontos a entregar no primeiro tempo lectivo da manhã de dia 21, altura em que se deslocaria à aula de História para os recolher; a análise destes trabalhos e a preparação dos materiais de apoio à síntese seriam feitas por Rebeca durante algum tempo livre que tinha na manhã deste dia e anteriormente à aula de Matemática (ROA, 17/10/02, pp. 7-8).

conjecturas, independentemente da sua validade, é o que Rebeca designa por "conversa no final das três aulas" (TST 38, p. 38). Nesta conversa recorre, em particular, ao conhecimento que tem sobre o trabalho dos matemáticos:

> Agora uma coisa que é muito importante e a que vocês não deram valor, foram as várias conjecturas que vocês formularam inicialmente. É assim, não queiram ter a ilusão de que vocês têm uma tarefa de investigação e que chegam lá e pimba! Descobrem logo ali uma conjectura que não conseguem refutar e depois vão tentar provar e está logo tudo provado que é uma maravilha. Não é assim que as coisas funcionam na Matemática. Não é assim que os matemáticos trabalham, já da outra vez eu vos tinha dito. Não são nenhuns génios que num dia acordam e dá-lhes um vaipe e descobrem os resultados! Antes de descobrirem um determinado resultado eles trabalham, exploram situações e muitas vezes chegam a resultados que não são correctos, portanto, são conjecturas que depois a seguir vêm a refutar, mas que são cruciais na evolução do trabalho. Eles não conseguiam chegar à conjectura certa sem passarem pelas outras e esse trabalho é tão importante ou mais para formularem aquela conjectura que é certinha e que depois vão conseguir provar, está bem? Eu estou a ter esta conversa com vocês... Diogo!... porque me apercebi, tenho-me vindo a aperceber... Então na aula em que vocês estiveram a trabalhar em grupo não estavam a registar nada... Que vocês não davam a mínima importância às conjecturas, que acabavam por refutar logo, formulavam e refutavam. Nem sequer as registavam, está bem? Isso é muito importante. (TA 24/10/02, pp. 16-7)

O "problema dos alunos se recusarem a registar o seu trabalho e de não darem valor às conjecturas que refutam" (Rebeca, TST 38, p. 38), originou também a opção de, no futuro, lhes solicitar a elaboração de relatórios quando forem propostas tarefas de investigação:

> E prende-se depois também com a opção de eu ter avançado com os relatórios, apesar do trabalho que eu este ano tenho. O pedido dos relatórios é uma maneira de lhes mostrar que isso é também importante e que conta para a sua avaliação. (TST 38, p. 38)

> Nas próximas tarefas de investigação que nós formos fazer vocês vão ter que fazer um relatório, mais completo... Calma (risos). Eu dou-vos logo no dia da aula o guião para vocês estarem atentos e verem o que têm que apontar. Um guião do que devem pôr no relatório. Com base nesse guião... até vos vai ajudar. Vocês quando estão a investigar vão registando as coisas que são importantes para pôr no relatório, está bem? (TA 24/10/02, p. 17)

Desde o início do projecto esta é a primeira vez que Rebeca decide solicitar aos alunos relatórios detalhados elaborados com base num guião previamente fornecido, embora em diversos outros momentos lhes tenha pedido pequenos trabalhos relacionados com as tarefas realizadas. A sua reflexão, juntamente com a intervenção feita na aula sobre a necessidade futura de elaboração de relatórios, ilustram que, para si, os relatórios são uma via que poderá permitir alterar o comportamento dos alunos face à necessidade da existência de um registo organizado das explorações e descobertas que vão fazendo, um problema com que se vinha a confrontar desde há algum tempo. Simultaneamente, constituem um meio através do qual procura lidar com outro dos problemas com que se confrontou, ou seja, a atitude dos alunos quanto à importância das conjecturas que se formulam para a "evolução do trabalho", independentemente de, mais tarde, se virem a revelar, ou não, falsas.

Em síntese, as estratégias delineadas por Rebeca para trabalho futuro ou adoptadas ao longo das três aulas para fazer face à dificuldade da desvalorização, pelos alunos, das conjecturas que refutam, organizam-se em torno de três eixos:

- Elaboração, pelos alunos, de documentos escritos sobre a actividade desenvolvida:

    a) registos feitos na própria aula, à medida que exploram as tarefas propostas: estratégia adoptada na primeira aula "com o pedido da folha das conjecturas";

    b) relatórios "mais completo[s]" (TA 24/10/02, p. 16), elaborados em casa, a partir de um guião apresentado anteriormente à exploração das tarefas e que ajudará os alunos a "estarem atentos e verem o que têm que apontar" (TA 24/10/02, p. 16): estratégia a adoptar, no futuro, quando forem propostas tarefas de investigação.

- Elaboração e apresentação, pela professora, de uma síntese organizada com todas as conjecturas formuladas pelos alunos, em que, deliberadamente, inclui as que foram refutadas, e sua discussão com a turma: estratégia adoptada na segunda aula;

- Apresentação, pela professora, de um balanço reflexivo sobre todo o trabalho desenvolvido em que explicitamente destaca o valor das conjecturas inicialmente formuladas e que depois vieram a ser refutadas, articulando esta actividade com a natureza dos trabalhos dos matemáticos ("a conversa no final das três aulas"): estratégia adoptada na terceira aula.

Eu não estava a perceber mesmo o raciocínio delas

Uma das dificuldades experienciada por Rebeca na aula de dia 17, prende-se com a compreensão do raciocínio que permitiu aos elementos do grupo de Susana formular a conjectura apresentada por esta aluna e identificar o(s) exemplo(s) que lhes possibilitou refutarem-na:

> Não estava a conseguir perceber, porque elas falavam-me no 1/20. Houve aqui uma dificuldade em eu própria perceber o que as miúdas diziam. São as tais coisas que vão surgindo, não é? Eu não estava a perceber mesmo o raciocínio delas. Queria perceber duas coisas. Primeiro qual era o raciocínio que as tinha levado a formularem aquela conjectura e depois quais tinham sido os exemplos que elas tinham usado para a contrariar. E estava a parecer-me que os exemplos que elas apresentavam não serviam nem para uma coisa nem para outra. (TST 38, p. 43)

Numa tentativa de compreender o percurso seguido pelo grupo de Susana, na sessão de reflexão sobre a aula de dia 17 debruçámo-nos, atentamente, sobre as contribuições dos vários elementos deste grupo apresentadas durante toda a actividade colectiva focada na apresentação e análise da conjectura enunciada por esta aluna. Face às muitas interrogações com que nos confrontámos, procurámos imaginar percursos de raciocínio possíveis apoiados nas intervenções e conjecturar hipóteses explicativas para algumas destas intervenções. Neste âmbito, coloco a hipótese do enunciado de Susana poder enraizar-se no exemplo usado por Rebeca para lidar com dúvidas e dificuldades do grupo sobre o significado de conjectura e sobre o processo de formulação de conjecturas: "Se, por exemplo, o denominador for um número primo dá sempre dízimas finitas... É uma conjectura... Isto é um exemplo de uma conjectura" (§10, episódio *O que é uma conjectura?*). Rebeca não elimina esta hipótese, reforça a sua plausibilidade e identifica aspectos que podem não ter ficado compreendidos durante o trabalho de grupo:

> Só se foi isso. E elas apresentaram esta (risos). Pode ser... (...) Pode ser, elas até disseram que viram que 5 era um número primo, mas depois não perceberam muito bem que tinham que a testar com outros exemplos de primos nem o que é que servia para refutar ou não servia, não é? (TST 38, p. 44)

Mais tarde, recorda que Susana "no relatório que fez até contrariou as conjecturas muito bem. Formulou e contrariou. E do grupo dela foi a única que apresentou o relatório" (TST 38, p. 44). Este comentário parece traduzir que Rebeca, embora sem explicitamente o dizer, se preocupou em avaliar se as discussões ocorridas nas aulas, tiveram consequências em relação à aprendizagem do processo de refutação de conjecturas, um dos objectivos que visava.

Temos que estar sempre atentas à organização dos exemplos e, às tantas, não estamos

Rebeca sente alguma insatisfação com o acompanhamento do trabalho de grupo durante o processo de formulação de conjecturas: "Eu acho que devia ter acompanhado melhor os grupos. Não acompanhei muito bem nesta tarefa. Nós às vezes não queremos dizer, mas se calhar certas coisas têm que ser mais ditas, se não eles não avançam" (TST 38, p. 57).

O significado que Rebeca atribui a "certas coisas" que "têm que ser mais ditas se não eles não avançam", pode ser intuído a partir do que refere quando indiquei que o grupo de Tânia foi o que mais progrediu na exploração da tarefa:

> Pois foi. E isso também se prende com uma coisa, que é a tal história de eles fazerem os exemplos. É muito importante o processo de organizarem os exemplos. Tu [Ana] deste-lhe uma sugestão que ajudou muito. Nós temos que estar sempre atentos a isso e às tantas não estamos. (...) Pois não têm [experiência de organização de exemplos com vista à formulação de conjecturas]. Se calhar, de início, também precisamos de os ajudar um bocadinho e dizer esse tipo de coisas que tu disseste. (TST 38, p. 56)

Esta reflexão faz referência a uma sugestão que apresentei ao grupo de Tânia, e apenas a este grupo, na sequência de apelos insistentes para me mostrarem o seu trabalho numa ocasião em que Rebeca estava ocupada em acompanhar a actividade de outros grupos. Nesta altura, a professora tinha já indicado a vários alunos que separassem as dízimas finitas das que não o eram e sugerido à turma que os denominadores das primeiras fossem decompostos em factores primos. O grupo de Tânia tinha já efectuado este trabalho. No entanto, referia não saber como prosseguir para encontrar conjecturas diferentes das já formuladas que diziam não permitir a descoberta das dízimas finitas. Ao observar seus registos, constatei que as fracções estavam desorganizadas, dispersas e parcialmente juntas em dois agrupamentos distintos. Num tinham incluído casos que originavam dízimas finitas e noutro tinham registado fracções com o denominador representado na referida decomposição. Na sequência desta observação, coloquei ao grupo uma questão que contém uma sugestão: Porque é que em vez de terem as fracções em dois conjuntos separados, não escrevem as fracções todas seguidas e por baixo de cada uma delas escrevem essa mesma fracção mas com o denominador decomposto em factores primos? Foi esta organização que os alunos adoptaram como é visível nas indicações que dão à professora quando pretendem que ela registe no quadro os exemplos que analisaram.

Para Rebeca esta sugestão ajudou muito. Constitui um exemplo de um "tipo de coisas" que, se necessário, devem ser ditas para ajudar os alunos a avançarem, sobretudo — como acontecia com a turma — enquanto não têm muita experiência com a organização de exemplos com vista à formulação de conjecturas. A observação da colega "a gente às vezes tem medo de dizer demais" (Anita, TST 38, p. 57), merece o seu acordo: "Pois, é isso" (Rebeca, idem). Esta afirmação, ao ter implícita uma referência à apresentação, embora não intencional, de informação cuja natureza limita fortemente, ou elimina mesmo, o essencial da actividade que pretende que os alunos desenvolvam, pode estar subjacente e explicar o "não queremos dizer" que Rebeca inclui na sua reflexão. Sente, no entanto, que, apesar desse receio, importa não "correr o risco" (idem) dos alunos não avançarem ou se desmotivarem devido à inexistência de informações que poderiam evitar a situação: "Porque se não lhes dizemos nada eles, por vezes, também não avançam, desmotivam" (idem, p. 58).

A questão, nestas circunstâncias, é escolher a altura mais adequada para intervir e ser capaz de identificar o que dizer, de modo a ajudar os alunos a progredirem mas sem limitar significativamente a sua actividade matemática. Rebeca salienta que "temos que estar atentas e ir dizendo algumas coisas se necessário" (TST 38, p. 57), ou seja, as informações não devem ser comunicadas "logo no início" (idem, p. 58) — assim que a tarefa é proposta aos alunos ou enquanto estes dão os primeiros passos na sua exploração —, mas sim à medida que vai sendo feito o acompanhamento do seu trabalho. É este acompanhamento que permite identificar "em que momento é que é necessário dizer" (idem). Neste caso concreto, acompanhar melhor os grupos passaria por apresentar a cada um ou à turma em geral, mais ou menos directamente, informações relacionadas com o processo de organização dos exemplos que os alunos iam explorando. Este processo é, na perspectiva de Rebeca, muito importante. É um aspecto a que os professores têm que estar sempre atentos e a que nem sempre estão, como aconteceu consigo própria nesta aula, o que teve consequências, do seu ponto de vista, menos positivas no desenvolvimento da actividade matemática dos alunos.

Lidando com o ensino do discurso de prova

Esta secção incide na análise da actividade referente ao processo de prova da conjectura "c. pot." que ocupou as segunda e terceira partes da aula de dia 21 e a maioria da aula de dia 24.

Desafiando os grupos a produzir a prova de uma conjectura "não contrariada"

Preparando o "terreno" para os alunos provarem a conjectura "c. pot.", Rebeca começa por recordar o trabalho anteriormente realizado sobre a transformação de dízimas finitas em fracções decimais e a conclusão, a que chegaram na altura, de que todas estas dízimas se podem representar sob a forma de uma fracção cujo denominador é uma potência de dez. Subsequentemente, indica aos alunos que se organizem em pares, que escrevam, sob a forma de fracção decimal, algumas dízimas finitas, que decomponham o seu denominador em factores primos e que reflictam sobre o tipo de números que aí surgem de modo a encontrarem uma justificação para a referida conjectura. Os comentários de vários elementos da turma denotam que parecem um pouco confusos com o que lhes está a ser pedido, o que motiva várias intervenções, através das quais procura clarificar o trabalho a realizar. Depois de Rogério expressar, várias vezes, que não compreende o deve fazer, opta por se dirigir a toda a turma. O episódio *O que é que nós queremos fazer?*, bem como as reflexões de Rebeca, ilustram algumas das preocupações que teve com esta intervenção.

O que é que nós queremos fazer?

1. Rebeca: Olhem, prestem lá atenção, que o Rogério está com dúvidas sobre o que é preciso fazer e já agora explico para todos. O que é que nós queremos fazer? Queremos mostrar que as fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas se escrevem assim (aponta para o quadro), deste modo que vocês dizem. Queremos mostrar a vossa conjectura, queremos apresentar uma justificação para esta conjectura. Estamos mais ou menos convencidos com os exemplos que encontrámos, que as fracções que dão origem a dízimas finitas são deste tipo e queremos justificar, queremos ter a certeza e queremos perceber porquê, não é? São as duas coisas. A justificação pode servir para já para nós termos a certeza absoluta que, de facto, as dízimas finitas são deste tipo que aqui está e, por outro lado, também para percebermos porque é que elas só se podem escrever assim. E eu acabei de vos recordar que as dízimas finitas podíamos escrevê-las sempre com este aspecto, na forma de uma fracção e acho que foi aí da parte do Rogério e acho que o Alberto também disse que no denominador aparecia o 10 ou 1000 ou 10000.
2. Alberto: Potências de base 10.
3. Rebeca: Diz Alberto...
4. Alberto: Potências de base 10...
5. Rebeca: O Alberto está a dizer algo muito importante para vocês. No fundo está a dizer que as dízimas finitas são dízimas em que no denominador aparecem potências de base 10. Isso é um dado adquirido, é assim que nós passamos para a forma de fracção. Então o que é que vocês têm que ver? Se sabem que as dízimas finitas, na forma de fracção, se escrevem como um número sobre potências de base 10, têm que ver se isso será ou não equivalente, a mesma coisa, que isto que vocês aqui têm *(aponta para a conjectura)*. O que é que têm que tentar mostrar? Que estas fracções (...).

(TA 21/10/02, pp. 6-7)

A propósito deste episódio, Rebeca refere:

Eu referi isso [como é que as dízimas finitas se representam sob a forma de fracção decimal] porque era preciso para a prova, não é? Depois pedi-lhes que

> fossem tentar provar, falo no papel da prova e recordo outra vez o que tínhamos feito quando andámos a transformar dízimas finitas em fracções decimais. Depois digo: *O Alberto está a dizer algo muito importante para vocês. No fundo está a dizer que as dízimas finitas são dízimas em que no denominador aparecem potências de base 10. Isso é um dado adquirido* [§5]. Eu sublinhei este dado adquirido. Se calhar ainda podia ter sido mais explicitado. Tem a ver com os conceitos, com o facto de haver coisas que não provamos, são definições, são conceitos que temos e que temos que ter sempre um ponto de partida. (TST 39, p. 11)

A primeira intervenção (§1) torna visível o auditório visado: a mensagem é endereçada à globalidade da turma e não apenas ao aluno particular que expressou as suas dúvidas. Rebeca não explicita o porquê desta decisão. No entanto, não é estranho conjecturar que se enraíze no conhecimento que tem sobre o modo de ser deste e de outros elementos da turma e também sobre os problemas que pressentiu existirem ao interagir com alguns dos pares na sequência imediata do trabalho que lhes propôs. Com efeito, sabe que Rogério é um dos alunos que mais se preocupa em encontrar sentido no que é apresentado e que quando tem dúvidas não as cala. Coloca-as a quem pensa poder esclarecê-lo, seja a professora ou os colegas. Neste caso, era Rebeca que interpelava de uma forma veemente e recorrente. Sabe, também, que nem todos os seus colegas têm a mesma actuação e que muitos preferem calar o que não compreendem. E porque, anteriormente a esta intervenção, tinha já clarificado dúvidas diversas que lhe tinham sido apresentadas, sabe, ainda, que nem todos os elementos da turma tinham entendido o trabalho que lhes estava a ser pedido. A referência a que "o Rogério está com dúvidas sobre o que é preciso fazer" parece, pois, servir de motivo a Rebeca para justificar, perante a turma, a necessidade de interromper o trabalho de pares para apresentar informações que pressentia serem úteis para todos.

Rebeca prossegue a intervenção focando-se no objectivo do trabalho e sua necessidade. Neste âmbito refere, nas suas palavras, o "papel da prova", isto é, salienta a utilidade da prova, quer enquanto meio que permite obter a certeza acerca da validade da conjectura (prova enquanto instrumento de validação), quer enquanto estratégia que possibilita progredir na compreensão do porquê da conjectura formulada (prova enquanto instrumento de compreensão).

Por último, foca-se na representação das dízimas finitas sob a forma de uma fracção cujo denominador é uma potência de 10. A sua reflexão revela que a justificação rigorosa da conjectura “c. pot.” passa por aqui. Com efeito, considera que “se não lhes tivesse dado a sugestão de transformarem dízimas finitas em fracções para observarem e verem o que acontecia, se os alunos não tivessem muito presente que as dízimas finitas são do tipo $k/10^p$”(TST 39, p. 22), dificilmente conseguiriam progredir no processo de prova. É face a tudo isto que opta por evocar as memórias da turma de modo a tornar visível a representação, sob a forma de fracção decimal, das dízimas finitas.

Ao obter de Alberto a resposta “potências de base 10” (§2), Rebeca sublinha o seu valor, recorrendo em primeiro lugar ao pedido de repetição (§3), em segundo à explicitação da sua importância (§5, linha 1) e, por último, ao relato em que expande a resposta do aluno articulando informação antes apresentada (§5, linhas 2-3). A sua reflexão denota que subjacente ao destaque dado à contribuição de Alberto, bem como ao recurso e ao sublinhar, intencional, da expressão “dado adquirido” (§5, linhas 3-4) — relativamente à qual se interroga se não deveria ter sido objecto de um maior realce — está a preocupação de ensinar aos alunos não só que há elementos do conhecimento matemático que não provamos, como é o caso dos conceitos e definições que refere, mas também que numa prova há antecedentes, hipóteses, dados, no sentido de Toulmin (1993), com base nos quais se inicia o percurso argumentativo. A continuação da intervenção, embora sem explicitamente o dizer, dá visibilidade a estes dados — “Se sabem que as dízimas finitas, na forma de fracção, se escrevem como um número sobre potências de base 10 (...)” (§5, linhas 5-7) —, bem como à conclusão a que se pretende chegar.

A explicação de Rebeca não basta a Rogério que continua a referir, persistentemente, que não compreende o que está a ser pedido. Com o objectivo de tentar ajudar a ultrapassar o impasse e depois de perguntar à professora se posso intervir, tendo obtido o seu pronto aval, dirijo-me à turma dizendo: “Então o que é que é para fazer? O Rogério continua a ter problemas acerca do que é para fazer” (TA 21/10/02, p. 7). Prossigo retomando muitas das ideias apresentadas por Rebeca, procurando destacar: (a) que “uma conjectura é uma afirmação não provada”; (b) que o trabalho realizado leva a suspeitar que “as fracções do tipo 1/n que dão origem a dízimas finitas são aquelas em que o denominador ou é 2 elevado a x, ou é 5 elevado a y ou é 2 elevado a x vezes 5 elevado a y”, ou seja, que “se pegarem numa fracção qualquer daquele tipo, por exemplo, 1 sobre 2 elevado a x” e se a “conjectura estiver certa, essa fracção dá origem a uma dízima finita”; (c) que o que temos é apenas uma suspeita e que ninguém nos garante que “no meio da infinidade de dízimas finitas não aparecerá uma fracção em que o denominador não é daquele tipo”; (d) que mesmo que a conjectura seja verdadeira importa perceber porque o é, ou seja, perceber porque é que no denominador não há-de aparecer “por exemplo, ou um 7, ou um 9, ou um 6”; (e) que a professora apresentou uma ajuda para que pudessem procurar a justificação da conjectura e (f) o conteúdo desta ajuda, para o que recorro à sua descrição que procuro clarificar com alguns exemplos de dízimas finitas: “Peguem em dízimas finitas, peguem nas que quiserem 0,321; 0,1257, sei lá, peguem nas que quiserem, transformem-nas em fracções decimais, decomponham os denominadores em factores primos e olhem bem para os denominadores” (Ana, TA 21/10/02, p. 7).

Rebeca aproveita a minha intervenção — “eu depois aproveitei-a” (TST 39, p. 12) — para incentivar os alunos a prosseguirem o trabalho, para destacar que devem procurar o que é que as fracções decimais têm a ver com a conjectura formulada e para salientar que importa descobrir “porque é que não pode aparecer lá o tal 7 ou o tal 3, ou se pode, ou não pode” (TA 21/10/02, p. 7). Os alunos começam a trabalhar em pares. Como habitualmente, circula pela sala acompanhando a sua actividade e incentivando-os, nomeadamente a decomporem em factores primos os denominadores das fracções resultantes das dízimas finitas que escolheram registar nos seus cadernos. Já perto do final da aula, poucos progressos foram feitos relativamente à produção da prova. Vários elementos da turma não se mantiveram focados no trabalho e a generalidade dos restantes não conseguiu inspirar-se nas decomposições dos denominadores para, indo além delas, iniciar o processo de justificação da conjectura. Rebeca decide que se avance para uma fase de discussão.

Gerindo a produção da prova de uma conjectura não "contrariada"

O processo de prova da conjectura "c. pot.", pela globalidade da turma, inicia-se no final da aula de dia 21 e prossegue, fundamentalmente, na de dia 24, a última em que foi explorada a tarefa.

Observando exemplos indo para além deles

É Tânia e sua colega quem Rebeca escolhe para iniciar a apresentação das conclusões obtidas durante a fase do trabalho em pares. Na sua perspectiva, "a Tânia já tinha percebido porque é que nalgumas fracções [decimais] não aparecia o 2 ou o 5 no denominador" (TST 39, p. 12), o que representa "um avanço em termos de compreender o processo da prova" (idem) da conjectura "c. pot.". Esta aluna recorre a um exemplo para comunicar as descobertas feitas e a sua explicação ilustra como é que a partir de uma dízima finita, posteriormente transformada numa fracção de denominador 100 e numerador inteiro, se pode obter, por simplificação, uma outra que lhe é equivalente mas cujo denominador é uma potência de 2.

Os cálculos representativos do que a aluna vai comunicando são registados no quadro por Rebeca que recorre ao seu próprio discurso para realçar alguns aspectos do que vai sendo apresentado. Finalizado o registo, faz uma intervenção destinada a destacar o objectivo do trabalho: "Vamos recordar... O que é que nós queremos justificar?" (TA 21/10/02, p. 8). Prossegue focando a atenção da turma no domínio das variáveis que surgem na representação algébrica das fracções decimais, de modo a tornar visível que é o conjunto dos números inteiros:

> As que têm estado a fazer nem sempre têm cá 1, pois não? Têm outro número *(aponta para o numerador da fracção $1/10^x$ que tinha escrito no quadro)*. Uma letra. y, pronto *(sugestão de um aluno)*. (*Regista, no quadro, $y/10^x$ e salienta que estas são as fracções que os alunos têm estado a ver, ou seja, aquelas que dão origem a dízimas finitas).* Este y que está aqui, Duarte, é sempre um número quê? (...) E este x que está aqui? *(aponta para o expoente do 10) (Os alunos respondem inteiro)*. (TA 21/10/02, p. 9)

O episódio *Estava a Tânia a dizer-me* ilustra como se iniciam as interacções subsequentes à clarificação do tipo de números que podem aparecer no numerador das fracções decimais e como expoente da potência de base 10.

Estava a Tânia a dizer-me

1. Rebeca: E o que queremos ver? Estava a Tânia a dizer-me que este 10 pode escrever-se como?
2. Tânia: 2x5 elevado ao expoente.

Rebeca repete e escreve no quadro: $y/10^x = y/(2\times5)^x$

3. Rebeca: É? Rogério, estás com uma cara muito duvidosa.
4. Tânia: Não pode aparecer mais nenhum número.
5. Rebeca: Pode aparecer mais algum número?
6. Rogério: Sôtora, não se importa de explicar aquela primeira, aquela do *y* sobre 10 elevado a *x*?
7. Rebeca: Ah, este do *y* sobre 10 elevado a *x*? Donde é que vem este *y*? Eu tinha posto um 1.
8. Rogério: Espere aí sôtora. O que a sôtora está a dizer aí é que qualquer número a dividir por 10 elevado a qualquer outro número é uma dízima finita sôtora?
9. Rebeca: Sim, então não é como nós pensamos?
10. Rogério: Espere aí. Não, eu não estou a dizer que não é. Só estou a tentar perceber.
11. Rebeca: Sim, é o que está ali. E agora temos que mostrar o quê? Que isto é equivalente a dizer o quê? Que no denominador das dízimas finitas só aparece ou potências de base 2, ou potências de base 5, ou potências de base 2 vezes potências de base 5 e só e que todas estas dão também origem a dízimas finitas. E a partir daqui levanta-se algum problema?

(TA 21/10/02, pp. 9-10)

Um pouco antes deste episódio, Tânia indicou que as potências de base 10 "a gente só pode decompô-las em 2x5" (Tânia, TA 21/10/02, p. 8). Rebeca enfatiza este aspecto redizendo, através do relato, a informação apresentada, e a aluna prossegue: "Ou 2 elevado a *x* e 5 elevado a *y* e assim..." (Tânia, TA 21/10/02, p. 8). É esta informação que Rebeca procura recuperar (§1).

Tânia foca-se na primeira ideia que apresentou (§2), expandindo-a de um modo que parece integrar a generalização oriunda da representação algébrica do expoente das potências de 10 anteriormente usada pela professora. Rebeca, recorrendo à repetição, legitima e dá visibilidade à contribuição e torna-a menos ambígua pela forma que adopta para a registar no quadro. Com efeito, em primeiro lugar esta forma permite explicitar que o que está a ser analisado são potências de 10 que constituem denominadores de fracções decimais e não umas quaisquer potências de 10. Em segundo lugar, revela que a expressão “ao expoente”, usada por Tânia e por ela própria, significa a generalidade dos expoentes que podem assumir estas potências e não, apenas, casos particulares existentes em exemplos específicos de fracções decimais.

Através dos movimentos subsequentes (§3, §5), Rebeca procura que a turma se posicione em relação à ideia enunciada. Neste âmbito, e recorrendo às palavras “estás com uma cara muito duvidosa”, comunica a Rogério a inferência que faz sobre o seu não entendimento, ou desacordo, acerca de algo que foi apresentado. Reflectindo sobre as dúvidas expressas por este aluno neste episódio e detectadas, por si própria, no acompanhamento do trabalho de pares, indica que não estava muito claro para vários elementos da turma como é que as dízimas finitas se representam sob a forma de fracção decimal. Indica, ainda, que optou por referir a representação algébrica das fracções decimais “porque de uma forma geral as dízimas finitas se escrevem nessa forma” (TST 39, p. 14) e porque sentiu que “um problema foi precisamente isso não estar claro” (idem, p. 20).

Ao verbalizar a possibilidade da existência de aspectos pouco inteligíveis para Rogério, Rebeca proporciona uma abertura para que ele entre na discussão e as suas dúvidas se exprimam (§6). Esta abertura vem a originar uma explicação, apresentada pelo aluno (§8) e validada pela professora (§9, §11), sobre o significado das variáveis incluídas na representação algébrica das fracções decimais registada no quadro. Deste modo, Rogério, ao contribuir para o esclarecimento, quer para si próprio, quer para a turma, da representação, em geral, das dízimas finitas sob a forma de fracção decimal — conhecimento que, do ponto de vista da professora, é necessário para a prova e que os alunos têm que ter “bem presente” (TST 39, p. 11) —, constituiu um recurso útil a Rebeca para realizar o trabalho de ensino e lidar com um problema com que, no momento, se confrontava.

Ao episódio *Estava a Tânia a dizer-me* segue-se a evocação, pelos alunos, das propriedades das potências. Apoiando-se nas respostas que obtém, Rebeca regista no quadro $y/10^x = y/(2x5)^x = y/2^x x5^x$. Prossegue procurando que comparem o significado destes registos com o que conhecem sobre as fracções referidas na conjectura "c. pot." e é, apenas, sobre o toque de saída que os alunos começam a posicionar-se. A aula termina com a indicação de que todos devem prosseguir em casa o trabalho de justificação da conjectura: "Não saiam ainda. Vão pensar se em $y/2^x x5^x$ estão contempladas aquelas em que o denominador é apenas uma potência de 2 ou de 5 ou então aquelas em que os expoentes das duas potências não é igual" (TA 21/10/02, p. 10).

A aula de dia 24, inicia-se com uma breve sistematização, feita por Rebeca em diálogo com os alunos, do trabalho desenvolvido até ao momento. Surge um desacordo, da iniciativa de Rogério, rapidamente ultrapassado. A professora regista no quadro que as fracções descobertas como originando dízimas finitas são do tipo $1/2^n$, $1/5^{n.}$ e $1/2^n x5^p$. Tânia levanta a questão de ainda haver dízimas da forma $k/2^n x5$, que Rebeca interpreta como decorrendo de incompreensões relacionadas com o significado dos expoentes existentes em $2^n x5^p$ e $2^n x5$. Assim, coloca à turma um conjunto de perguntas destinadas a tornar visível que 5 é um caso particular de 5^p: "Não podemos encaixar estas aqui, nesta situação? *(aponta para $1/2^n x5^{p.}$)*. Podemos ou não podemos? Quanto é que tinha que ser o *p*?" (TA 24/10/02, p. 2).

Ao reflectir sobre este momento da aula, Rebeca considera que "eles perceberem e disseram" (TST 39, p. 16), referência que tem implícita a indicação, apresentada por vários alunos, de que *p* tinha que ser 1. No entanto, manifesta alguma insatisfação pela forma como agiu:

> Poderia ter necessidade de a fazer [referência à intervenção] mais à frente mas não deveria ter dito logo onde se encaixava. Devia ter perguntado. Porque dei logo o sítio. Esta intervenção deveria ter sido feita numa segunda fase se não conseguissem. Saltei aqui um passo. Podia ser que tivessem dito por eles. E assim eu não deixei. (TST 39, p. 16)

O que parece estar subjacente à insatisfação foi o ter restringido a actividade matemática que os alunos poderiam ter desenvolvido face à questão levantada por

Tânia. A adopção de um formato mais aberto de pergunta poderia ter contribuído não só para, eventualmente, revelar que o problema não se localizava, meramente, na compreensão dos significados dos denominadores de $1/2^n x5^p$ e $k/2^n x5$, como para desencadear uma reflexão mais rica que conduzisse à descoberta, pelos alunos, de uma forma de lidar com este problema. Foi esta reflexão que não existiu, porque foi boicotada pela existência de questões demasiado fechadas num momento em que, do ponto de vista de Rebeca, não era adequado colocá-las.

A questão de Tânia proporcionou uma abertura para a professora averiguar se para os alunos é inteligível a consequência de *p* assumir o valor 0 em $1/2^n x5^p$: "Tinha que ser 1. E já agora se o *p* fosse zero o que é que acontecia? Se o *p* fosse zero o que é que acontecia a esta situação aqui? (aponta para 1/ $2^n x5^p$)" (TA 24/10/01, p. 2). As perguntas colocadas permitem tornar visível para a turma que um tipo de fracções que tinha constatado originarem dízimas finitas ($1/2^n$ e pela mesma razão, embora não explicitamente referido, $1/5^p$) constitui um caso particular da generalização $1/2^n x5^p$.

Clarificado este aspecto, é retomada a questão remetida para trabalho de casa na aula anterior: em $k/10^n$ estão contempladas as fracções $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n x5^p$?. Tânia responde afirmativamente e Rebeca tenta fazer emergir razões que permitam fundamentar esta posição: "Sim, porquê?" (TA 24/10/01, p. 2). Neste processo, preocupa-se em envolver alunos que não expressaram os seus pontos de vista: "Mais alguém que saiba?", "Mais alguém tem alguma sugestão? Rogério?" (idem).

O episódio *25 sobre 100 é igual a 1/4, é igual a 0,25* ilustra como se inicia o percurso que, posteriormente, vem a conduzir, na perspectiva de Rebeca, a "provar que se as dízimas são finitas então o seu denominador pode escrever-se naquela forma [2^n, 5^n e $2^n x5^p$]" (TST 39, p. 17).

25 sobre 100 é igual a 1/4, é igual a 0,25

1. Tânia: 25 sobre 100 é igual a 1/4 é igual a 0,25. Depois o 100 é 2 ao quadrado vezes 5 ao quadrado, depois o 4 é 2 ao quadrado. Eu ao 25 vou

tirar o 5 ao quadrado e vai dar 1, e ao 100 também vou tirar o 5 ao quadrado e dá 2 ao quadrado.

Rebeca vai registando, organizadamente, no quadro, os cálculos matemáticos correspondentes à informação apresentada: 0,25= 25/100= 1/4. Por baixo de 25/100 escreve $5^2/2^2\text{x}5^2$ *e através de uma seta indica que se dividem ambos os termos desta fracção por 25 de modo a obter* $1/2^2$*.*

2. Rebeca: Vais dividir por 25 ou 5 ao quadrado.
3. Tânia: Torno irredutível a fracção.
4. Rebeca: Tornas a fracção irredutível. E que relação é que isto tem com aquilo que está ali?
5. Tânia: Temos que olhar para esta, esta ou esta e ou dividir por 2 ou por 5 ou dividir por 2 vezes 5. Por exemplo, se fosse aquela ali. Por exemplo, se fosse uma dessas.
6. Rebeca: Prestem lá atenção. Diogo! Se fosse esta aqui como é que surgia?
7. Tânia: Se fosse uma dessas nós, por exemplo, em vez de tirarmos o 5 todo podíamos só tirar 5 elevado a 2. Por exemplo, aí dava 5 elevado a 3 e nós só tirávamos o 5 elevado a 2.
8. Rebeca: Então o que é que acontecia ali aquele *k* para desaparecer daqui alguma potência ...

(TA 24/10/02, pp. 2-3)

Anteriormente a este episódio, Tânia indicou saber justificar porque é que em $k/10^n$ estão contempladas as fracções $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n\text{x}5^p$ e apresentou um exemplo que tornou visível o seu raciocínio. Na ausência quer de posições contrárias a esta, quer de sugestões de colegas que permitissem fundamentar a posição de Tânia, apesar das tentativas feitas, Rebeca opta por passar a palavra a esta aluna a cargo de quem veio a estar a apresentação da grande maioria das ideias que serviram de justificação para que $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n\text{x}5^p$ são fracções incluídas no conjunto das fracções decimais. Esta justificação, embora apoiada em exemplos, foi constituída por um encadeado de argumentos apresentados em linguagem natural que deixou transparecer que o que estava a ser comunicado não era válido apenas para os exemplos referidos.

A análise das intervenções de Rebeca feitas no âmbito do episódio *25 sobre 100 é igual a 1/4, é igual a 0,25* e também das subsequentes até ter considerado provado que $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n\text{x}5^p$ são casos particulares de fracções decimais (TA 24/10/02, pp. 2-3), permite pressentir a existência de dois tipos de preocupações interligadas: (a) legitimar e dar visibilidade aos argumentos apresentados, reformulando-os, se necessário, de modo a torná-los não ambíguos e (b) destacar que o raciocínio feito para casos particulares é válido no caso geral. O registo organizado no quadro dos cálculos matemáticos descritos por Tânia na primeira intervenção (§1), a reformulação de parte desta descrição em que a palavra "tirar" é substituída por "dividir" (§2) e a repetição da expressão "tornas a fracção irredutível" (§4) — um aspecto particularmente importante da explicação que estava a ser apresentada — parecem revelar a primeira preocupação. A questão "E que relação é que isto tem com aquilo que está ali?" (§4) — através da qual tenta que Tânia expanda o raciocínio que apresentou de modo a ter em conta o caso geral que está a ser analisado — e a intervenção "Então o que é que acontecia ali aquele *k* para desaparecer daqui alguma potência ..." (§8) — em que explicitamente foca a atenção dos alunos na designação usada para representar o numerador de qualquer fracção decimal procurando que tirem conclusões acerca do valor que deve tomar para, em geral, poder desaparecer do denominador de $k/2^n x 5^n$ uma das potências que nele figura — parecem ter subjacente a segunda preocupação.

Trabalhando com o caso geral, visitando um exemplo

Esta subsecção incide na análise do trabalho realizado pela turma quando se procura provar, partindo de fracções do tipo das referenciadas no enunciado da conjectura "c. pot." ($1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n x 5^p$), que podem ser transformadas em fracções decimais.

O primeiro caso analisado é $1/2^n$. Rebeca desafia os alunos a obterem, a partir daqui, uma fracção do tipo $k/10^n$. Apenas Rogério e Tânia apresentam ideias que embora, de início, não sejam claramente expressas, contribuem para a turma avançar no trabalho que lhes está a ser pedido: "Não é por 5 elevado a *n*? (Rogério, TA 24/10/02, p. 4); "Temos que multiplicar por 5" (Tânia, idem). As intervenções da professora vão no sentido de tornar mais inteligíveis estas ideias. Perante a primeira recorre a uma pergunta aberta através da qual procura fazer emergir o procedimento de cálculo a adoptar que aí está ausente. A subsequente intervenção de Tânia explicita-o. No entanto, é ambígua na medida em que não inclui a referência ao expoente de 5, um aspecto substantivo para a justificação visada. Rebeca relata-a, regista-a no quadro tal como lhe foi indicada — $1x5/2^nx5$ — e submete este registo à avaliação da turma: “Assim? Concordam?” (Rebeca, idem). Estes movimentos possibilitam não só que Rogério, para justificar a discordância que manifesta, integre na sua voz o procedimento multiplicativo referido pela colega — “Não. Tem é que ser multiplicado por 5 elevado a *n*” (Rogério, idem) — como, também, que Tânia torne mais clara a contribuição que apresentou: “Não tem que ser 5 elevado àquele expoente” (Tânia, idem).

No quadro fica registado: $1/2^n = 5^n/2^nx5^n = 5^n/(2x5)^n = 5^n/10^n$ e Rebeca tenta incentivar os colegas de Rogério e Tânia a posicionarem-se sobre a pertinência e correcção do processo de transformação seguido. Face ao silêncio que se instala, coloca questões primeiramente centradas na avaliação matemática deste procedimento e, em seguida, na reconstituição do raciocínio de Rogério e Tânia:

> Assim concordam, para eu ficar com uma coisa daquele tipo? *(silêncio da turma)* Para já eu posso fazer isto que fiz daqui para aqui? Umh? *(silêncio da turma)* O que é que os vossos colegas fizeram daqui para aqui? *(dirigindo-se ao resto da turma)*. (TA 24/10/02, p. 4)

José começa a descrever a actividade dos colegas — “Multiplicaram por 5 elevado a *n*” (TA 24/10/02, p. 4) —, que Tânia justifica dizendo “Que era o que faltava para ficar com aquela forma” (idem). Em interacção com os alunos, Rebeca prossegue recordando as justificações que permitem efectuar os vários cálculos registados no quadro e concluída esta etapa procura que a turma se foque na transformação de $1/5^n$ numa fracção do tipo $k/10^n$. Continuam, no entanto, a ser apenas Tânia e Rogério a apresentar sugestões.

O episódio *Aqui no 1/2, no denominador, é sempre vezes 5?* pode contribuir para iluminar alguns aspectos do porquê desta situação e do silêncio de, pelo menos, alguns elementos da turma. Com efeito, revela que apesar das várias explicações que surgiram no espaço de discurso da aula, nem todos os alunos compreenderam, em profundidade, todas as vertentes associadas à prova de que $1/2^n$ representa uma fracção decimal.

Aqui no 1/2, no denominador, é sempre vezes 5?

1. Rebeca: Diz lá Duarte.
2. Duarte: Aqui no 1/2, no denominador é sempre vezes 5?
3. Rebeca: Se é sempre vezes 5?
4. Duarte: Sim. Estou a perguntar.
5. Rebeca: O nosso objectivo a partir daqui *(aponta para* $1/2^n$*)* era qual? Era chegar a isto aqui *(aponta para* $k/(2\text{x}5)^n$*)*. Se multiplicasses por 3, por exemplo, tinhas algumas hipóteses de chegar lá? Umh?
6. Duarte: Não.
7. Rebeca: Tinhas ou não? Quer dizer podias multiplicar por 3 e dividir por 3 e voltavas ao mesmo. Não te interessava, pois não?
8. Duarte: O que eu não estou a perceber, é como é que do 2... foi tentando, não é? Foi tentando do 2 elevado a *n* para o 2 elevado a *n* vezes 5 elevado a *n*. Foi tentando?
9. Rebeca: Ah, multiplicava por 5.
10. Duarte: Não, o que eu estou a perguntar é onde é que a sôtora foi buscar o 5.
11. Rebeca: Então onde é que vocês foram buscar o 5 *(dirige-se ao Rogério e à Tânia)*. Nem fui eu que disse o 5, foram eles! Onde é que vocês foram buscar o 5?
12. Rogério: Multiplicámos por 5 *n*.
13. Rebeca: Porque é que multiplicaram por 5 elevado a *n* e não 3 elevado a *n*? Expliquem lá ali ao Duarte, que ele não está a perceber.
14. José: Que era para termos um 5.
15. Rogério: Era para dar aquela. A gente queria transformar aquela fracção $1/2^n$ em $k/2^n\text{x}5^n$. Multiplicámos por 5 elevado a *n* para ver se conseguíamos lá chegar.
16. Tânia: Porque nós queríamos chegar àquela expressão e faltava-nos um 5 elevado a *n*.

(TA 24/10/02, pp. 4-5)

No início do processo de transformação de $1/5^n$ numa fracção do tipo $k/10^n$, Rebeca apercebe-se que Duarte manifesta vontade de intervir e cria uma abertura para que assuma a palavra (§1). Perante a questão levantada, começa por confirmar, junto do aluno, se a interpretou correctamente (§3) e prossegue procurando explicar-lhe que a multiplicação dos termos da fracção, por exemplo, por 3, não permitiria atingir o objectivo visado (§5, §7). A intervenção de Duarte "Não, o que eu estou a perguntar é onde é que a sôtora foi buscar o 5" (§10) provoca uma inflexão na estratégia que estava seguir. Com efeito, a partir deste momento, deixa de assumir, ela própria, o papel de clarificar as dúvidas expressas pelo aluno e transfere para Tânia e Rogério a responsabilidade pela explicação e justificação das ideias que antes tinham apresentado (§11, §13). Na reflexão que faz sobre este episódio, Rebeca salienta que esta foi uma boa opção, mas lamenta não a ter tomado mais cedo, tanto mais que a ideia que Duarte tentava perceber nem sequer era da sua autoria:

> É esta minha última fala que eu quero comentar [referência a §11]. Há aqui a valorização de uma norma. Mas eu deveria ter dirigido mais cedo esta pergunta para os colegas, porque eles é que tinham afirmado que tinha que se multiplicar o denominador por 5^n. E antes desta minha fala há aqui uma série de conversa minha com o Duarte em que tento explicar. Estou a tentar aqui interagir com o Duarte quando nem sequer fui eu que fiz aquela afirmação!... Devia ter dirigido mais cedo a pergunta ao Rogério e à Tânia. Mas só percebi aqui. Percebi bem que tinha que perguntar-lhes mas devia era ter percebido isso mais cedo. É a tal coisa... (TST 39, p. 24)

As explicações e justificações que emergiram parecem ter permitido a Duarte ultrapassar as suas incompreensões. Juntamente com outros colegas contribui para $1/5^n$ ser transformado em $2^n/10^n$. Os vários procedimentos de cálculo são registados por Rebeca no quadro — $1/ 5^n = 2^n/5^n x2^n=2^n/2^n x5^n =2^n/(2x5)^n= 2^n/10^n$ — que solicita à turma a indicação de justificações que permitam fundamentar a sua validade matemática (por exemplo, propriedades das potências, propriedade comutativa da multiplicação, etc.).

Dá-se, deste modo, por concluído o processo de prova de que $1/2^n$ e $1/5^n$ originam dízimas finitas e inicia-se uma nova fase da aula centrada na transformação de $1/2^n x5^p$, com $n \neq p$, numa fracção decimal, “o caso mais complicado da prova” (TST 39, p. 24), na perspectiva de Rebeca: “E em $1/2^n x5^p$? O que é que eu tenho que pensar para transformar estas numa do tipo $k/10^n$? O *n* e o *p* não podem ser iguais. Se fossem iguais já a situação estava resolvida” (TA 24/10/02, p. 5).

A reacção imediata de José a estas questões é perguntar se “Não se pode ir para um exemplo concreto?” (TA 24/10/02, p. 5). Rebeca supõe que esta intervenção se enraíza na necessidade deste aluno em diminuir o nível de abstracção associado à representação algébrica $1/2^n x 5^p$ com que a turma estava a trabalhar.

Rebeca segue a sugestão implícita na questão de José depois de ter dado visibilidade, através do foco da questão que coloca e da repetição da resposta de uma aluna, à importância de se conseguirem obter potências de base 2 e 5 com o mesmo expoente para se chegar a uma fracção decimal. Justifica esta via dizendo que um exemplo "não prova, mas dá para vermos melhor" (TA 24/10/02, p. 6). Analisados dois casos particulares e o respectivo processo de transformação em fracções cujo denominador é uma potência de 10, procura que os alunos se inspirem na actividade desenvolvida para intuírem ideias que lhes permitam descobrir a prova para o caso geral. O episódio *Isto é com exemplos concretos. E olhando para eles... Qual é o problema que se levanta aqui?* e as reflexões apresentadas por Rebeca, permitem ilustrar não só como se iniciou este processo, mas também algumas das questões com que, neste âmbito, se confrontou.

Isto é com exemplos concretos. E olhando para eles... Qual é o problema que se levanta aqui?

1. Rebeca: Isto é com exemplos concretos. E olhando para eles... Qual é o problema que se levanta aqui? Eu não sei quanto é que é o *n* nem o *p*...
2. Tânia: E tem que dar para todos...
3. Rebeca: Pois... E como é que eu faço isso? Como é que eu sei por que é que multiplico? Tenho ali o *n* e tenho ali o *p*...
4. Rogério: Multiplica mais uma vez por 5.
5. Rebeca: Multiplico mais uma vez por 5 porquê? Ao multiplicares...
6. Rogério: Sendo assim... Ah pois é, isso é diferente, não dá. Pois é o *n* e o *p* são diferentes os dois. A diferença pode ser 1 e nesse caso é só multiplicar por 5 elevado a 1. Ah, não... Podemos multiplicar por mais um 5 elevado a...
7. Rebeca: Estás-me a falar que se a diferença entre o *n* e o *p* fosse 1, é isso?
8. Rogério: Sim.
9. Alberto: Sôtora...
10. Rebeca: Espera aí um bocadinho. Com o *n* maior que o *p*, já agora, para dar 1.

11. Rogério: Sim. Podíamos multiplicar por 5 elevado a uma letra. Por exemplo, conforme for a diferença entre o *n* e o *p* assim seria o expoente do 5.
12. Rebeca: Então diz lá que letra é que querias.
13. José: Mas assim o expoente do 2 teria que ser sempre maior.
14. Rebeca: Esperem lá. O Rogério está a dizer que conforme fosse a diferença entre o *n* e o *p*, chamava-se a essa diferença uma letra. Que letra seria?
15. Aluno: *a*...
16. Rebeca: Estão a perceber o que o Rogério está a dizer, os outros aí atrás. Estão tão caladinhos... Ah? *(silêncio)* Não estão a perceber o que o Rogério está a dizer...
17. Rogério: Sôtora, já sei uma maneira mais simples. Escreva lá. No final ficava 1 sobre 2 elevado a *n* vezes 5 elevado a *p* mais a diferença entre *n* e *p*.

Rebeca escreve no quadro: $1/2^n \text{x} 5^p = 1/2^n \text{x} 5^{p+(n-p)}$

18. Rebeca: Ah! Ouçam lá. O Rogério está a andar muito depressa. Vejam lá vocês. Os outros não estão a acompanhar. Se calhar é melhor explicar isto com um exemplo concreto. Voltar aqui ao exemplo. Portanto, o que é que acontecia aqui *(volta ao exemplo anteriormente apresentado* $1/2^4 \text{x} 5^5$*)*. Nós multiplicávamos... Rogério, por isso é que estavas a dizer que fazíamos *n-p* igual a 1, não é? Mas era 1 se fosse o quê?

(TA 24/10/02, pp. 6-7)

Nos exemplos analisados anteriormente a este episódio, a identificação da potência pela qual se deviam multiplicar ambos os termos das fracções para as transformar numa fracção decimal, tinha sido feita a partir da comparação entre os expoentes das potências de 2 e de 5 existentes nos denominadores daquelas fracções. Rebeca começa por focar a atenção da turma, precisamente, no que diferencia a situação anterior da nova situação referindo o “problema” que o caso geral coloca, fruto do desconhecimento dos valores de *n* e de *p* (§1). Em seguida, apoia a intervenção de Tânia que dá visibilidade à necessidade de descobrir um processo de transformação que seja válido para todos os casos (§3). Quando Rogério apresenta uma sugestão, repete-a para facilitar que na sua análise se envolvam outros colegas, e solicita-lhe que a justifique (§5). Estes movimentos levam o aluno a reflectir (§6), a “pensar alto” (TST 39, p. 24), o que lhe permite não só ver as limitações da sua ideia, mas também introduzir— através da referência à diferença entre os expoentes entendida enquanto resultado da subtracção — um acréscimo de informação considerado importante para o processo de prova:

> Ele [Rogério] começa a falar na diferença entre os dois expoentes [referência a §6] que é uma ideia importante para a prova e eu digo: *Estás-me a falar que se a diferença entre o n e o p fosse 1, é isso?* [§7] (TST 39, p. 24)

Ao redizer, sob a forma interrogativa, parte da reflexão de Rogério, acrescentando a que se refere a possível diferença 1 de que este aluno fala, Rebeca introduz na contribuição apresentada uma alteração subtil mas significativa (§7). Agindo deste modo, enfatiza e clarifica um aspecto particular que considera poder ser útil para a turma poder progredir na resolução do problema com que se confrontava. Posteriormente, Rogério prossegue focando-se já não em possibilidades particulares de diferenças entre os expoentes das potências de 2 e de 5, mas sim na procura de uma forma de representação que traduza a generalidade destas diferenças (§11). Este raciocínio é considerado "muito interessante" (Rebeca, TST 39, p. 25) por duas razões. Porque "envolve um raciocínio muito superior a um nível de 9º ano em termos de abstracção" (idem) e além disso a sua autoria pertence inteiramente ao aluno: "Porque foi uma coisa que não veio de mim, de nada que eu disse, veio completamente do Rogério" (idem).

Quando planificou a aula de dia 24, Rebeca não "pensava ir tão longe em termos de prova como acabámos por ir" (TST 39, p. 14). Interrogava-se mesmo, no caso da transformação de $1/2^n x 5^p$ numa fracção decimal, o "caso particular, que era mais complicado, [se] havia de ir para as letras ou se devia ficar só, ou não, pelo exemplo generalizável" (idem, p. 28). Do seu ponto de vista, "esta prova não é fácil para os alunos" (TST 42, p. 40, 21/02/03). A referência de Rogério à "diferença entre *n* e *p* ser uma letra" (TST 39, p. 26), bem como a sua intervenção subsequente (§17) são contribuições de que "não estava à espera" (idem). Se, por um lado, a surpreendem, por outro, levam-na a decidir que se iria produzir na aula uma prova algébrica também para este caso: "Mas fui por causa do que o Rogério disse" (TST 39, p. 14).

Rebeca tem, no entanto, consciência de que este aluno, ao referir a diferença entre *n* e *p* da forma como o faz, "estava a ir muito mais além" (TST 39, p. 25) do que os colegas e preocupa-se, antes de mais, em averiguar se outros elementos da turma estão a compreender a sugestão apresentada (§16). Em seguida, quando vê que Rogério a complexifica (§17), procura, em primeiro lugar, tornar mais visível a sua nova contribuição. Recorre à sua representação no quadro que, funcionando como um referente comum à turma, pode facilitar a sua análise. Em segundo lugar, preocupa-se em encontrar uma forma de a tornar mais inteligível. Para o efeito, retoma um exemplo analisado e uma ideia anteriormente apresentada por este aluno (§18): "O Rogério estava a avançar muito mais para a frente e eu sinto a necessidade de orientar e voltar para trás" (TST 39, p. 25).

O confronto deste exemplo ($1/2^4x5^5$) com a representação adoptada para a generalidade das fracções cujo denominador é o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5 ($1/2^nx5^p$) conduz Tânia a questionar que no caso concreto a diferença entre *n* e *p* que o colega refere seja 1. Começa, assim, a esboçar-se um desacordo, que se acentua posteriormente, focado em ser irrelevante, ou não, garantir que seja positiva a diferença entre os expoentes de 2^n e 5^p para a identificação do processo de transformação do denominador de $1/2^nx5^p$ numa potência de base 10. O modo de resolução deste desacordo, bem como as reflexões de Rebeca sobre estes momentos da aula, serão descritos com mais detalhe e analisados na secção *Lidando com a emergência e resolução de desacordos*.

As interacções que ocorrem no âmbito do referido desacordo, levam Rebeca, por diversas vezes, a apresentar a sugestão de considerar separadamente as hipóteses $n>p$ e $p>n$. No entanto, Rogério considera, afincadamente, ser desnecessária esta via. Insiste que basta multiplicar por 5^{n-p}, independentemente do valor relativo da diferença entre *n* e *p*, e tenta justificar a sua posição recorrendo a cálculos que efectua tendo por referência o caso $1/2^4x5^5$. A partir de determinada altura, a professora opta por seguir o caminho proposto por este aluno. É a análise e discussão das transformações da fracção $1/2^4x5^5$ numa outra cujo denominador é 10^4, que permitem clarificar, por um lado, que o seu numerador também tem que ser alterado para as fracções serem equivalentes. Este aspecto tinha sido negligenciado por Rogério quer na sugestão que apresentou ($1/2^nx5^p = 1/2^nx5^{p+(n-p)}$), quer nos registos relativos a essas transformações que, em determinado momento, escreve no quadro. Por outro lado, a actividade desenvolvida possibilita que também os colegas, com facilidade e por analogia, participem na produção da prova algébrica para o caso geral. O episódio *Vamos lá assentar ideias* ilustra como foi encerrado o processo de prova da conjectura "c. pot.".

Vamos lá assentar ideias

1. Rebeca: Vamos lá assentar ideias. Isto foi muito confuso, não é, e o mais difícil disto é gerir as vossas discussões, está bem? Rogério, só um bocadinho. O mais difícil no meio disto tudo é gerir as vossas discussões uns com os outros. Então quando há algumas pessoas que não estão a ligar a mínima, que estão noutra onda, ainda mais difícil é, não é? Portanto perceberam estes passos, daqui para aqui? *(aponta para os vários passos que permitem passar de* $1/2^4$x5^5 *para* $5^{-1}/10^4$*)* Perceberam? Pronto. Isto é um exemplo concreto mas podemos pensar... É assim. Rogério, os exemplos provam?
2. Rogério e vários outros alunos: Não.
3. Rebeca: Não provam, não é? Mas podem-nos dar uma grande ajuda no processo da prova. E há aqueles exemplos que apesar de serem exemplos só lhes falta pôr lá no sítio deles é as letras. Chamam-se exemplos generalizáveis que são exemplos que servem quase como prova, servem para generalizarmos para todos os casos. É praticamente só substituir lá por letras. E no fundo o Rogério... Eu queria ir para uma situação que se calhar era um bocadinho mais complicada que era que se nós quiséssemos que o expoente da potência por que multiplicávamos fosse sempre positivo tínhamos que separar. Mas o Rogério acabou de mostrar que não precisamos de ter o expoente sempre positivo, que dá na mesma, não é? Perceberam agora este passo que o Rogério aqui fez? Os outros também? Perceberam?

(silêncio)

4. Rebeca: Perceberam ou não perceberam?
5. Vários alunos: Siiim...
6. Rebeca: Então agora como é que ficava a tal história? *(aponta para* $1/2^n$x5^p*)*

Rebeca, a partir das respostas dos alunos a questões que lhes coloca, vai registando no quadro os cálculos algébricos:

$1/2^n$x5^p $=5^{n-p}/2^n$x5^px$5^{n-p}$$=5^{n-p}/2^nx5^{p+n-p}$$=5^{n-p}/2^nx5^n$ $=5^{n-p}/10^n$.

O Rogério diz: "Mas isso era o que eu já tinha feito!!..." e a professora responde que, por um lado, se tinha esquecido do numerador que era "um pormenor muito importante" e, por outro, os colegas também não tinham percebido onde é que ele tinha ido buscar o n-p. Em seguida dá indicações à turma para passarem o que está no quadro e refere que para cada caso (aponta para $1/2^n$, $1/5^n$ *e* $1/2^n$x5^p*) mostraram que estas fracções se podem transformar em fracções decimais, ou seja, representam dízimas finitas.*

(TA 24/10/02, p. 13)

Reflectindo sobre este episódio, Rebeca refere:

> Aparece aqui a tal dificuldade de gestão das questões. Apareceu aqui uma outra questão e eu tive dificuldade em gerir com o que estava em causa. E explicitei que é difícil gerir as várias intervenções. Implicitamente estava a dizer que eles têm que ser mais organizados. É quando digo: *Vamos lá assentar ideias. Isto foi muito confuso, não é, e o mais difícil disto é gerir as vossas discussões, está bem? Rogério, só um bocadinho. O mais difícil no meio disto tudo é gerir as vossas discussões uns com os outros. Então quando há algumas pessoas que não estão a ligar a mínima, que estão noutra onda, ainda mais difícil é, não é?* [§1]. Esta última parte tinha a ver com o caso de uns quantos que não tinham estado a prestar atenção à discussão. E depois vêm as minhas intervenções sobre o papel dos exemplos. Não queria que os alunos ficassem com a ideia de que os exemplos provam as conjecturas. Não queria, mesmo implicitamente, reforçar essa ideia. Ao mesmo tempo queria chamar a atenção deles para que a análise de exemplos pode ser uma boa ajuda no processo de prova. E digo (...) [referência à parte final da intervenção §1 e primeira parte do §3]. E depois achei interessante esta conversa do Rogério quando ele disse que aquilo já ele tinha feito. Achou que eu lhe estava a tirar as ideias... (risos). Eu depois optei por ser eu a pegar na prova mais geral porque achei que era mais complicado. E se calhar ele até era capaz de explicar... Achou que eu lhe estava a tirar as ideias (risos). (TST 39, pp. 31-2)

A análise simultânea do episódio e das reflexões de Rebeca apresentadas a seu propósito, revela que, neste momento da aula, a sua acção foi orientada por várias intenções. Em primeiro lugar, a de dizer aos alunos que é importante serem organizados na forma como interagem uns com os outros e focarem-se na actividade matemática que se desenvolve. Explicitamente refere que o facto de haver elementos da turma que têm a sua atenção dispersa por assuntos alheios ao objecto da discussão, introduz dificuldades acrescidas no trabalho do professor.

Em segundo lugar, surge a preocupação de dar visibilidade a que os exemplos não provam conjecturas, ideia muito enraizada na turma no início do projecto. Salientar a inadequação desta ideia era tanto mais importante porque muito do trabalho realizado até ao momento se centrou na análise de casos particulares, o que, implicitamente, poderia reforçá-la. Além disso, ela continuava a surgir na turma, em certas ocasiões, podendo mesmo estar subjacente a uma das intervenções feitas por Rogério nesta aula para tentar justificar que não é necessário considerar separadamente os casos $n>p$ e $p>n$: “Vejam lá!... (risos) Diz que mostrou com um exemplo e que viu que dava para todos!...” (comentário de Rebeca à intervenção de

Rogério, TST 39, p. 27). É a evocação desta intervenção que pode estar subjacente a interpelação directa feita a este aluno (final de §1) e de que se serve para ensinar à turma de que uma conjectura não pode ser provada pelo recurso a exemplos.

Em terceiro lugar, Rebeca pretende valorizar a análise de exemplos enquanto fonte inspiradora para o processo de prova. Este conhecimento, útil na descoberta de várias provas, ganha relevância particular neste momento porque pretende que seja produzida uma prova em que os procedimentos a efectuar para transformar $1/2^n x 5^p$ numa fracção cujo denominador é 10^n seguem muito de perto o que tinha sido feito com $1/2^4 x 5^5$. Vários alunos da turma indicaram, sem dificuldade alguma, os cálculos algébricos envolvidos na prova do caso geral. Este facto, não é, certamente, independente da experiência que tinham tido com a transformação deste exemplo e que, no momento em que a prova é feita, se encontrava, intencionalmente, ainda registado no quadro. Pode, além disso, colocar-se a hipótese da ausência de dificuldades não ser, também, alheia à referência que a professora faz aos exemplos generalizáveis relativamente aos quais indica, restringindo-se, embora sem o explicitar, à prova que os alunos tinham em mãos e aos números que aí figuram, que "é praticamente só substituir lá [os números] por letras" (§3).

Finalmente, porque considerou que a prova algébrica é mais complicada, Rebeca tentou facilitar a sua compreensão e, para o efeito, assumiu, na aula, o papel de lhe "pegar", ou seja, de conduzir ela própria o processo de prova, embora procurando, através das questões que colocou aos alunos, que estes fossem também seus autores. Reflectindo sobre esta opção, considera, no entanto, que Rogério talvez fosse capaz de a explicar. Esta hipótese, simultaneamente com a reacção do aluno que interpreta como uma mensagem indiciadora de que estava a apropriar-se, indevidamente, de ideias que eram dele, conduzem Rebeca a questionar-se sobre se não deveria ter experimentado a possibilidade de deixar a cargo de Rogério a produção da prova para o caso geral intervindo, apenas, no caso do aluno não o conseguir:

> Eu aqui podia ter optado por deixar o Rogério ir também para o caso geral. Ele se calhar até tinha conseguido. Mas achei que era muito confuso para eles por ser muito abstracto e que devia ser eu a pegar. Achei que mesmo assim alguns não iriam perceber à mesma... Mas podia ter experimentado deixar o Rogério continuar e se visse que não conseguia intervir então. Não sei. Não tenho a certeza. (TST 39, p. 32)

Findo o processo de transformação de $1/2^n x 5^p$ numa fracção decimal, uma aluna "teve a preocupação de querer saber como se fazia no caso de não querer ficar com expoentes negativos" (TST 39, p. 33). Rebeca aproveita a ocasião para ir para lá da pergunta e clarificar que no processo de prova o que é relevante não é a transformação da potência de base 5 numa outra de expoente *n*: "Eu respondi e depois aproveitei para tornar claro que podíamos ter mexido no expoente do 2" (idem). O episódio *Se eu não quisesse ficar com expoentes negativos?* ilustra o processo como procurou tornar inteligível este aspecto, bem como o início do balanço reflexivo com que encerrou o trabalho realizado nas três aulas com a tarefa *À procura de dízimas finitas.*

Se eu não quisesse ficar com expoentes negativos?

1. Rebeca: Se eu não quisesse ficar com expoentes negativos? Fazia isto que aqui fizemos *(referência a $1/2^4 x 5^5 = 2/2^4 x 2 x 5^5 = 2/10^5$).* Multiplicava por 2 elevado a 5 menos 4 em vez de multiplicar por 5, não é? Reparem lá. Rogério, Rogério! Apesar disto estar aqui assim, eu podia em vez de ter mexido no expoente *n*, em vez de ficarem ambos com o mesmo expoente *n*, se quiséssemos ficar antes com o mesmo expoente *p*?
2. Rogério: Fazíamos a mesma coisa.
3. Tânia: Fazíamos a diferença entre o *p* e o *n* e somávamos ao *n*.
4. Rebeca: Estão a perceber? Se em vez de querer ficar com o expoente *n*, se quiséssemos que ambos ficassem com o expoente *p*?
5. Rogério: Então era fácil.
6. Rebeca: *(risos)* A Tânia disse mas eu não sei se os outros perceberam. Ali no caso geral se eu em vez de querer pôr as duas com expoente *n*, eu quisesse pôr as duas com expoente *p*? Eu ali mexi no 5, não foi? Tinha que mexer em qual?
7. Aluno: No 2.
8. Rebeca: No 2, na potência de base 2. Multiplicava por 2 elevado ao contrário, a *p-n*. Vamos lá recapitular, vamos lá todos falar um bocadinho em relação a esta tarefa. Oh Ronaldo! Esta tarefa demorou um bocado mais do que aquilo que eu estava a pensar, é uma tarefa de investigação, não é de resposta imediata, como vocês viram. Levaram bastante tempo até para

descobrirem as relações e para formularem conjecturas, mas, primeiro passo quando temos uma tarefa deste tipo. Para já temos que a ler bem, não é, a ver se percebemos. Depois normalmente vamos recorrer a exemplos...

9. Aluno: Concretos.
10. Rebeca: Exemplos particulares, concretos. Pegamos num caso geral e vamos concretizar com vários exemplos. Quando trabalhamos os exemplos que vimos vamos tentar olhar para os exemplos... Não basta a gente estar a fazer exemplos e não lhes ligar a mínima. Temos que olhar para os exemplos com bons olhos, entre aspas, ou seja,... Tânia! Temos que tentar comparar os exemplos uns com os outros, ou com algum ponto de partida. Por exemplo, na tarefa das regularidades do calendário, não sei se vocês se recordam, vocês tinham que pegar nos exemplos e comparar com o número do meio, não era? Aqui não se pediu para comparar com nada, se calhar daí a maior dificuldade. Aqui pedia-se para ver alguma particularidade que aquelas dízimas tinham... Duarte! a que esse exemplos conduziam. Como tal, um processo que foi crucial aqui, não foi só o gerar exemplos, foi organizar esses exemplos. Portanto, quando vocês começaram... Lídia!... a organizar os exemplos... Para já quando separaram as dízimas finitas para um lado e as dízimas infinitas para outro já estavam a organizar o vosso trabalho e a pô-lo em andamento, mas não chegou. Vocês não estavam a conseguir ver, com o aspecto com que tinham as fracções, nada de comum. E então houve uma sugestão que eu vos dei para vocês avançarem que foi quê? Foi decompor o denominador em factores primos. Vocês próprios pensaram noutras formas que depois abandonaram, se eram números pares, no fundo estavam a pensar se eles eram todos da forma 2 vezes qualquer coisa, ou se eram números primos, não é, e por aí em diante. Ao decomporem, que foi um processo, que vos sugeri, e ao terem os exemplos organizados, vocês observaram regularidades. Duarte, eu estou a falar! Daí a decomposição em factores primos e o vocês organizarem as várias fracções foi crucial. Depois numa outra fase o que é que fizemos? Separaram as fracções em vários tipos, não foi? (...).

(TA 24/10/02, pp. 14-5)

Na primeira intervenção (§1), Rebeca começa por evocar um exemplo anteriormente analisado em que, precisamente, para evitar os expoentes negativos, se optou por multiplicar ambos dos termos da fracção por 2. A sua resposta, por um lado, não permite lidar com a generalidade das situações de modo a evitar que surjam potências de expoente negativo, mas por outro, permite tornar visível que o factor pelo qual se multiplicam ambos os termos da fracção, não tem necessariamente que ser uma potência de base 5 — como tinha acontecido durante a maior parte do tempo em que os alunos analisaram casos particulares — mas pode ser uma potência de base 2. Simultaneamente, descreve, usando o caso concreto, o processo de obtenção do expoente de 2 ("cinco menos quatro"), o que é útil para ajudar os alunos a responderem à questão que, em seguida, lhes coloca. Através desta questão comunica, implicitamente, a mensagem que o que importa é que as potências incluídas no denominador de $1/2^n x 5^p$ sejam transformadas noutras com o mesmo expoente, independentemente, deste ser representado por *n* ou *p*.

A sugestão de Tânia (§3) denota compreensão. No entanto, não é completamente esclarecedora uma vez que está omissa informação importante: em particular, que a diferença entre *p* e *n* constitui o expoente de uma potência de base 2 pela qual há que multiplicar ambos os termos da fracção. A professora tem dúvidas se os colegas a entenderam e as suas intervenções subsequentes parecem ir no sentido de tornar explícita essa informação preocupando-se em que, nesse processo, intervenham outros elementos da turma. Começa por perguntar "Estão a perceber? (§4), dá visibilidade à questão em análise (§4, §6) e, por fim, destaca, implicitamente através das perguntas que coloca, que a resposta passa pela identificação da potência que deve ser transformada — "Eu ali mexi no 5, não foi? Tinha que mexer em qual?" (§6) — aspecto omisso na ideia apresentada por Tânia. Quando um aluno indica "No 2" (§7), repete expandindo a sua contribuição de modo a articular informação pressuposta — "No 2, na potência de base 2" (§8) — e explicita quer a operação que permite obter a transformação ("multiplicava") quer, recuperando a sugestão de Tânia, o expoente da referida potência: "2 elevado ao contrário, a *p-n*" (§8).

O balanço reflexivo sobre o trabalho realizado ao longo das três aulas, inicia-se com Rebeca salientando a natureza da tarefa que propôs — "é uma tarefa de investigação" —, a necessidade de uma boa leitura para que possa ser compreendida e a importância da exploração de exemplos e sua observação e organização cuidadas. Neste âmbito refere a sugestão que apresentou relativa à decomposição, em factores primos, dos denominadores das fracções que originavam dízimas finitas que, do seu ponto de vista, foi crucial para a progressão do trabalho. A intervenção prossegue organizada em torno de três eixos: (a) continuação da descrição do trabalho feito que entrelaça com a referência ao valor das conjecturas no trabalho dos matemáticos; (b) a alusão à elaboração futura de relatórios quando forem propostas tarefas de investigação; (c) e o trabalho a realizar em casa relativo à segunda questão incluída na tarefa.

A opção por este balanço reflexivo enraíza-se numa conversa informal que Rebeca tem comigo enquanto aguardávamos o começo da aula de dia 21 e trocávamos impressões sobre as atitudes e dificuldades dos alunos observadas durante a primeira aula. Sugiro a hipótese de incluir no final da aula que iria ser iniciada, um momento em que a turma reflicta sobre a actividade matemática desenvolvida de modo a facilitar a apropriação do processo de trabalho experienciado e a valorizar todas as vertentes dessa actividade. Face aos problemas percepcionados na aula anterior, Rebeca considera a hipótese pertinente e decide pô-la em prática. Mais tarde identifica a forma e o processo de a concretizar.

Foi importante ter existido este balanço, segundo a professora. No entanto, a seu ver, a organização desta fase da aula não foi a mais adequada: "Eu em relação a essa parte tenho uma crítica. Acho que podia ter feito mais em diálogo com eles. Foi muito tempo a falar sozinha" (TST 39, p. 15). A análise dos comentários apresentados permite identificar duas fontes de insatisfação: a atenção de vários alunos não ter estado centrada no que estava a comunicar e não ter aproveitado a ocasião para, "em relação à prova (...) explicitar com eles o raciocínio que tinha sido feito" (TST 39, p. 33). Na sua perspectiva, embora alguma da informação que apresentou tivesse que ser dita por ela própria como acontece, "por exemplo [com]: *Exemplos particulares, concretos. Pegamos num caso geral e vamos concretizar com vários exemplos*" (TST 39, p. 33), há "perguntas de retórica" que colocou e que poderiam não o ter sido:

> Mas tendo em conta a aula que foi e a hora a que é, estou aqui a pensar... é que eu tive que fazer várias intervenções para eles estarem calados. Há certas coisas que eu devia dizer sozinha mas acho que há aqui algumas coisas pequeninas mesmo em termos de síntese do processo de prova em si que podia ter feito com alguns a reconstrução do que foi provado. Acho que ajudava a perceber melhor. Algumas perguntas que faço de retórica podiam não ser de retórica. (TST 39, p. 33)

Um diálogo com os alunos que lhes permitisse enunciar, através das suas próprias palavras, raciocínios que tinham feito no âmbito do processo de prova poderia, assim, contribuir não apenas para que estivessem mais envolvidos e, consequentemente, menos dispersos na reflexão, mas também para melhor compreenderem esse processo. Sugiro, neste âmbito, uma outra possibilidade que Rebeca considera que poderia ter ajudado a manter os alunos mais focados no que estava a ser dito e vir a ser útil, no futuro, para orientar a exploração de outras tarefas de investigação: "Aaaah! Mesmo tópicos... [pontos extraídos da síntese que apresentou] Acho que sim. (...) Era fazer no quadro um esquema com tópicos. Podia ajudar..." (TST 39, p. 35).

Problemas experienciados

Analisando os comentários de Rebeca sobre a produção da prova da conjectura "c. pot" pela turma, constata-se que a maior parte dos problemas com que se confrontou se prendem com dificuldades dos alunos relativas ao início do processo de prova. Ao reflectir sobre a aula de dia 21, onde este início se situa, salienta, aliás, que embora tenha sido o que "consegui fazer naquelas circunstâncias" (TST 38, p. 59), houve "uma série de pontos de que eu não gostei e que não foram bem conduzidos a meu ver" (idem).

Deveria ter ficado claro que se ia provar nos dois sentidos

Ao reflectir sobre o trabalho realizado com toda a turma no âmbito da produção da prova e as dificuldades com que alunos se confrontaram sobretudo no início do processo, Rebeca revela alguma insatisfação com o modo como clarificou o objecto de prova:

> Aqui tínhamos acabado de provar que se as dízimas são finitas então o seu denominador pode escrever-se naquela forma [2^n ou 5^p ou $2^n x 5^p$]. E agora ia partir ao contrário. Se as fracções se escrevem nesta forma [$1/2^n$, $1/5^p$ ou $1/2^n x 5^p$] então são dízimas finitas. Estas duas implicações deveriam ter ficado claras para os alunos. Não precisava de usar a palavra implicação mas deveria ter ficado claro que se ia provar nos dois sentidos. (TST 39, p. 17)

Esta intervenção surge no âmbito da análise da aula leccionada em 24/10 e pouco antes, a propósito da mesma aula, tinha manifestado a sua preocupação com a pouca visibilidade que tinha dado aos "dois sentidos" em que o processo de prova se iria desenrolar: "Acho que devia ter explicitado melhor que tínhamos de provar nos dois sentidos. Devia ter escrito no quadro" (TST 39, p. 16). Na sequência destas intervenções, interpelo-a sobre ser, ou não, pertinente fazer a clarificação que menciona anteriormente a esta aula. Rebeca refere:

> Pois... Isso devia ter sido feito logo na segunda aula. Devia ter registado as duas coisas a explorar e depois dizer que íamos pegar numa e depois pegar na outra. Faltou essa síntese ali em termos de organização para eles perceberem melhor (...) Era quando se começa a provar, logo. (TST 39, p. 17)

Estas palavras revelam que uma explicitação clara, no início do processo de prova, não só das duas componentes que, neste caso, constituem o objecto da prova, mas também da forma de organização que seria adoptada no decurso da actividade, poderia facilitar aos alunos a compreensão do processo de prova. Neste âmbito, o registo, no quadro, "das duas coisas a explorar" e a apresentação de uma síntese que tornasse visível o caminho que iria ser seguido, são recursos que, na perspectiva de Rebeca, poderiam ser úteis e adequados.

A sugestão que dei para a prova foi ao contrário...

Na sequência imediata da construção do enunciado da conjectura "c. pot." e seu registo no quadro, Rebeca indica aos alunos que devem tentar justificar esta conjectura. A turma tinha-a formulado a partir da exploração de fracções do tipo 1/n e não tinha analisado se se manteria, ou não, para fracções com outros numeradores inteiros. Naturalmente, os alunos "queriam provar que as fracções do tipo $1/2^n$, $1/5^p$ e $1/2^n x5^p$ eram dízimas finitas" (TST 39, p. 21). É neste contexto e com o objectivo de facilitar a produção da prova, que é apresentada a sugestão de partirem de dízimas finitas à sua escolha, as transformarem em fracções decimais e reflectirem sobre as decomposições dos seus denominadores em factores primos. Na perspectiva de Rebeca, um dos problemas prendeu-se, precisamente, com a incidência desta sugestão:

> Eu acho que um dos problemas que se colocou no processo de prova foi o seguinte: eles queriam provar que as fracções do tipo $1/2^n$, $1/5^p$, $1/2^n x5^p$ eram dízimas finitas e a sugestão que dei para a prova foi ao contrário, foi partir das finitas e verem de que tipo é que eram. Fez confusão. (TST 39, p. 21)

A referência a que a sugestão foi "ao contrário", "fez confusão", tem subjacente a ideia de que ela seria útil para, partindo da representação algébrica das fracções decimais, se concluir que se poderiam obter outras fracções, equivalentes a estas, cujos denominadores são potências do tipo 2^n ou 5^p ou $2^n x5^p$, provando-se, deste modo, que $1/2^n$, $1/5^p$, $1/2^n x5^p$ representam dízimas finitas. Uma vez que os alunos procuravam, para Rebeca, fazer um percurso inverso a este, ou seja, partirem das fracções que obtiveram a partir da generalização das observações feitas e que incluíram no enunciado da conjectura para concluírem que representam dízimas finitas, a sugestão, ao incidir na análise da conclusão a provar, provocou dificuldades. Não compreendiam a relação entre o trabalho que tinham em mãos e a informação que lhes estava a ser apresentada. No entanto, a ausência desta sugestão aliada à inexistência de um entendimento profundo sobre o significado de $k/10^p$, enquanto representação algébrica de todas as dízimas finitas, dificultaria muito, segundo Rebeca, a produção e/ou compreensão da prova:

> Mas, por outro lado, se não lhes tivesse dado a sugestão de transformarem dízimas finitas em fracções para observarem o que acontecia, se os alunos não tivessem muito presente que as dízimas finitas são do tipo $k/10^p$, dificilmente se lembrariam de transformar $1/2^n$, $1/5^p$, $1/2^n x5^p$ em fracções do tipo $k/10^p$ ou dificilmente até perceberiam porque se estava a fazer isso. Eles não iam lá. (TST 39, p. 22)

Estas reflexões, no seu conjunto, parecem revelar que num momento posterior à acção na aula, Rebeca se confronta com um dilema. A apresentação da sugestão pensada na preparação da aula para ajudar os alunos, parece-lhe ter originado incompreensões que, pelo menos em determinado momento, obscureceram o percurso que deveria ser seguido para produzirem a prova. Só que a inexistência desta sugestão e da actividade que daí decorreu, na sua perspectiva, tornaria muito difícil, se não mesmo impossível, que entendessem sequer uma apresentação do processo da prova, mesmo não se tendo envolvido, entre si, na sua produção.

Confrontando as duas possibilidades de acção — apresentar, ou não, a sugestão — e privilegiando a produção de uma justificação rigorosa da conjectura e sua compreensão pela turma, Rebeca considera ser de manter a opção tomada. Neste âmbito e procurando formas de minimizar eventuais efeitos perversos, reafirma a importância e necessidade de um bom esclarecimento, desde o início, da existência, na prova, de "duas coisas que se iriam tentar provar":

> Daí a importância de eu dever ter explicitado muito bem essas duas implicações logo desde o início, na segunda aula. Acho que eles percebiam mais facilmente se tivesse explicitado desde o início as duas coisas que se iam tentar provar. (TST 39, p. 21)

Um problema foi não estar claro que p/10^{k} representa, de uma maneira geral, todas as dízimas finitas

Quando Rebeca desafia a turma a justificar a conjectura "c. pot.", recorda o trabalho realizado em aulas anteriores e destaca, a partir da intervenção de um aluno, que as dízimas finitas são aquelas cujo denominador é uma potência de 10. Embora vários elementos da turma não tivessem dificuldades algumas com a transformação de exemplos destas dízimas em fracções decimais, "um problema foi precisamente (...) não estar claro que p/10^{k} representa, de uma maneira geral, todas as dízimas finitas" (TST 39, p. 20). Tendo sentido este problema — "Eu senti isso" (idem) — interroga-se sobre o que poderia ter sido feito de diferente para os alunos terem esse conhecimento bem interiorizado ao iniciarem a prova:

> Podia ter ajudado se na aula em que introduzi as dízimas finitas tivesse reforçado ainda mais como é que estas se representam sob a forma de fracção decimal. Para eles terem esse aspecto bem presente. Eu referi isso porque era preciso para a prova, não é? (TST 39, p. 11)

A representação das dízimas finitas sob a forma de fracção decimal é, para a professora, "um dado adquirido" (TA 21/10/02, p. 6). É algo que, do ponto de vista matemático, não é posto em causa e, nessa medida, poderá incluir-se nos *dados da argumentação* (Toulmin, 1993) que se pretendia produzir. A existência, nos alunos, de uma compreensão profunda sobre esta representação e seu significado, trabalhada previamente, seria favorável a uma evocação deste conhecimento e à sua inclusão nos dados de que partiam. Nesta medida, poderia facilitar, na perspectiva de Rebeca, a produção da prova.

Alargando a reflexão para além das aulas em análise, salienta que para os alunos entenderem o significado e papel da prova, é importante que saibam que em Matemática nem tudo se prova. É importante, também, que tenham consciência de que, por alguma razão, o professor pode optar por não ser produzida na aula a prova de certos resultados, embora de um ponto de vista matemático possam ser provados:

> E agora estava a tentar reflectir. Nós andamos sempre com as tais coisas que eles têm que justificar e não sei quê e que têm que argumentar e explicar porquê, tem que se provar tudo etc. A gente reforça muito agora o papel da prova e já houve uma altura em que foi o próprio Rogério que disse: Então, mas a gente também não prova tudo. E é verdade. Há coisas que temos que lhes dizer. (TST 39, p. 23)

> E há muitas coisas que nós não dizemos para provar... É o caso, por exemplo, de certas propriedades ou regras.... No caso de não se provarem tem que se deixar claro que vamos aceitá-las como válidas... e dizer, por exemplo, que a prova não está ao alcance deles, ou não é relevante nesta altura... (TST 39, p. 40)

Num ensino que se pretenda focado no envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, importa tornar claro “logo quando se começa com este trabalho” (TST 39, p. 39) que “há coisas que à partida não são postas em causa”, como são “as tais definições, por exemplo” (idem), e ajudar os alunos a “perceberem a tal diferença” (idem) entre o que se pode provar ou não. Simultaneamente, no caso de se apresentarem aos alunos produtos matemáticos passíveis de algum tipo de prova sem serem por ela acompanhados, importa, segundo Rebeca, dar visibilidade a este aspecto e acrescentar alguma informação que lhes permita compreender o porquê da opção tomada pelo professor.

Queríamos provar a conjectura para o 1 sobre e depois estávamos com fracções do tipo y sobre

No início do processo de prova da conjectura “c. pot.”, Rebeca dirige à turma algumas intervenções que parecem visar que os alunos comparem o que conhecem sobre fracções decimais com a conjectura que formularam de modo a identificarem se existe, ou não, alguma diferença:

> Então é a mesma coisa, aquilo que está ali [referência à representação algébrica das fracções decimais registada no quadro] e o que nós tínhamos? É que nós tínhamos dito que as que davam origem a dízimas finitas eram aquelas em que apareciam potências de base de 2, potências de base 5 ou potências de base 2 vezes 5... (TA 21/10/02, p. 10)

Esta intervenção e outra posterior que vai no mesmo sentido, poderá levar a supor que Rebeca pretendia semear nos alunos alguma dúvida que conduzisse a uma discussão clarificadora da necessidade das fracções que originam dízimas finitas estarem na forma irredutível para não aparecerem outros factores para além do 2 ou do 5 ou suas potências na decomposição dos seus denominadores em factores primos. Esta hipótese é reforçada quando se tem em conta que um dos objectivos visados com a exploração da tarefa era, precisamente, “se o numerador não for 1 a fracção não é irredutível” (TST 38, p. 38).

No entanto, este não foi o caminho seguido. Nem na aula em que ocorreram as referidas intervenções, nem na seguinte, existiu momento algum especificamente focado na discussão, pela turma, das influências da restrição inicial (fracções do tipo 1/n) na conjectura formulada, embora, mais tarde, Tânia, através das palavras que usa — “Torno a fracção irredutível” (TA 24/10/02, p. 2) — reforce a importância da simplificação de certas fracções. Rebeca, como anteriormente referi, remete para trabalho posterior a exploração da segunda questão da ficha— “investiga se as tuas conjecturas se verificam igualmente para fracções com outros numeradores” — que poderia ter desencadeado esta discussão, embora indique que, ao longo das três aulas, “acabámos por pegar nas duas tarefas da ficha” (TST 39, p. 14).

A inexistência de uma discussão explicitamente centrada na análise de fracções do tipo k/n (com $k \neq 1$) que conduzem a dízimas finitas e das consequências que daí advêm para a conjectura formulada, originou algumas dificuldades no momento em que os alunos analisavam fracções decimais com numeradores diferentes de 1 resultantes de dízimas finitas que tinham seleccionado. Rebeca, na sequência de uma questão que lhe coloco focada neste aspecto, refere, em especial, “confusões” que podem ter surgido como resultado de se querer provar uma conjectura relacionada com fracções cujo numerador é 1 e se estarem a analisar fracções com outros numeradores: “Pode ter havido confusões, pode, porque nós queríamos provar a conjectura para o 1 sobre e depois estávamos com fracções do tipo *y* sobre” (TST 39, p. 14).

A ausência da referida discussão parece ter originado, também, situações menos claras quando Rebeca pretende comunicar o objecto de prova. Por exemplo, na sequência imediata de Tânia ter descrito o processo de transformação de 0,25 em 25/100 e a posterior simplificação desta fracção até à forma $1/2^2$, Rebeca, para recordar o que a turma deve justificar refere:

> Vamos recordar... O que nós queremos mostrar, justificar? Que as fracções... Estas são as que dão origem a dízimas finitas, não é? (aponta para a fracção 25/100) E queremos mostrar duas coisas. Não só que *todas as dízimas finitas são deste tipo (aponta para a conjectura), não aparece no denominador números que não sejam potências de 2, potências de 5 ou potências de 2 vezes potências de 5* e que todas as deste tipo (aponta para a conjectura) dão origem a dízimas finitas. Não é isso? Queremos provar, no fundo, que as fracções com este aspecto (aponta para a conjectura) são equivalentes àquelas (aponta para a fracção 25/100) com o outro aspecto que nós sabemos que as dízimas finitas têm (TA 21/10/02, p. 8, destaque acrescentado pelo recurso a itálico).

As palavras com que esta intervenção é iniciada tornam visível que ela se prende com o que é instituído como objecto de prova. Através do recurso a um exemplo, Rebeca começa por salientar que se vai referir às dízimas finitas representadas sob a forma de fracção decimal. Continua dando visibilidade a que há “duas coisas” a “mostrar”, que descreve ao mesmo tempo que aponta para a conjectura. Em primeiro lugar diz que “todas as dízimas finitas são deste tipo” e aponta para a conjectura. Prossegue de um modo ilustrativo do significado que atribui a “deste tipo”. O contexto em que esta expressão surge deixa antever a possibilidade de, na expressão “*todas as dízimas finitas*”, Rebeca não ter articulado informação que considerava pressuposta, ou seja, que todas as dízimas finitas a que se refere estão representadas na forma de fracção decimal. Esta informação é essencial para a compreensão correcta das palavras de Rebeca, uma vez que é a transformação de qualquer fracção que origine uma dízima finita para esta representação que permite excluir do seu denominador todos os números primos diferentes de 2 ou de 5, bem como os múltiplos desses primos.

Sobretudo num contexto em que não foi, claramente, discutida a questão da irredutibilidade das fracções que originam dízimas finitas para que os seus denominadores sejam do tipo daqueles que a professora descreve, a não explicitação dessa informação torna a expressão "*todas as dízimas finitas são deste tipo*" ambígua. Por exemplo, um aluno que sabe que as dízimas finitas 0,2 e 0,6 podem ser representadas, respectivamente, por 3/15 ou 21/35 poderá ficar intrigado e não compreender porque é que o denominador destas fracções não é do tipo referido na conjectura enunciada. Outro, que tenha esquecido que a conjectura foi formulada apenas a partir de fracções do tipo 1/n, poderá ficar com a ideia de que 3/15 e 21/35, ao terem um denominador cuja decomposição inclui factores primos diferentes de 2 e de 5, não representam dízimas finitas.

Rebeca refere que há "duas coisas" a provar. Sabe que embora se possa provar que se as fracções, tal como é referido na conjectura, são do tipo $1/2^n$, $1/5^p$, $1/2^n x 5^p$ então são dízimas finitas, a recíproca desta proposição não é verdadeira. Há infinitas dízimas finitas que podem transformar-se em fracções com um denominador do tipo referido, mas cujo numerador não é 1.

O verbo "contemplar", em português sinónimo de "abranger" ou "incluir", que Rebeca começa a empregar, sistematicamente, a partir de determinado momento quando pretende referir uma das componentes do objecto de prova, parece ter constituído um recurso que lhe foi útil para ultrapassar os constrangimentos resultantes da inexistência do aperfeiçoamento da conjectura formulada de modo a que fosse válida para fracções do tipo k/n com *k* inteiro e *n* natural:

> Vão pensar se em $y/2^x x 5^x$ *estão contempladas* aquelas em que o denominador é apenas uma potência de 2 ou de 5 ou então aquelas em que os expoentes das duas potências não é igual. (TA, 21/10/02, destaque acrescentado pelo recurso a itálico).

> Já agora, estão convencidos então que aqui (aponta para $k/10^n$) *estão contempladas* todas estas (aponta para $1/2^n$, $1/5^n$ e $1/2^n x5^p$). Estão ou não estão? E se pensarmos ao contrário? Como é que nós daqui (aponta para $1/2^n$) podíamos chegar a uma coisa daquele estilo (aponta para $k/10^n$), ao contrário. (TA 24/10/02, p. 3, destaque acrescentado pelo recurso a itálico)

Na reflexão que faz sobre as aulas, não é visível se a intenção de Rebeca foi, ou não, a conjecturada no início desta subsecção, tal como não é, claramente, visível o porquê da decisão de passar para a fase da prova da conjectura formulada para fracções do tipo 1/n antes desta ser testada num universo mais amplo do que aquele que lhe deu origem. É um facto que Rogério, perante o enunciado desta conjectura registado no quadro, teve uma intervenção que, na altura, Rebeca considerou traduzir que ele queria passar para a prova. Também é um facto que, face às dificuldades de alguns alunos com o processo de refutação de conjecturas e o consequente investimento de Rebeca na análise de conjecturas contrariadas, a formulação da conjectura "c. pot." só foi dada por terminada passadas perto de duas horas quando a professora "tinha pensado que aquela tarefa era para aquela aula de 1h 30 m" (TST 38, p. 38). Poderá, assim, colocar-se a hipótese da decisão de iniciar a produção da prova se enraizar na pressão exercida pela passagem de um tempo mais longo do que o previsto, aliada ao que interpretou ser uma passagem natural para o processo de prova proporcionada por um aluno.

No caso $1/2^n x5^p$ tinha pensado que talvez nem fosse para as letras e a ir, iria sempre separar os casos em que n>p e p>n

A sugestão apresentada por Rogério de adicionar n-p ao expoente de 5 com o objectivo de transformar $1/2^n x5^p$ numa fracção decimal, surpreende Rebeca: "Não estava à espera que aquilo lhe saísse. São das coisas que nos surpreendem" (TST 39, p. 26). A sua surpresa aumenta quando este aluno afirma, com veemência, que não é necessário considerar separadamente os casos em que n>p e p>n, hipótese de prova em que não tinha pensado:

> Eu não tinha pensado nessa hipótese. (...) Para os outros casos pensava fazer com as letras, mas neste caso tinha pensado que talvez nem fosse para as letras. Mas pensava que a ir, iria sempre separar os casos em que n>p e p>n. Não

> pensei em analisá-los em conjunto. Portanto, o Rogério surpreendeu-me bastante. (TST 39, p. 28)

Aliada à surpresa, surge, em Rebeca, a insegurança derivada da incerteza do caminho proposto por Rogério conduzir ao objectivo pretendido e do receio de não ser capaz de orientar a turma no caso do aluno não o conseguir percorrer sozinho e ela não o compreender. É, aliás, esta insegurança que, sua perspectiva, pode constituir uma hipótese explicativa para a sua insistência na separação dos referidos casos:

> Pois, estava insegura, a achar que talvez não desse. Também pode ter sido por isso [a insistência na ideia da separação]. Tinha receio de não saber orientar se ele não conseguisse. Deve ter sido isso, sabes? Porque o Rogério tem que convencer. E se eu não percebo e se ele não convence? Convenço eu, se não percebo? (TST 39, p. 28)

Rebeca decide seguir a sugestão de Rogério. Ao fazê-lo, embarca com a turma numa aventura em que os obstáculos que, eventualmente, surgirão não podem ser ultrapassados pelo recurso a ideias ou soluções previamente pensadas. Nesta medida, entra num "universo sem precedente" (Lampert, 2001, p. 447) em que os objectivos a sacrificar e a privilegiar não são decididos por regras estabelecidas *a priori*, mas antes por intuições acerca da situação que vai sendo construída no momento, a partir das ideias que ela própria e os alunos apresentam e das teias de relações que se vão criando, ou não, entre estas ideias.

Como procurarei fundamentar na secção *Lidando com a emergência e resolução de desacordos*, Rebeca começa, antes de mais, por tentar identificar o que poderá constituir, para os colegas, a principal fonte de incompreensão da sugestão de Rogério. Considera que é "a questão da transformação do denominador" (TST 39, p. 30). Opta, então, por começar a focar a atenção da turma nesta questão porque, na altura, considera prioritário que os alunos entendam o processo de transformação. Relega, assim, para plano secundário a resolução do que designa por "problema do cálculo" (TST 39, p. 30) que deriva do numerador da fracção do exemplo em análise, ter permanecido inalterado enquanto decorria o processo de transformação do seu denominador.

Rebeca, não sacrifica, no entanto, o "problema do cálculo", tanto mais que a sua resolução é importante para a compreensão da prova. Quando considera estar ultrapassada a "questão da transformação do denominador", este problema passa para primeiro plano e é na correcção do numerador da fracção que procura que a turma foque a sua atenção e invista os seus esforços. É na sequência da sua resolução que passa a assumir prioridade um novo objectivo: a produção da prova que, tal como Rebeca enunciou pouco antes de Rogério ter apresentado a sua sugestão, passa por pensar em transformar as fracções do tipo $1/2^n x5^p$ "numa do tipo $k/10^n$" (TA 24/10/02, p. 5) em que "*n* e *p* não podem ser iguais. Se fossem já o problema estava resolvido" (idem). A expressão $k/10^n$ representa, para a turma, todas as dízimas finitas pelo que *k* e *n* — tal como tinha sido destacado em anteriores ocasiões, nomeadamente na aula de dia 21/10 — têm que pertencer a IN_0.

Rebeca, reflectindo sobre o processo proposto por Rogério e referindo-se ao caso particular analisado — $1/2^4x5^5 = 5^{-1}/2^4x5^5x5^{-1}$ — escreve:

> O problema em relação à definição [de fracção decimal] (...) é que 5^{-1} não é um número inteiro. Isto poderia levantar problemas se tivéssemos por exemplo $3^{-1}/2^4x5^4$ que representa uma dízima infinita. Esta situação nunca surge porque a base da potência que pode surgir no numerador da fracção é sempre 2 ou 5, se não separarmos em n>p ou n<p no caso geral. É claro que estávamos a tentar escrever $1/2^n x5^p$ na forma de fracção decimal e se p>n, $5^{n-p}/2^n x5^n$ não tem um número inteiro no numerador. Neste caso estamos a multiplicar uma fracção decimal por uma fracção do tipo $1/5^{p-n}$ que já tínhamos visto que se podia representar como fracção decimal. (DER, 24/10/03)

A prova da conjectura "c. pot." que a turma pretendia produzir, incluía mostrar que as fracções do tipo $1/2^n x5^p$ originavam dízimas finitas. Rebeca não tem dúvidas que o processo de Rogério, mesmo não considerando separadamente os casos n>p e p>n, permite atingir este objectivo e é este conhecimento que parece orientar o modo como lida, na aula, com este processo. Segura deste conhecimento, e confrontada com a surpresa e o receio que a sugestão deste aluno lhe provocou, concentra-se em assegurar que o denominador das fracções seja uma potência de base 10 e deixa escapar a necessidade de garantir que o seu numerador seja um número inteiro: "Na altura como o processo do Rogério não transformava a fracção numa dízima infinita, devo-me ter concentrado no denominador (potência de base 10) e esquecido o numerador (ser número inteiro)" (DER 24/10/03).

Deste modo, no "universo sem precedente" em que decidiu entrar quando optou por seguir a proposta de Rogério, sai sacrificada, sem na altura se dar conta, a condição de *k* ser um número inteiro introduzida, no meio do percurso da exploração da tarefa, pela indicação apresentada à turma de que aquelas fracções tinham que ser transformadas "numa do tipo $k/10^n$". Consequentemente, sai sacrificado um acréscimo de rigor matemático que poderia ter sido introduzido no processo de prova se, por exemplo, a proposta de Rogério constituísse uma solução previamente pensada a que poderia, se o entendesse, recorrer no momento para explicitar — tal como o fez na reflexão escrita acima apresentada — a irrelevância daquela condição para a prova da conjectura face a apenas poderem ser 2 e 5 as bases das potências que surgem no numerador da fracção resultante da transformação de $1/2^n x 5^p$.

Lidando com a emergência e resolução de desacordos

Desacordos emergentes e sua caracterização

Ao longo das secções *Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas* e *Lidando com o ensino do discurso de prova* referi, por diversas vezes, a existência de desacordos que foram emergindo à medida que a turma desenvolvia o seu trabalho. Na tabela 9 apresento uma síntese dos principais desacordos ocorridos ao longo das três aulas. Caracterizo, brevemente, o contexto em que emergiram, o que esteve na sua origem, a sua incidência e o processo que permitiu ultrapassá-los. A identificação do desacordo é feita através da intervenção que o desencadeou, antecedida das letras P e A que designam, respectivamente, professora e aluno.

Tabela 9. Tarefa *À procura de dízimas finitas*: Principais desacordos na aula de Rebeca

Caracterização / Identificação	Emergência: Contexto	Emergência: O que o desencadeia	Conteúdo (motivo do desacordo)	Subscri-tores das posições em confronto	Processo de resolução
1) P: Se em vez de 1/3 pusesse 1/9. Justificava? Também dava? (17/10, TA p. 7)	Refutação de uma conjectura (grupo de Susana).	Questão da professora.	1/9 permite refutar a conjectura?	Alunos <—> Alunos	• Justificações dos alunos por sua iniciativa. • Questão da professora sobre 9 ser um número primo e respostas dos alunos.
2) P: Vamos lá ver se percebo bem o que está aqui. (21/10, TA p. 2)	Apresentação de uma conjectura formulada, em casa, por uma aluna (Isabel).	Intervenção da professora enraizada na interpretação incorrecta do significado da conjectura.	Avaliação da conjectura, pela professora. (desacordo implícito).	Professora <—> Aluna e colega de grupo	• Defesa, pelas alunas, da sua posição através de tentativas de justificação e explicações. • Concordância da professora com as explicações das alunas e alteração da sua posição.
3) P: 1/240 também dá? (21/10, TA p. 3)	Apresentação de 1/240, por iniciativa de um aluno, a partir de exemplos apresentados por outro.	Questão da professora.	1/240 é um exemplo a incluir no conjunto das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas (Alberto).	Alunos <—> Alunos	• Indicação, dada pela professora, para os alunos decomporem 240 em factores primos. • Justificações de alunos com base nas decomposições.
4) A: Nem todos são elevados a *x*. (21/10, TA p. 4)	Construção, pela turma, do enunciado da conjectura “c. pot.”.	Objecção de um aluno por sua iniciativa (José).	Sugestão apresentada por outros alunos relativamente à redacção do enunciado da conjectura.		• Pedido de expansão do raciocínio pela professora; • Interpretação, pela professora, da justificação apresentada de um modo que leva a prosseguir a aula noutra direcção. • (*Desacordo não visivelmente resolvido*).
5) A: Esta conjectura não responde muito bem à pergunta que a sôtora pôs naquele papel. (21/10, TA p. 5)	Idem	Objecção de um aluno por sua iniciativa (Rogério).	O enunciado da conjectura “c. pot.” registado no quadro.		• Interpretação, pela professora, da objecção do aluno de um modo que leva a prosseguir a aula noutra direcção. • (*Desacordo não visivelmente resolvido*).
6) A: Sôtora, eu descobri uma maneira que isso pode não dar certo. (24/10, TA p. 1)	Modo de representação da globalidade das dízimas finitas.	Objecção de um aluno (Rogério), por sua iniciativa, a partir da análise da fracção $k/10^n$ feita em casa.	Indicação de que se *k* é 10 e *n* é 1, $k/10^n$ não representa uma dízima finita.	Aluno <—> Alunos	• Destaque da objecção pela professora. • Justificações apresentadas por alunos por sua iniciativa.
7) A: Mas não pode ser. O *p* é maior. E depois como é que sabemos qual é que é o maior para fazermos? (24/10, TA p. 8)	Como transformar $1/2^n x 5^p$ numa fracção do tipo $k/10^n$? (procura da prova de que as fracções do tipo $1/2^n x 5^p$ originam dízimas finitas).	Objecção de uma aluna (Tânia), por sua iniciativa, a uma sugestão de Rogério.	Multiplicar por 5^{n-p} permite transformar $1/2^n x 5^p$ numa fracção do tipo $k/10^n$.	Aluna <—> Aluno	• Pedido, pela professora, de explicação e justificação a Rogério. • Análise, pela turma, de casos particulares. • Sugestão, apresentada pela professora de considerar separadamente os casos n>p e p>n (não aceite). • Desacordo não resolvido neste momento.
8) A: Não vale a pena separar. O processo resulta mesmo que a diferença entre *n* e *p* seja um número negativo. (24/10, TA p. 9)	Idem	Objecção de um aluno por sua iniciativa (Rogério).	Sugestão, apresentada pela professora, de separar os casos n>p e p>n em $1/2^n x 5^p$ para provar que estas fracções são do tipo $k/10^n$.	Aluno <—> Professora	• Adesão da professora à sugestão de Rogério. • Análise e discussão da transformação de um caso particular seguindo a sugestão de Rogério e prova de que $1/2^n x 5^p$ origina dízimas finitas, o que permite resolver também o desacordo 7.

A análise da tabela 9 permite salientar:

- Os desacordos emergem na sequência tanto de iniciativas da professora como de alunos; é a iniciativa dos alunos que permite a emergência da maior parte dos desacordos.
- O que origina os que resultam de iniciativas da professora é, num caso (2), uma intervenção que visa levar a turma a questionar-se sobre a avaliação, expressa por duas alunas, de uma conjectura apresentada; nos outros casos são questões que coloca à turma com o objectivo de avaliar o seu entendimento sobre ideias em discussão e clarificar eventuais incompreensões (1) e de submeter ao seu escrutínio uma sugestão apresentada por um aluno que sabia ser incorrecta (3).
- As objecções expressas pelos alunos incidem não só sobre sugestões apresentadas por colegas (4 e 7) e ideias que tinham sido, ou estavam a ser, analisadas pela turma (1, 3, 5, 6), mas também sobre uma interpretação feita pela professora (2) e uma proposta que apresentou (8).
- Alguns desacordos são ultrapassados porque a professora concorda com a defesa, feita pelos alunos, das suas posições (2 e 8).
- Nem todos os desacordos são esclarecidos no momento em que são expressos: dois não são visivelmente resolvidos devido à aula ter prosseguido numa direcção diferente, fruto do modo como Rebeca interpretou o motivo do desacordo (4, 5); outro é ultrapassado num momento posterior face à decisão de aderir à sugestão do aluno subscritor de uma das posições e prolongar a discussão num sentido que, do seu ponto de vista, permitia fazer face à objecção expressa (7).
- Exceptuando 4 e 5, desacordos não visivelmente resolvidos, todos os outros são ultrapassados através de processos de análise, discussão, explicação e justificação de ideias pela turma; a professora nunca evocou a

autoridade que detém para, através dela, invalidar ideias matemáticas apresentadas pelos alunos.

Estas observações podem ser completadas e clarificadas pela análise dos momentos das aulas em que alguns dos desacordos emergiram, bem como das reflexões que Rebeca apresenta sobre algumas das decisões que tomou e dificuldades que sentiu. Neste sentido analiso, em seguida, a emergência e processos de resolução dos desacordos (2), (7) e (8). Opto por não me debruçar, com mais detalhe, sobre os desacordos (1) e (6) por considerar que o trabalho realizado no decurso do processo de resolução foi muito semelhante ao desenvolvido no âmbito dos (7) e (8) em que a discussão foi mais prolongada e abrangente. Por razões que apresentarei subsequentemente em *Dúvidas, dificuldades, problemas e dilemas...* é aí que me debruço sobre os desacordos (3), (4) e (5).

Processos de resolução de desacordos

Considerei os desacordos (2), (7) e (8) ultrapassados porque a divergência de pontos de vista deu lugar, através de processos de discussão centralmente neles focados, a consensos explícitos e fundamentados. Por esta razão os incluo nesta subsecção. Começo por me debruçar sobre o desacordo (2) que emergiu no início da aula de dia 21 quando Rebeca apresenta o acetato com as conjecturas formuladas pelos alunos na aula anterior ou posteriormente em casa. Em seguida foco-me nos desacordos (7) e (8) ambos derivados da sugestão de adicionar n-p ao expoente *p* de 5, com o objectivo de transformar a fracção $1/2^n x 5^p$ numa fracção decimal.

Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui

O acetato com as conjecturas apresentadas por Rebeca foi elaborado, como anteriormente referi, com base nos trabalhos dos alunos entregues pouco tempo antes da aula se iniciar. Uma destas conjecturas é da autoria de Isabel e a sua formulação é posterior à aula de dia 17. Tal como fez com todas as outras, a professora lê o enunciado e, em seguida, pede à turma que a comente. O episódio

Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui ilustra as interacções que ocorreram.

Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui

1. Rebeca: (...) Está aqui outra conjectura que ainda não foi referida, retirei-a tal como estava, que é "todas as fracções de dízimas finitas que tenham o denominador acabado em 2, 4, 6 ou 8, o respectivo denominador é traduzido por uma potência de base 2. É para comentarem. Portanto, comentem.
2. Isabel: Verifiquei que é verdade.
3. Rebeca: Verificaste que é verdade.
4. Isabel: Eu acho que é.
5. Rebeca: Achas que é.
6. Tânia: Oh sôtora, deve ser porque como eles também são todos pares dá para serem divisíveis por 2.
7. Rebeca *(relendo o enunciado da conjectura)*: Todas as fracções de dízimas finitas que tenham o denominador acabado em 2, 4, 6 ou 8, o respectivo denominador é traduzido por uma potência de base 2". Vamos lá ver o português. Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui.
8. Isabel: Sôtora, porque o 1/6 não é, mas eu estou a falar em dízimas finitas, só dentro das dízimas finitas.
9. Tânia: Só as que são dízimas finitas e que terminam em 2, 4, 6 e 8 é que ela diz que dão potências de base 2.
10. Rebeca: Ah! Então esperem lá... Tu não estás a dizer que todas as que acabam em 2, 4, 6, ou 8 dão dízimas finitas…
11. Tânia e Isabel: Não. São as que acabam mas dentro das finitas.
12. Rebeca: Daquelas que tu viste que eram finitas, acabavam…
13. Isabel: Por exemplo, as que acabam em 2, 4, 6, 8, podem ser traduzidas por uma base de potência… por uma potência de base 2.
14. Rebeca: Daquelas que tu observaste. Estão a perceber? *(dirigindo-se à turma)* Isto é uma coisa muito importante…
15. Isabel: Pois é. O português é que se calhar…
16. Rebeca: Exacto. Porque é a tal coisa, é dizer num sentido ou noutro, não é? Tu dizes que nem todas as fracções em que os denominadores acabam em 2 ou em 4 ou em 6 ou em 8 dão origem a dízimas finitas, mas que aquelas que são finitas e em que o seu denominador acaba em 2 ou em 4 ou em 6 ou em 8, este denominador é uma potência de 2. Mas isto foi num contexto particular, não é?
17. Isabel: Sim.
18. Rebeca: Eu, se calhar, aqui cometi uma gafe. Tirei do contexto onde estava. Foi no contexto de um caso particular em que... e agora vou passar aqui para um outro acetato (...).

(TA 21/10/02, pp. 1-2)

Até ao momento em que surge este episódio, tinham sido apresentadas, exclusivamente, conjecturas falsas, bem como exemplos que permitiam refutá-las. Rebeca, embora sem o explicitar para a turma, incluiu a conjectura formulada por Isabel no grupo das que podem ser contrariadas. No pouco tempo de que dispôs antes da aula para analisar os trabalhos dos alunos, não interpretou correctamente o seu enunciado: "Tenho aqui uma anotação referente à conjectura da Isabel. Eu acho que ela até a formulou muito bem. Eu é que não vi na altura. Devia estar palerma... (risos)" (TST 39, p. 2). O seu objectivo, ao submetê-la ao escrutínio da turma, era promover a sua análise de modo a obter, a exemplo do que anteriormente tinha acontecido, a indicação de um ou vários contra-exemplos que permitissem considerá-la falsa.

Rebeca dirige à turma, e não à aluna que formulou a conjectura, o pedido de comentário. Através desta via amplia, para lá de si, a responsabilidade de avaliar algo que é apresentado. É Isabel quem primeiro intervém enunciando o seu ponto de vista sobre a validade da conjectura (§2). Embora considerando-o, no momento, incorrecto, a professora não comunica o juízo que dele faz, limitando-se a dar-lhe visibilidade, através da repetição das palavras da aluna (§3). Este movimento origina uma reafirmação da posição expressa (§4) que é, de novo, enfatizada por Rebeca, via repetição (§5), sem que esboce qualquer movimento que traduza a sua própria perspectiva sobre a validade da conjectura em análise. Este modo de agir começa a desencadear tentativas de justificação como é visível nas palavras de Tânia (§6).

Rebeca muda, então, de estratégia. Relê a conjectura, foca a atenção da turma na sua interpretação e começa a tentar semear a dúvida quanto à avaliação que está a ser feita: "Eu disse vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui [§7], um bocado a mostrar que não era assim, que falhava ali qualquer coisa" (TST 39, p. 3). É através desta via que emerge um desacordo, embora implícito, onde está em confronto a posição da professora *versus* posição de Isabel a que Tânia, entretanto, aderiu.

Começam a surgir explicações relativas ao significado da conjectura (§8, §9) que originam, em Rebeca, dúvidas quanto à interpretação que dela fez: "Ah! Então esperem lá..."(§10). Procurando torná-lo inteligível quer para ela própria, quer para a turma, rediz essas explicações (§10, §12) e, uma vez compreendido o ponto de vista de Isabel e Tânia, preocupa-se em que a turma o entenda também. Recorre nomeadamente a um relato em que articula as explicações apresentadas com o enunciado da conjectura (§16) e, deste modo, torna mais claro o seu significado.

Por último, Rebeca explicita a hipótese de ter cometido uma "gafe", ou seja, um erro não intencional, resultante de não ter considerado o contexto particular em que a conjectura foi formulada. Através desta via, revela a existência de uma incorrecção no seu raciocínio o que, embora não significando adesão à veracidade da conjectura, traduz, ao deixar de a considerar falsa, uma alteração da posição que tinha no início da sua análise.

A reflexão de Rebeca sobre este episódio, denota a intenção de tentar perceber o ponto de vista de Isabel e Tânia o que, na sua perspectiva, foi importante. Simultaneamente revela a satisfação que sentiu por estas alunas terem defendido os seus pontos de vista:

> Eu não percebi bem a conjectura que a Isabel e a Tânia tinham formulado. Mas, e eu tinha salientado como um aspecto positivo, elas até argumentaram bem aquilo que tinham afirmado. Mantiverem bem a sua posição e conseguiram explicitar. Podiam ter concordado comigo (...) Mas não. Argumentam comigo e isso é um aspecto positivo. (...) Eu aqui nas minhas anotações até escrevi: as alunas argumentaram bem o que tinham afirmado, eu é que não tinha percebido, mas vá lá, ouvi-as. Isto é um aspecto positivo. Porque às vezes podia não o ter feito, às vezes com a pressa e com o receio de dispersar-me. Mas vá lá. Tentei perceber o que elas estavam a explicar. (TST 39, p. 3)

Foi a não invalidação imediata da avaliação de Isabel sobre a conjectura de que era autora, aliada à paciência de Rebeca para escutar e ao seu desejo e esforço para entender, que possibilitaram a oportunidade e o tempo necessários para que pudesse surgir o raciocínio que estava subjacente ao que as alunas defendiam. Este modo de agir permitiu ultrapassar o desacordo implícito na situação. Simultaneamente, ao explicitar que ocorreu uma alteração na sua interpretação da conjectura, Rebeca ensina à turma, não apenas que a expressão de desacordos é possível e desejável mesmo estando em causa as suas ideias, como também que é no valor dos argumentos que se apresentam, e não na sua autoridade enquanto professora, que deve fundar-se a actividade matemática da aula.

Não podíamos resolver o problema considerando os dois casos?

Os desacordos (7) e (8) enraízam-se na sugestão apresentada por Rogério: "Podíamos multiplicar por 5 elevado a uma letra (...) No final ficava 1 sobre 2 elevado a *n* vezes 5 elevado a *p* mais a diferença entre *n* e *p*" (§11 e §17, episódio *Isto é com exemplos concretos. E olhando para eles... Qual é o problema que se levanta aqui?*). Ao escutar esta sugestão, Rebeca tem "consciência" (TST 39, p. 25) que "há um aluno que vai muito mais à frente no raciocínio relativamente a outros (...) [e] que os outros não deviam estar a acompanhar nada" (idem). Assim, opta por retomar um exemplo anteriormente analisado ($1/2^4x5^5$) com o objectivo de tornar a ideia de Rogério mais inteligível para a turma. As indicações deste aluno, que regista no quadro tal como lhe são apresentadas ($1/2^nx5^p = 1/2^nx5^{p+(n-p)}$), apenas incidem na transformação do denominador da fracção de partida. No entanto, como anteriormente referi, não considera ser este erro o principal problema para a compreensão da sugestão de Rogério:

> Eu acho que o problema aqui foi mesmo ele ter falado logo na diferença entre *n* e *p*. Pelo menos foi assim que eu interpretei, apesar de depois às tantas, mais à frente, eu ter visto que também não estavam a perceber como é que se obtinha a fracção quando no exemplo concreto o Rogério multiplicou o denominador por 5^{4-5} e não alterou o numerador. Aliás isso não estava correcto. Mas, de facto, interpretei o problema como sendo eles não perceberem porque é que tinha que se multiplicar por 5^{4-5}. Aliás, logo atrás eu achei que eles não eram capazes de perceber o que o Rogério estava a dizer. (TST 39, p. 26)

A prioridade dada por Rebeca à compreensão, pela turma, do processo de transformação do denominador surge, de novo, na resposta que apresenta quando, referindo-me ao exemplo $1/2^4x5^5$ — em que, durante uma parte da aula, também apenas o denominador surge multiplicado por 5^{4-5} —, a interpelo sobre a possibilidade de fazer algo para minimizar eventuais dificuldades resultantes da não equivalência das fracções, embora mantendo a atenção da turma focada no referido denominador. Esta resposta deixa, simultaneamente, transparecer a sua intenção de que fossem os alunos, e não ela própria, a identificarem o erro de cálculo:

> Pois, podia sim. Mas não sei se a dúvida deles era essa. Eu acho que foi mesmo a questão da transformação do denominador. E, por outro lado, ao pôr, no exemplo, um ponto de interrogação no numerador [um exemplo que refiro] já estava a dizer que aquilo não estava mesmo bem!... Não é? (TST 39, p. 30)

Localizando as principais dificuldades dos alunos na incompreensão do porquê da referida transformação, é aqui que opta por focar, primeiramente, a atenção da turma. Para o efeito, evoca o exemplo $1/2^4x5^5$ cuja análise, ao requerer um grau de abstracção inferior ao exigido pela representação algébrica $1/2^nx5^p$, pode contribuir para tornar mais inteligível a sugestão de Rogério. Só mais tarde se preocupa com a questão da não equivalência das fracções resultante da não multiplicação do numerador: “E uma vez percebido o problema da transformação do denominador é que resolvi ver o pormenor do cálculo, que era mais fácil para eles” (TST 39, p. 30).

Tendo por referência a representação algébrica $1/2^nx5^p$ referida no enunciado da conjectura, Tânia considera que as designações *n* e *p* significam sempre os expoentes das potências de base, respectivamente, 2 e 5 e não o contrário. Quando Rebeca propõe que se retorne ao exemplo ($1/2^4x5^5$), começa a pôr em causa que neste caso a diferença entre os expoentes seja 1. Afirma que é -1 e fundamenta a sua posição dizendo que a diferença de que se fala é entre *n* e *p*: “Tânia: Mas é *n-p* sôtora...” (TA 24/10/02, p. 7).

Face ao questionamento que começa a esboçar-se, Rebeca apresenta, pela primeira vez, a sugestão da turma considerar separadamente os casos n>p e p>n: “Ah, então vamos lá separar isto aqui (referência à diferença entre *n* e *p*) em duas hipóteses...” (TA 24/10/02, p. 8). É neste contexto que surge o episódio *Mas não pode ser. O p é que é o maior. E depois como é que sabemos qual é que é maior para fazermos?*, intervenção que escolhi para designar o desacordo (7).

Mas não pode ser. O *p* é que é o maior. E depois como é que sabemos qual é que é maior para fazermos?

A professora chama a atenção para que o problema que está em análise resulta do facto do 5 e do 2 não terem o mesmo expoente e não estarmos perante situações concretas em que ao olharmos para os expoentes sabíamos logo por que valor devíamos multiplicar ambos os termos da fracção.

1. Rogério: Por isso mesmo. Se não sabemos quais são os expoentes temos que pôr a diferença entre um e outro.
2. Tânia: Para sabermos por quanto é que temos que multiplicar.
3. Outro aluno: Sôtora, por exemplo, o *n* pode ser 20 e o *p* pode ser 40.
4. Rebeca: Podem estar trocados.
5. Rogério: Nesse caso seria o *p* mais 20.
6. Tânia: Mas não pode ser. O *p* é que é o maior. E depois como é que sabemos qual é que é maior para fazermos? Para sabermos o que temos que pôr aqui?
7. Rebeca: Então já vamos ver isso. Então não podíamos resolver o problema considerando dois casos? Se o *n* for maior que *p* ou se *p* maior que o *n*.
8. Alberto: Sôtora, deixe só passar isso.
9. Rebeca: Vá, então depois já vamos ver isso.
10. Diogo: Sôtora, o *n* é menor do que o *p* porque é mais cedo no alfabeto.
11. Rebeca: *(ri-se)* Ah, boa... Isso é a lógica do alfabeto...

Os alunos continuam a passar para os seus cadernos os registos no quadro (...).

12. Rebeca *(dirigindo-se ao Rogério):* Tu somaste *n-p* aqui ao *p*, porquê? *(aponta para n-p em* $1/2^n$x$5^{p+(n-p)}$*)* Prestem lá os outros atenção que esta não é fácil.
13. Rogério: Por exemplo, indo com um caso concreto. Aí 4 menos 5 dá menos 1 *(refere-se ao exemplo* $1/2^4$x5^5*)*, 5 mais menos 1 dá 4.
14. Rebeca: Espera aí. Estás a fazer 4 menos 5...
15. Rogério: Dá menos 1.
16. Tânia: Não podemos fazer com esse exemplo aí. Ele ali *(referência a* $1/2^4$x5^3*)* pode multiplicar por um 5.

Rebeca sugere que de modo a terem diferenças sempre positivas se considerem dois tipos de casos, aqueles em que o n>p e aqueles em que p>n. O Rogério acha que não vale a pena e diz: "Dá na mesma quer o n seja maior do que o p ou o p maior do que o n". Rebeca, servindo-se dos exemplos $1/2^4$x5^5 *e* $1/2^4$x5^3 *começa a considerar os dois tipos de casos.*

(...)

(TA 24/10/02, pp. 8-9)

Rebeca classifica a primeira intervenção de Rogério (§1) como "interessante" (TST 39, p. 26) pois, na sua perspectiva, ela revela que este aluno "está a justificar-se, a defender a sugestão que deu" (idem). Esta sugestão só, parcialmente, merece o acordo de Tânia. Com efeito, as suas intervenções se, por um lado, indicam que o cálculo da diferença entre os expoentes n e p não lhe levanta problema algum (§2), por outro, ilustram que é a comparação dos expoentes e a identificação do maior que permitem, do seu ponto de vista, descobrir qual a base da potência que deve ser usada para obter a transformação pretendida (§6, §16). O motivo do desacordo reside, assim, na necessidade de conhecer, ou não, qual dos expoentes é o maior. Para Tânia, os dados de que Rogério parte são insuficientes. Contrariamente, este aluno considera que a informação que a colega pretende, é desnecessária.

Ao apresentar a sua sugestão para o caso geral, Rogério indica que é n-p, ou seja, a diferença entre o expoente de 2 e o expoente de 5, a quantidade que deve ser adicionada ao expoente desta última potência para poder ser obtida uma fracção cujo denominador é uma potência de 10. No entanto, a resposta apresentada quando confrontado com um caso concreto em que o expoente de 5 é superior ao de 2 (§5), deixa no ar a dúvida se terá consciência que a correcção da sua sugestão não é independente da ordem pela qual se deve efectuar a subtracção dos expoentes. É Tânia quem põe em causa esta resposta e, indo para lá dela, revela que as questões com que se confronta derivam da impossibilidade de identificar, no caso geral, o maior dos expoentes (§6).

Rebeca não corrige a resposta de Rogério, assim como não manifesta a sua concordância com Tânia quanto à incorrecção desta resposta (§7). Em lugar disso, retoma a sugestão de considerar separadamente os casos n>p e p>n que permite fazer face ao questionamento de Tânia. É a apresentação desta proposta que constitui a primeira estratégia que adopta para ajudar os alunos a ultrapassarem o desacordo expresso: "Perante esse desacordo insisto na ideia de separar os dois casos, considerar n>p e p>n [referência ao §7]" (TST 39, p. 27).

O curso da discussão é brevemente interrompido para enquadrar o pedido de Alberto (§8). Durante esta interrupção Diogo faz uma afirmação (§10) que, a ser verdadeira, permitiria resolver, em geral, o problema da comparação dos expoentes com que Tânia se confrontava. Durante a aula, Rebeca interpreta-a como uma brincadeira e, por isso mesmo, não lhe dedica grande atenção. No entanto, ao reflectir, mais tarde, sobre o seu conteúdo, evoca o conhecimento que lhe advém de afirmações semelhantes proferidas, seriamente, noutros contextos e considera que a deveria ter submetido à avaliação da turma:

> O Diogo disse: *Sôtora, o n é menor do que o p porque é mais cedo no alfabeto* [§10] Eu ri-me, disse: *Ah, boa.... Isso é a lógica do alfabeto...* [§11]. Devia ter deixado os outros comentarem porque acho que já não é a primeira vez que acontece. Não sei se ele estava a falar a sério, se calhar estava na brincadeira e se calhar por isso é que não levei a sério, mas independentemente de ter levado para a brincadeira poderia ter aproveitado porque isto já surgiu outras vezes sem ser em contexto de brincadeira. Devia ter pedido para os outros comentarem. (TST 39, p. 27)

Enquanto os alunos anotam nos seus cadernos os registos feitos no quadro, Rebeca debate-se com um dilema: "Estava aqui com o tal dilema de seguir o raciocínio do Rogério, mas ao mesmo tempo, o tornar acessível a todos" (TST 39, p. 27). Quando retoma a discussão, opta por tentar que este raciocínio se torne inteligível para os colegas. Endereça a este aluno um pedido de justificação através do qual procura que fundamente a sugestão que apresentou e, quase simultaneamente, dirige-se à turma visando focar a atenção no que irá ser comunicado (§12). Rogério evoca o exemplo $1/2^4x5^5$ para, através dele, defender a sua ideia. A professora rediz, parcialmente, a contribuição (§14) e, por esta via, enfatiza a ordem pela qual devem ser subtraídos os expoentes das potências, um aspecto particularmente relevante da explicação. Face ao desacordo que Tânia continua a exprimir, apresenta, de novo, a proposta de serem separados os casos n>p e p>n. Esta proposta, antes apenas enunciada, é seguida de uma justificação que, embora dirigida à turma em geral, parece ter como audiências privilegiadas Tânia e Rogério.

Com efeito, a indicação que a separação dos casos permite obter diferenças sempre positivas entre os expoentes, permite ultrapassar a objecção que a aluna levanta. Simultaneamente, a própria existência da justificação revela a preocupação em que Rogério compreenda as razões pelas quais está a apresentá-la. No entanto, estas razões não o convencem. O episódio *Não vale a pena separar. O processo* *resulta mesmo que a diferença entre n e p seja um número negativo*[58], intervenção escolhida para designar o desacordo (8), ilustra que, neste momento, começa a aparecer um novo desacordo cujo conteúdo se desloca da potência pela qual deve ser multiplicado o denominador das fracções, para a proposta apresentada pela professora para alcançar este objectivo.

Não vale a pena separar. O processo resulta mesmo que a diferença entre *n* e *p* seja um número negativo

(...)

O Rogério insiste na sua ideia:

17. Rogério: Não vale a pena separar. O processo resulta mesmo que a diferença entre *n* e *p* seja um número negativo *(justifica o seu raciocínio recorrendo ao exemplo* $1/2^4$x5^5*; a professora vai registando no quadro os cálculos correspondentes)*.
18. Tânia: Mas depois não sabes quando é a multiplicar ou dividir, depois não sabes quando é que se deve multiplicar por 2 elevado a uma coisa ou quando é a dividir por 5...
19. Rebeca: Eu acho que também dá da maneira como tu estás a dizer *(dirigindo-se ao Rogério).* Não sei é se os teus colegas conseguem perceber. Incomoda-te muito se separarmos em dois casos particulares, ou seja, um caso em que o *n* é maior que o *p* e...
20. Rogério: Não, até já mostrei com um exemplo concreto e vi que dá para todos...
21. Tânia: Mas para provar tem que ser para todos...
22. Rebeca: Para provar tem que ser para todos, exactamente. Então e incomoda-te se a gente separar e depois a seguir juntarmos tudo naquele teu caso? Pode ser?
23. Rogério: Se a sôtora quer!...
24. Rebeca: Então, mas se não.... O que é que tu farias aqui? Vamos lá ver. Então, indo pela lógica do Rogério. Donde é que vem aqui este *n-p*? Vá. Os teus colegas acho que não perceberam. Alguém percebeu donde vem este *n-p*?

(TA 24/10/02, p. 9)

Rogério, expressa, claramente, o seu desacordo em relação à proposta de considerar, separadamente, os casos n>p e p>n, recorrentemente referida por Rebeca. Fundamenta a sua posição salientando que o seu processo é válido mesmo

[58] Episódio subsequente a *Mas não pode ser. O p é que é o maior. E depois como é que sabemos qual é que é maior para fazermos?*

que a diferença seja negativa (§17). Posiciona-se, assim, num pólo oposto ao da professora e, deste modo, no novo desacordo que surge, os subscritores das posições em confronto deixam de ser apenas alunos. A não concordância de Tânia com a sugestão de Rogério continua e o que diz revela permanecerem os problemas com que se confronta (§18). E perante esta situação, o dilema de Rebeca em seguir, ou não, o raciocínio de Rogério e, simultaneamente, conseguir que o resto da turma o compreenda mantém-se. Do seu ponto de vista, há uma intervenção sua onde transparece este dilema: "Nesta minha fala [§19] nota-se o dilema que tenho" (TST 39, p. 27).

A estratégia usada por Rebeca para lidar com o desacordo que Rogério exprime é procurar obter a sua adesão para a proposta que ela própria apresenta: "Incomoda-te muito se separarmos em dois casos particulares, ou seja, um caso em que o n é maior que o p e...." (§19). Não pretende, no entanto, que a concordância do aluno seja obtida a qualquer preço e que se enraíze, na autoridade que detém como professora. Assim, depois de comunicar a Rogério que considera a sua sugestão uma possibilidade viável — "Eu acho que também dá da maneira como tu estás a dizer" (§19) — procura fundamentar a sua própria proposta. Começa por invocar um problema que pressente poder existir na referida sugestão: "Não sei é se os teus colegas conseguem perceber" (§19). Quando Tânia questiona a justificação que Rogério apresenta em defesa da sua posição (§21), adere e dá visibilidade, através da repetição, ao argumento que apoia a objecção desta aluna (§22). Agindo deste modo, Rebeca ajuda a turma, e nomeadamente Rogério, a compreender não só o significado de prova, mas também que é fundamental que as ideias apresentadas sejam entendidas por todos e que a explicação do porquê daquilo que se faz é uma parte importante das relações a estabelecer na aula.

Apesar dos seus esforços, Rebeca não consegue obter, de Rogério, a adesão que pretende (§23). Mesmo considerando, nas suas palavras, que "a minha ideia era mais fácil" (TST 39, p. 28), opta por não recorrer à autoridade que detém para impor o rumo da aula. Inflecte-o, claramente, e é a sua concordância com a via proposta por Rogério que permite ultrapassar o desacordo expresso. As reflexões apresentadas em seguida permitem compreender onde se enraíza a sua decisão:

> Então ando ali com as normas que é importante que as coisas tenham significado para todos, que não é porque eu digo que tem que se fazer assim, e depois ali uma situação daquelas!!!... (risos) Não pode ser porque eu quero. Tem que ser porque eles percebem. Porque eu estava a insistir naquilo, não é? E acho que foi mesmo o ele dizer *se a sôtora quer* [§23]. Acho que isto foi o clic. Exacto. Porque as coisas não são porque eu quero ou porque eu digo. Têm que ter significado para eles e se ele achava que era assim que dava, então pronto. (TST 38, p. 60)

> Eu aqui retrocedi. Pensei: o Rogério não está convencido da separação em dois casos particulares e desde que consiga convencer os outros deve seguir os seus raciocínios e não os meus porque eu digo, não é? Eu estava a insistir na separação em dois casos, mas este *se a sôtora quer...* [§23] fez-me despertar (risos). (TST 39, p. 28)

A intervenção de Rogério “Se a sôtora quer!...” (§23) foi determinante para Rebeca inflectir o rumo da aula. Nas suas palavras foi “o clic”, foi o que a fez “despertar”. Ajudou-a a compreender que a insistência na separação dos casos que propunha não fazia sentido para este aluno e que apenas poderia prosseguir por este caminho se impusesse a sua vontade, sacrificando, deste modo, a liberdade dos alunos seguirem os seus próprios raciocínios e o significado que pretende que atribuam “às coisas” que se fazem na aula, ou seja, à actividade matemática que aí se desenvolve. Mantendo-se no rumo que propunha, estava a ensinar à turma que no decurso desta actividade há momentos em que o “porque eu quero” predomina sobre o “porque eles percebem”.

Rogério parece ter funcionado, no momento, como agente catalisador da consciencialização por Rebeca do conhecimento sobre *normas sociais e sociomatemáticas*, no sentido de Cobb, Yackel e Wood (documento 3, tabela 7, capítulo V), proveniente destes conceitos terem sido discutidos e mobilizados nalgumas das sessões de trabalho do projecto. E porque privilegiou a autonomia, o significado e a compreensão, decidiu ser preferível fazer face à insegurança que sentiu resultante de não ter pensado, previamente, na sugestão e correr o risco de enfrentar, a par com a turma, os obstáculos que ela poderia acarretar. E, precisamente, porque procura que nas suas aulas quem enuncia uma ideia seja responsável por apresentar argumentos que convençam os outros da sua pertinência e validade, manifesta alguma insatisfação por ter insistido, durante tanto tempo, na separação dos casos e não ter usado a oportunidade para destacar, através de Rogério, a importância desse aspecto:

> Eu insisto que eles têm que convencer os outros e eu aqui devia ter posto isso em evidência. Eu acho que era mais fácil separar em dois casos, mas acho que em vez de insistir na minha ideia, devia ter dito para ele explicar aos outros e conseguir convencê-los. (...) Mas não, continuei a insistir na minha ideia da separação... (risos) (TST 39, pp. 27-8)

Nas palavras de Rebeca, "a partir do momento em que decido seguir a lógica do Rogério, aquilo que começo a fazer é a tentar que o raciocínio dele se torne mais acessível para os outros" (TST 39, p. 28). Neste âmbito, rediz, reformulando, uma contribuição deste aluno de modo a destacar que n-p representa a diferença entre o expoente da potência de base 2 e o expoente da potência de base 5 e, em seguida, procura, através da pergunta que lhe coloca, que justifique porque é que esta diferença foi adicionada ao expoente desta última potência. Tânia integra na sua a voz de Rebeca — "Pois, então porque é que ele foi somar ao *p* e não foi somar ao *n*?" (Tânia, TA 24/10/02, p. 9) — e inicia-se um momento de discussão, focado no desacordo anteriormente expresso por esta aluna, em que apenas dois alunos estão envolvidos: "Há uma discussão entre o Rogério e a Tânia e os outros estão nitidamente à parte" (TST 39, p. 28).

As contribuições de Tânia são relevantes para a compreensão do raciocínio do Rogério e, nesta medida, constituem um recurso para o trabalho de ensino. Com efeito, ajudam a destacar a importância da justificação solicitada por Rebeca. Além disso, esta aluna para lidar com respostas do colega que considera não esclarecedoras, recorre a um processo de afunilamento da pergunta inicialmente colocada pela professora, o que contribui para esta pergunta ir ganhando uma maior precisão. A intervenção "O que eu estou a dizer é como é que sabes que, por exemplo, o *p* é mais pequenino do que o *n* para poderes fazer aquilo" (TA 24/10/02, p. 10) representa uma das perguntas que Tânia coloca.

Rebeca tem, no entanto, consciência de que o facto dos restantes alunos estarem "dispersos" (TST 39, p. 28), não lhes permite usufruir das potencialidades da discussão. Face a este conhecimento, procura identificar estratégias que permitam que a troca de ideias se generalize. Começa por intervir apelando, directamente, à participação de outros elementos da turma: "Olhem, vocês podiam ajudar aqui à discussão, porque são só duas pessoas ali em dúvida" (TA 24/02/02, p. 10). Além disso, solicita a Tânia que fale "de forma audível para que os colegas possam entender" (TST 39, p. 28).

Estas estratégias não dão frutos. A discussão continua acalorada mas mantém-se, apenas, entre os dois alunos. Em determinada altura, Rogério, com o objectivo de explicar o seu raciocínio retoma, de novo, o exemplo $1/2^4x5^5$. De início, é Rebeca quem regista, no quadro, o que o aluno vai referindo. A meio do processo decide mudar de estratégia e opta por lhe pedir que prossiga, ele próprio, esses registos. Esta mudança facilitou, do seu ponto de vista, o trabalho futuro: "Mais à frente, eu mandei o Rogério ir ao quadro e acho que facilitou o trabalho" (TST 39, p. 28). Veio, além disso, a originar a parte da aula de que mais gostou: "A parte de que gostei mais da aula foi a partir do momento em que o Rogério foi ao quadro explicar" (idem, p. 29). As suas palavras revelam as vantagens que considera terem advindo da mudança de estratégia:

> Devia era tê-lo mandado ir ao quadro há mais tempo. Acho que tinha sido melhor. Quando for uma coisa mais complexa e em que os alunos estejam a tentar explicar, em vez de estar eu no quadro a tentar desmontar o que eles estão a dizer do lugar, acho que é preferível eu mandar o aluno ao quadro. Porque se não gera-se um diálogo muito entre mim e o aluno que está do lugar a explicar e os outros podem dispersar. Aqui mais à frente acho que o facto do Rogério ir ao quadro ajudou. E eu fiquei no fundo da sala a tentar prestar atenção ao que se está a passar no quadro mas também aos outros alunos. Eu fiquei mais livre para apoiar e eles fixaram-se mais no colega e não em mim. (TST 39, pp. 28-9)

Como é visível nesta reflexão, em momentos em que um aluno procure explicar ideias complexas, é importante, segundo Rebeca, ceder-lhe o lugar do quadro para que seja inteiramente responsável tanto pela explicação que pretende apresentar como pelos registos que escolhe fazer para a apoiar. Através desta via, pode evitar-se que se gere um diálogo em que apenas intervêm a professora e o aluno com os riscos que acarreta de dispersão dos colegas por assuntos alheios à explicação. Foi essa cedência que juntamente com a deslocação para um espaço da sala em que lhe era possível observar o que se passava com a globalidade dos alunos, permitiu que o foco da atenção da turma passasse a ser a actividade de Rogério e que fossem ampliadas as possibilidades de apoio que pôde proporcionar.

Rogério conclui, no quadro, os cálculos relativos à transformação de $1/2^4x5^5$ numa fracção cujo denominador é uma potência de 10: $1/2^4x5^5= 1/2^4x5^5x5^{4-5} = 1/2^4x5^5x5^{-1}= 1/2^4x5^4=1/10^4$. Começam a emergir, por iniciativa de vários alunos, questões diversas que denotam incompreensão das ideias apresentadas. Neste âmbito, o trabalho de Rebeca é orientado por dois tipos de preocupações. Uma foi a de mostrar à turma que não é a professora que valida, ou não, as ideias comunicadas: "Não é a professora que valida, foi uma preocupação que eu tive. Mostrei isso várias vezes. Por exemplo aqui digo: "*Perguntem ao Rogério que ele agora é que explica*" (TST 39, p. 29). Outra foi a de começar por centrar a discussão na compreensão da transformação do denominador, aspecto que considerou ser, neste momento, a principal fonte de dificuldades dos alunos:

> Eu acho que não percebi que havia esse problema com o numerador logo no momento em que ele o escreveu, mas percebi muito mais cedo do que foi corrigido, que aquilo estava mal. E na altura achei mesmo que não era aquilo que devia reforçar. Optei por me focar mesmo na questão do denominador. E depois é que iria resolver o outro problema do cálculo. Porque achei que a dificuldade era mesmo aquela e não a do cálculo. (TST 39, p. 30)

Ao considerar ultrapassadas as dificuldades relacionadas com a transformação do denominador, Rebeca procura que a actividade da turma se centre na resolução do "problema do cálculo": "Havia um erro no que o Rogério tinha escrito e só a partir de determinada altura é que comecei a tentar focar a atenção dos alunos nesse erro" (TST 39, p. 29); "Depois deles resolverem o problema dos denominadores, fui para os aspectos do cálculo" (idem, p. 30).

Para o efeito, começa por dizer: "Vejam lá bem se a última fracção é equivalente à primeira. O que fizeste no princípio foi multiplicar o denominador da segunda fracção por uma certa quantidade *(dirigindo-se a Rogério)*" (TA 24/10/02,

p. 11). A primeira parte da intervenção, dirigida à globalidade da turma, permite introduzir a questão da equivalência das fracções e, simultaneamente, remete para a turma a avaliação da existência, ou não, dessa equivalência. A segunda, constitui o relato de um procedimento seguido por Rogério e através dele Rebeca destaca, embora sem o dizer, o aspecto problemático da explicação. É a contribuição posterior de um aluno que permite iniciar o processo de correcção do referido erro de cálculo:

> O Duarte disse que não estava a perceber e eu aproveitei e quis que ele dissesse o que não estava a perceber e pergunto: *Duarte, o que é que é que não estás a perceber? Rogério, espera aí um bocadinho antes de passares para o caso geral. O que é que não estás a perceber Duarte?* O Rogério queria logo passar para o caso geral e antes de o deixar avançar queria que a questão dos cálculos ficasse arrumada como deve ser. Tive essa preocupação. Depois o Duarte diz que não sabe se o Rogério pode multiplicar por 5 para passar de $1/2^4x5^5$ para $1/2^4x5^5x5^{4-5}$ e eu repeti para chamar a atenção dos outros. Está aqui: *Olhem, o que o Duarte diz é que não está a perceber como é que tu passas de* $1/2^4x5^5$ *para aqui. Como é que ele pode passar dali para ali, como é que pode?* Portanto, aproveitei a fala do Duarte para ver se o erro era corrigido e depois o Rogério emendou. Disse*: Ah, pois. Enganei-me. Fiz a mesma coisa que fiz ali mas esqueci-me da parte de cima, sôtora.* (...) Ele aqui não emendou tudo. Pôs só 5 no numerador e fui eu, mais à frente, que disse que faltava o –1 no expoente do numerador. Achei que ele se tinha esquecido, mas depois o Rogério disse que tinha posto mas que os outros é que disseram para não pôr. Está aqui: *Eu pus, mas depois eles disseram-me para não pôr...* E eu digo: *Então disseram ao Rogério para não pôr o menos 1?!... Então mas põe ou não põe?* A Tânia disse que punha e eu aqui comecei a achar que ela já tinha percebido o Rogério e mais à frente vi que ela tinha percebido. Depois houve aqui uma conversa sobre potências de expoente negativo que eles já não se recordavam. (TST 39, pp. 30-1)

A análise da descrição de Rebeca sobre o processo de resolução do problema de cálculo, bem como dos comentários que sobre ele tece, revela que, nesta fase da aula, a sua acção foi orientada por várias preocupações interligadas.

Em primeiro lugar, preocupa-se com a correcção da actividade matemática que se desenvolve na aula. Antes que os alunos avançassem para a prova do caso geral, como era intenção de Rogério, quis que o problema do cálculo ficasse resolvido "como deve ser".

Em segundo lugar, surgem preocupações relacionadas com o próprio processo de correcção que se processou em duas etapas: (a) substituição de 1 por 5 no numerador da fracção decimal e (b) alteração de 5 para 5^{-1}. Rebeca procura que sejam os alunos — através do recurso a conhecimentos que supunha estarem apropriados — a avaliarem os procedimentos de cálculo usados na transformação da fracção $1/2^4x5^5$ em $1/10^4$ de modo a conseguirem identificar o erro que aí existia. A intervenção que fez para focar a atenção da turma no problema de cálculo, embora tenha permitido trazer para primeiro plano a questão da equivalência das fracções, foi suficientemente aberta para esta identificação ser possível.

Na etapa inicial da correcção, as intervenções de Duarte são recursos que usa para atingir este objectivo. Quando confrontada com a primeira, tenta que o aluno expanda o seu raciocínio de modo a tornar claro o objecto da sua incompreensão. Perante a segunda, em que este aluno explicita o aspecto problemático dos procedimentos usados por Rogério, repete-a reformulando-a de modo subtil, e através desta via, tenta que a turma foque aí a sua atenção. É esta intervenção de Duarte, em conjunto com a visibilidade acrescida introduzida pela voz da professora, que permitem a Rogério aperceber-se, de imediato, da incorrecção existente nos cálculos que ele próprio tinha feito no quadro. Na segunda etapa da correcção, é a professora quem indica a alteração que deve ser feita. No entanto, quando constata que a sua inexistência não resultou de esquecimento, como supunha, mas de indicações dadas por elementos da turma que Rogério aceitou de forma acrítica, procura, antes de mais, que os alunos se pronunciem sobre a validade matemática de cada uma das possibilidades. Posteriormente, porque confrontada com algumas respostas incorrectas, revisita o significado de potência de expoente negativo.

Em terceiro lugar, transparece a preocupação de averiguar se o desacordo expresso por Tânia tinha sido, ou não, ultrapassado. As intervenções anteriores desta aluna tinham revelado que, para ela, o processo de transformação de uma fracção cujo denominador é o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5 numa outra em que o denominador é uma potência de 10, passava, necessariamente, por garantir que fosse positiva a diferença entre os expoentes daquelas potências. Era esta garantia que o processo de Rogério não assegurava e, por isso, Tânia o punha em causa. É este conhecimento que Rebeca parece evocar quando é confrontada com a indicação, apresentada por esta aluna, de que no numerador se deve pôr 5^{-1}. Num contexto em que se discute equivalência de fracções, esta resposta, ao revelar que é admitida a possibilidade do numerador da fracção ser uma potência de expoente negativo, a par da ausência de questionamento em relação ao denominador, conduzem-na a colocar a hipótese do desacordo, antes expresso, ter sido ultrapassado. O desenrolar da aula vem-lhe a revelar a pertinência desta hipótese: "Mais à frente vi que ela tinha percebido".

Problemas experienciados

Reservei para esta secção a análise dos desacordos (3), (4) e (5). As potencialidades do primeiro podiam ter sido, do ponto de vista de Rebeca, mais amplamente exploradas e, por isso, o incluo aqui. Os dois últimos emergem a partir de intervenções de alunos que levantam objecções, num caso a uma sugestão apresentada por colegas (4) e noutro ao texto registado no quadro (5). Na altura, a professora interpreta estas intervenções de um modo que a leva a conduzir a aula noutra direcção pelo que, diferentemente do que aconteceu com todos os outros desacordos, estes não originaram momentos de discussão especificamente focados na sua resolução. Por esta razão os considerei não resolvidos.

Se tivesse perguntado porquê podia ter aproveitado para depois mostrar os limites do raciocínio indutivo

O desacordo (3) emerge no início da aula de dia 21 no âmbito da apresentação, por Rebeca, de um registo organizado das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas recolhidas dos trabalhos entregues pelos alunos. Rogério fala nas fracções cujos denominadores terminam em zero e no tipo de potências que surgem nas suas decomposições. Dois dos exemplos que refere (1/80 e 1/160) não estavam registados no acetato, pelo que são acrescentados. É nesse momento que Alberto indica 1/240 como um outro caso a incluir neste conjunto. Face a esta resposta, o primeiro movimento de Rebeca é colocar à turma a questão "1/240 também dá?"

(TA 21/10/02, p. 3) e é a partir dela que o desacordo emerge. Há alunos, entre os quais está Alberto, que dizem que sim. Outros referem que não. As suas contribuições permitem, apenas, constatar que há na turma duas posições opostas, uma vez que não são seguidas de explicações ou justificações. Rebeca sugere à turma a decomposição de 240 em factores primos: "Experimentem lá decompor rapidamente o 240 em factores primos para ver o que é que acontece" (idem). As justificações enunciadas tornam visível que 1/240 não pode ser incluída no conjunto "porque tem o 3" (Rogério, idem). Tornam, também, visível que o exemplo não pode ser usado para contrariar as descobertas feitas, até ao momento, sobre dízimas finitas, uma vez que a fracção origina uma dízima infinita. Alberto não levanta objecção alguma e a aula prossegue.

É numa das sessões de reflexão sobre as aulas em análise que foco a atenção na sugestão de Alberto e questiono Rebeca e Anita sobre se seria, ou não, possível e adequado usar a ocasião para dar visibilidade às limitações do raciocínio indutivo. Do ponto de vista de ambas, a incompreensão destas limitações dificulta a percepção da necessidade da prova pelo que, em diversas ocasiões, os esforços do grupo de pesquisa tinham sido canalizados para a procura de tarefas através das quais elas pudessem ser evidenciadas.

Até ao momento Rebeca não tinha pensado nesta possibilidade: "Não me lembrei lá nem depois quando estive a analisar em casa" (TST 39, p. 4). Quando confrontada com ela procura, antes de mais, averiguar a sua pertinência:

> Se calhar ele devia estar a pensar que eram aquelas em que o denominador termina em zero. (...) Pois, também podia ser isso, podia [outra hipótese que apresento: aquelas cujo denominador era constituído por um número par com um zero a seguir]. Ou até aquelas cujo denominador era um múltiplo de 80. (...) Sim, podia ser, mas não apanhei... Quando o Alberto disse 1/240 ele podia estar a fazer uma generalização a partir de casos particulares, do 1/80, 1/160... Podia estar a tentar formular uma conjectura. (TST 39, p. 4)

Admitindo a hipótese de Alberto estar a fazer uma generalização a partir da análise de casos particulares, a professora procura identificar como poderia ter agido na aula se, no momento, lhe tivesse ocorrido esta possibilidade:

> Se eu aqui tivesse perguntado porquê, podia ter aproveitado, até para o desacordo... mas não perguntei... (...) Se tivesse perguntado porquê ao Alberto podia ter aproveitado a generalização que ele podia estar a fazer para depois mostrar os limites do raciocínio indutivo. O problema aqui foi não lhe ter perguntado porquê. (TST 39, p. 4)

Foi da decisão de submeter ao escrutínio da turma uma proposta de um aluno que a professora sabia estar incorrecta, que emergiu um desacordo entre os alunos. É um facto que estes se posicionaram, rapidamente, face à proposta e que a sugestão apresentada por Rebeca permitiu, eficazmente, que vários encontrassem justificações que, uma vez comunicadas, parecem ter permitido ultrapassá-lo. No entanto, a voz que traduzia adesão a essa proposta não chegou a ser ouvida para expressar o que a fundamentava. Era esta voz que poderia ter emergido, nomeadamente através de Alberto, se Rebeca lhe tivesse perguntado porquê. Como refere, "o problema aqui foi não lhe ter perguntado porquê". A inexistência desta pergunta impediu que pudesse perceber o que o aluno queria dizer quando referiu 1/240 e, consequentemente, que pudesse tirar partido do desacordo expresso para ajudar os alunos a compreenderem as limitações do raciocínio indutivo:

> É tentar potenciar acontecimentos de sala de aula para várias coisas, não é? E aqui escapou isto... Neste caso concreto podia ser que servisse para ajudar os alunos a verem as limitações do raciocínio indutivo. Podia ter gerido de outro modo, nomeadamente colocando a pergunta do porquê 1/240. Aí percebia o que ele estava a dizer e podia aproveitar. (TST 39, p. 5)

O mal não é não perceber. É não termos consciência no momento que podemos não estar a compreender

Os desacordos (4) e (5) surgem na aula de dia 21 quando a turma, depois de ter conjecturado que no denominador das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas apenas aparecem potências de 2, de 5 ou produtos destes dois tipos de potências, procurava construir um enunciado que traduzisse as descobertas feitas. É a reflexão sobre a aula que permite a Rebeca dar-se conta que, em ambos os casos, interpretou incorrectamente o significado do que os alunos pretendiam dizer:

> Eu interpretei assim. Além de nem sempre terem o mesmo expoente ou... Mas ele nem queria dizer isso!!... Ele queria dizer não terem mesmo expoente

> nenhum!... (...) Para ele o 2x5 não tem nada no expoente. (TST 39, p. 7, referência ao desacordo (4)).

> Eu aqui em relação ao Rogério acho que também não percebi bem o que é que ele pretendia. Ele diz: *Sôtora, acho que é assim. Essa conjectura não responde muito bem à pergunta que a sôtora pôs naquele papel* [TA 21/10/02, p. 5]. E depois acrescenta: *Porque para a gente poder utilizar essa conjectura temos que saber primeiro quais são as dízimas finitas, para depois as podermos decompor e depois para podermos fazer isso* [idem, p. 6] Eu fiquei aqui com a ideia que ele queria provar a conjectura. Foi assim que eu interpretei e fui tentar passar para a prova. Mas eu acho que não era bem isso. Ele não concordava mesmo com o enunciado da conjectura. (TST 39, p. 8, referência ao desacordo (5))

O título que atribuí ao desacordo (4) deriva de uma intervenção proferida por José: "Nem todos são elevados a x" (TA 21/10/02, p. 4). Quando a escuta, Rebeca começa por procurar compreender o seu significado: "Nem todos são elevados a *x*, como, digam lá" (idem). O aluno expande o seu raciocínio através da apresentação de um exemplo: "Então por exemplo. O 2x5 não é sempre elevado a qualquer coisa. Há o 2x5 normal" (José, idem). A interpretação desta contribuição e de como Rebeca procura testá-la, transparecem nas suas palavras: "Ah, deixa lá ver se eu percebo. O 2 e o 5 nem sempre têm o mesmo expoente, é isso?" (Rebeca, idem). Perante o reforço desta ideia por Tânia e o acordo do aluno, prosseguem as interacções destinadas a tornar mais preciso o enunciado da conjectura.

O desacordo expresso por José surge na sequência de alguns colegas manifestarem o desejo de representarem por variáveis os expoentes das potências de 2 e de 5. Uma das designações que usam para referir estas variáveis é *x*. Neste momento, Rebeca tinha já decidido respeitar o percurso que os alunos estavam a querer seguir e procurava utilizar as suas contribuições como recursos para auxiliar a turma a chegar a uma formulação aceitável da conjectura "c. pot.". Esta formulação passava por encontrar um enunciado que, sem ambiguidade, traduzisse a possibilidade dos expoentes das potências de 2 e de 5 cujo produto surge nos denominadores de algumas das fracções, serem diferentes, tal como os alunos tinham constatado acontecer através das experiências feitas. Foi esta possibilidade que lhe pareceu ser proporcionada pela intervenção de José:

> Eu interpretei que ele queria dizer que o 2 e o 5 nem sempre tinham o mesmo expoente... Se calhar às vezes a gente interpreta as coisas de acordo com o que nos dá jeito (risos). Deve ter sido isso que aconteceu aqui. Dava-me jeito... (risos) (TST 39, p. 7)

Porque Rebeca pretendia que o processo de formulação da conjectura fosse "sempre feito em construção com os alunos" (TST 39, p. 6), dava-lhe "jeito" existir uma intervenção em que pudesse apoiar-se para destacar que não há necessidade dos expoentes das referidas potências de 2 e de 5 serem iguais. Parece ter sido o desejo de escutar uma contribuição deste tipo que, na aula, predominou, o que fez com que o desacordo expresso não fosse utilizado como um recurso para permitir não só a José, mas também a colegas, aprofundarem o seu conhecimento sobre os modos de representação algébrica.

Referindo-se ao desacordo (5), Rebeca indica que, durante a aula, não teve "consciência" de que poderia não estar a compreender, adequadamente, a intervenção de Rogério:

> Na altura devia ter tido consciência de que podia não estar a perceber muito bem o que ele pretendia e não tive. Não vês o que eu disse a seguir? *Então vamos lá ver. Todos vós…* Eu aqui digo todos vós, mas este vós é aqui uma figura de retórica (risos), porque depois continuo. (TST 39, p. 10)

Não se debruça sobre o que poderá ter originado a não consciência que refere. Uma hipótese explicativa poderá ser, no entanto, o interpretar "as coisas de acordo com o que nos dá jeito", de que fala ao reflectir sobre o desacordo expresso por José. Com efeito, ao longo de todas as aulas em que a actividade dos alunos passa pela formulação de conjecturas, Rebeca tem procurado que se apropriem da ideia de que as conjecturas são afirmações provisórias cuja validade só pode ser garantida mediante a produção de uma prova e considera que, de uma maneira geral, esta ideia está já compreendida pelos alunos (TST 39, p. 39). Rogério é um dos elementos da turma com melhor desempenho matemático, pelo que é de supor que saiba que tem que provar a conjectura enunciada. Simultaneamente, Rebeca preparou a exploração da globalidade da tarefa para 90 minutos que se esgotaram na aula de dia 17, a segunda aula já ia avançada e a turma não tinha, sequer, iniciado o trabalho relativo à sua prova. Estava preocupada em conseguir que esta justificação fosse concluída na aula de dia 21. Assim, o entrelaçamento de todos estes aspectos poderá ter contribuído para que entendesse a intervenção de Rogério como revelando estar a sentir a necessidade da prova: “Interpretei que ele achava que aquilo tinha que ser provado” (TST 39, p. 11). Na altura, uma intervenção com este significado “dava jeito”.

Tendo descoberto que o significado atribuído às palavras de Rogério poderia estar muito distante daquilo que motivou o desacordo, Rebeca preocupa-se em avaliar o seu modo de agir na aula e conclui que “neste caso concreto não devia ter avançado para a prova” (TST 39, p. 10). Prossegue a reflexão deslocando-se para lá das aulas em que trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas* e procura identificar não apenas onde, do seu ponto de vista, se funda a possibilidade de surgirem interpretações incorrectas, mas também em delinear modos de acção que contribuam para, no futuro, minimizar o risco de virem a existir:

> O mal não é não perceber. É não termos consciência no momento que podemos não estar a compreender, porque se não tivermos esta consciência corremos muitas vezes o risco de interpretar erradamente as coisas que os alunos dizem. Isto é que é um problema. Temos é que estar sempre atentos e não nos tentarmos forçar muitas vezes a interpretar. Mais vale e acho que é até mais importante lançar para a turma. Temos que ter cuidado (...) Eu tenho que interpretar, claro. Até me posso estar a forçar a interpretar, cá para mim. Mas não devo estar a explicitar para eles (...) Devo fazer perguntas para perceber melhor e não devo repetir de certa forma, adulterando aquilo que eles estão a dizer ou tentando dar respostas. Devo perguntar para perceber. Porque doutra maneira corro o risco de estar a interpretar erradamente, a deturpar aquilo que eles estão a dizer, ou a avançar como foi neste caso. (TST 39, p. 10)

Para Rebeca, é importante que o professor tenha consciência que poderá não estar a compreender as intervenções dos alunos. Em circunstâncias concretas é a inexistência desta consciência, e não a ausência de compreensão, que, para si, constitui um problema. É aqui que se enraíza o risco de serem feitas interpretações erradas. Uma vigilância e cuidado permanentes quanto à possibilidade de existirem, um esforço para não se forçarem interpretações ou, pelo menos, para não as explicitar, o perguntar para perceber melhor e o preocupar-se em não adulterar aquilo que é dito, podem contribuir, na sua perspectiva, para as ideias apresentadas não serem deturpadas pelo professor sem se dar conta.

Usando esta reflexão, Rebeca equaciona o que deveria ter feito perante a intervenção de Rogério: “Devia ter lançado questões para o Rogério no sentido de clarificar o que ele estava a dizer, ou lançar para a turma o que o Rogério disse” (TST 39, p. 10). O não ter consciência, no momento, que podia não estar a perceber a mensagem que este aluno estava a querer comunicar originou, do seu ponto de vista, que tivesse sido desperdiçada uma boa oportunidade para envolver os alunos numa actividade de argumentação matemática: “Eu tenho aqui anotado: Poderia ter aproveitado para dar um bom momento de argumentação matemática se eu tivesse colocado mais questões ou lançado para a turma. Não percebi... São as tais coisas” (idem).

Ensinando para e através da constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático

Foco-me nesta secção nos momentos de trabalho colectivo existentes ao longo das três aulas em que Rebeca trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas*. Através da análise da actividade realizada nestes momentos, procuro evidenciar aspectos relevantes do seu trabalho que contribuem para e alimentam a constituição de uma comunidade de discurso matemático.

Constituindo e mantendo uma comunidade de discurso matemático

Tal como aconteceu em muitas outras ocasiões, o ambiente de trabalho nas aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*, foi caracterizado pela informalidade nas relações entre os diversos intervenientes, o que não significa que os alunos não tivessem sido responsabilizados por se envolverem nas actividades matemáticas que se desenvolviam. Por exemplo, quando Rebeca se deu conta de que se dispersavam por assuntos alheios às discussões ou que realizavam actividades paralelas ao trabalho que estava a ser feito, procurou, quer implícita, quer explicitamente, mostrar-lhes que esse comportamento não é adequado. Do seu ponto de vista, os alunos "andam agora montes de conversadores" (TST 38, p. 6), observação que partilha com vários outros colegas do conselho de turma. Coloca a hipótese deste comportamento estar relacionado com a fase da adolescência que atravessam e, no caso particular das aulas de Matemática, com a localização que têm no horário da turma: o final da manhã quando os alunos já se encontram bastante cansados e com fome. O decréscimo de atenção e empenhamento de alguns alunos foi, particularmente, evidente nalgumas das discussões que ocorreram. Nestas alturas, Rebeca age de formas diversas destinadas a manter os alunos focados no trabalho. Quando intervém, explicitamente, no sentido de controlar a disciplina, fá-lo de modo a exercer a sua autoridade sem autoritarismo, apelando, em particular, à boa relação que sempre tem mantido com os alunos e ao seu desejo de continuar a mantê-la.

O modo de estar e participar dos alunos no discurso

A fluência e a naturalidade foi um traço marcante na comunicação que existiu nas aulas. A análise de vários dos episódios incluídos nas secções *Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas*, *Lidando com o ensino do discurso de prova* e *Lidando com a emergência e resolução de desacordos*, revela que os alunos se sentem com liberdade para colocarem questões, quer à professora quer aos colegas, para exprimirem dúvidas e opiniões, para comentarem e avaliarem ideias, para solicitarem explicações quando não compreendem o que é dito e para expressarem o seu desacordo quando consideram ser de o fazer.

Este modo de estar transparece, por exemplo, no episódio *Aqui no 1/2, no denominador, é sempre vezes 5?* em que Duarte, por iniciativa própria, coloca várias questões através das quais procura compreender porque "se vai buscar o 5" para transformar a fracção $1/2^n$ numa fracção decimal. Transparece, também, na questão colocada por Isabel que deu origem ao episódio *Se eu não quisesse ficar com expoentes negativos?*. Do ponto de vista de Rebeca, esta questão denota que esta aluna se preocupa em entender como se deve proceder no caso de se querer evitar a existência de potências de expoentes negativos. Transparece, ainda, na naturalidade com que emergem vozes discordantes e na espontaneidade com que alguns alunos levantam objecções ao que é dito. Por exemplo, o episódio *Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui* revela que Isabel e Tânia parecem aperceber-se que a professora tem, em relação à validade de uma conjectura, uma posição contrária à sua e defendem o seu ponto de vista através da explicação do enunciado desta conjectura até a professora concluir que o tinha interpretado de um modo diferente. Outro exemplo é a objecção levantada por Rogério ao enunciado da conjectura "c. pot." registado na quadro que revela, do ponto de vista de Rebeca, que este aluno "tem interiorizado que na sala de aula é bem visto discordar" (TST 39, p. 7) e também toda a discussão entre Tânia e Rogério decorrente da proposta apresentada para a transformação de $1/2^n x 5^p$ numa fracção cujo denominador é uma potência de 10. Comentando uma das intervenções de Tânia nesta discussão — "Mas depois não sabes quando é a multiplicar ou dividir, depois não sabes quando é que se deve multiplicar por 2 elevado a uma coisa ou quando é a dividir por 5..." (§18, episódio *Não vale a pena separar. O processo resulta mesmo que a diferença entre n e p seja um número negativo*) — Rebeca refere que nesta fala "está bem visível" (TST 39, p. 28) que "pelo menos alguns alunos já interiorizaram que são bem vindas opiniões divergentes e que se deve argumentar. Pelo menos uns quantos já interiorizaram isso muito bem" (idem).

Estas ideias encontram eco em várias das reflexões de Rebeca relacionadas, em particular, com a participação dos alunos nas aulas:

> Também se nota noutras alturas em que não ficam satisfeitos. Argumentam comigo e uns com os outros. Os professores às vezes são um bocado possessivos, não é? Por mais que a gente tente por vezes, quando não nos estamos a controlar, ainda há aquela tendência de querer impor, ou dizer, porque achamos que nós percebemos. E eles não se ficam, só porque eu digo. E isso é positivo. Porque a Tânia e a Isabel argumentam e tentam explicar e defender bem as coisas que dizem, a sua posição. É um aspecto positivo. (TST 39, p. 3)

> Eu acho que o aspecto, apesar de tudo, que acaba por estar um bocado mais conseguido é eles saberem que têm que explicar, justificar, que podem discordar. Porque aqueles que participam fazem-no. Acho que já interiorizaram isso muito bem. Não todos, porque alguns não falam também por natureza. Não

> quer dizer que não tenham interiorizado, mas por eles próprios não têm participação. (TST 39, p. 39)

É a análise do modo como os alunos participam no discurso que permite a Rebeca aperceber-se de que conhecem que nas aulas de Matemática têm que explicar e justificar as ideias que apresentam e que podem discordar do que é dito. No caso de Alberto, Duarte C., Duarte M., Diogo, Isabel, Jacinta, José, Rogério, Tânia e Vina, os alunos que, do seu ponto de vista, participam mais, "temos consciência que interiorizaram porque manifestam, não é?" (TST 39, p. 8). Quanto aos restantes elementos da turma, a sua convicção quanto à apropriação deste modo de estar na aula de Matemática diminui. Não elimina a hipótese de também eles terem interiorizado que este tipo de participação é o esperado mas "como participam menos não temos tanta consciência" (Rebeca, idem) de que isso, de facto, aconteceu.

O modo de estar e aspectos do trabalho da professora

Para Rebeca é importante que todos na aula entendam o que é dito para poderem vir a encontrar sentido nas ideias apresentadas e identificar e explicitar o que não compreendem ou aquilo com que concordam ou não. A clareza das mensagens é um valor que está subjacente a muitas das interacções que estabelece com os alunos e constitui uma preocupação que tem em relação ao seu próprio discurso. Esta última ideia pode ser ilustrada a partir do que diz quando me preocupei em aprofundar se o facto de ter solicitado a sua permissão para eu própria intervir na aula quando os alunos tentavam iniciar a prova da conjectura "c. pot", lhe tinha originado algum tipo de constrangimento:

> Não, claro que não! E até reparei numa coisa. Uma das coisas que tenho no meu discurso e que tenho que rever é que eu muitas vezes aponto coisas para o quadro, para umas e para outras, e eles, se calhar, não apanham. Devia explicitar mesmo, voltar a referir as coisas que estão escritas no quadro em vez de só apontar. Por exemplo, aponto para as conjecturas, aponto para as fracções decimais... Mas assim, aqueles que não estão a olhar para o quadro podem não apanhar. Devia reforçar, mesmo, com palavras. Acho que fica mais claro. Foi uma coisa que notei aqui na tua intervenção. Tu explicitaste. Mas acho que esteve bem. Não teve problema nenhum (...) tanto que eu depois aproveitei-a. (TST 39, pp. 11-2)

Ao confrontar-se com a minha intervenção na aula, Rebeca "repara", dá-se conta, que uso um discurso mais explícito que o seu para tentar tornar compreensível o trabalho a realizar pelos alunos. Tomando consciência desta diferença, procura perceber se ela traz mais-valias para o processo de ensino e identifica que o facto da palavra que enuncia a mensagem que se pretende comunicar andar a par e passo com a sua representação visual (veiculada pelo "apontar"), facilita que haja uma maior evidência e clareza na mensagem. Além disso, permite que alunos que não olham para o quadro possam escutá-la, primeiro passo para a sua compreensão. Tendo feito esta descoberta, usa-a para reflectir criticamente sobre outros momentos da aula e delinear a sua actuação futura:

> Este meu discurso não os ajuda [referência a uma intervenção iniciada por *Vamos recordar...*] Para já eu devo ser muito rápida a apontar (risos) e mesmo que apontasse devia explicitar mesmo quais eram. Aqui em termos de reflexão, tenho que alterar, tenho que ter esse cuidado. Não apontar só. Dizer as coisas na mesma. (TST 39, pp. 12-3)

Ao longo de todas as fases de trabalho com toda a turma, foi evidente a preocupação de Rebeca em fazer emergir as ideias dos alunos e em comunicar-lhes, através do modo como lhes respondia, que tinham responsabilidades na avaliação do trabalho que estava a ser feito. Neste processo, tem uma postura interrogativa e recorre ao questionamento e a outro tipo de intervenções que, embora não assumindo o formato de perguntas, contribuem para alimentar a conversação, originam a apresentação de ideias e são úteis para a orquestração das discussões que ocorrem.

As questões de Rebeca foram de vários tipos, visaram diversas finalidades e a quase totalidade não pode ser respondida pelo recurso exclusivo à memória. Por vezes, são perguntas mais focalizadas destinadas a centrar a atenção dos alunos ou da turma em aspectos particulares da actividade que está a ser realizada. Por exemplo, depois de ter registado no quadro o processo de transformação de $1/5^n$ em $2^n/10^n$ indicado pelos alunos, coloca várias questões destinadas a tornar visíveis as justificações que permitem garantir a validade matemática dos procedimentos. De igual modo, quando um aluno indica que 9 é um número primo, transforma a afirmação numa pergunta que dirige à turma (§8, episódio *Isto chega para justificar?*). Outras vezes, são perguntas mais abertas através das quais procura fazer surgir ideias que permitam prosseguir o trabalho. Por exemplo, no âmbito da produção da prova da conjectura "c. pot.", depois da turma ter transformado alguns casos particulares de fracções cujo denominador é o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5 numa fracção decimal, quando procura que a análise destes casos seja usada como fonte de inspiração para a descoberta da prova para o caso geral, coloca a questão: "E como é que eu faço isso? Como é que eu sei por quanto é que multiplico? Tenho ali o *n* e tenho ali o *p*..." (§3, episódio *Isto é com exemplos concretos. E olhando para eles... Qual é o problema que se levanta aqui?*). O pedido de comentário (§1, episódio *Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui*) que surge na sequência da leitura da conjectura formulada por Isabel, embora não tendo o formato de pergunta, pode ser, também, incluído nesta forma mais aberta a que recorre para fazer surgir contribuições dos alunos.

As questões de Rebeca tiveram subjacente a intenção de procurar informação. Em relação a algumas, sabe parcialmente a resposta. Nomeadamente sabe qual é a resposta correcta em termos matemáticos. O que desconhece é o que a turma ou alunos particulares, pensam sobre a situação e é esta informação que procura tornar pública e, em particular, obter para si própria. É através destas perguntas que averigua, por exemplo, onde se localizam dificuldades ou qual o posicionamento dos alunos em relação a certas ideias. Por exemplo, na sequência de Susana ter indicado que 1/16 contraria a conjectura formulada pelo seu grupo, Rebeca, dirigindo-se à turma diz: "1/16 contraria? 1/16 contraria aquilo que elas estavam a dizer? Elas disseram que se denominador for número primo, 1/16 contraria..." (§17, episódio *Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?*). No mesmo sentido, depois de vários alunos terem indicado que esta conjectura é falsa, quando procura focar a atenção da turma no conceito de contra-exemplo, pergunta: "Isto chega para justificar? Atenção. Se eu em vez de 1/3 pusesse 1/9. Justificava? Também dava?" (§1, episódio *Isto chega para justificar?).*

Outras vezes, Rebeca desconhece, completamente, a resposta para as perguntas que coloca. Casos ilustrativos deste tipo de situações surgem, por exemplo, quando se dirige a esse mesmo grupo perguntando-lhe: “E quais foram os casos que vocês observaram que vos levaram a formular esta conjectura?” (§34, episódio *Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?*). Surgem, também, quando interroga os alunos sobre a sua compreensão acerca de ideias enunciadas como, em particular, acontece quando procura averiguar se a turma está a compreender as descobertas de Isabel e Tânia (episódio *Dois mais dois dá quatro; temos um dois e passou a dois ao quadrado*), ou quando interpela Rogério tentando que ele justifique a sua sugestão para a prova da conjectura “c. pot.”: “Tu somaste *n-p* aqui ao p, porquê? (§12, episódio *Mas não pode ser. O p é que é o maior. E depois como é que sabemos qual é que é maior para fazermos?).*

Outros movimentos a que Rebeca recorre para fazer surgir ideias na turma são observações que focam a atenção em aspectos particulares do trabalho que está a ser realizado e o *redizer*[59] as contribuições dos alunos. Nalgumas ocasiões, usa o tom de voz para sublinhar certas palavras que são significativas para a compreensão do significado daquilo que está a ser apresentado como aconteceu, nomeadamente quando comunica à turma a conjectura formulada pelo grupo de Susana (§10, episódio *Quando o denominador é primo dizem que dá uma dízima finita*). Um exemplo de uma das referidas observações surge no momento em que decide que a turma se deve debruçar sobre o que designou por “problema de cálculo” surgido durante a prova da conjectura “c. pot.”. Foi a intervenção “Vejam lá bem se a última fracção é equivalente à primeira” (TA 24/10/02, p. 11) a que se seguiu o relato do procedimento de Rogério que causava o problema, que originou a apresentação, pelos alunos, de ideias que permitiram ultrapassá-lo.

Na orquestração das discussões que ocorreram nas aulas em análise, Rebeca recorreu, com frequência, ao *redizer*, uma estratégia discursiva que assumiu vários formatos. No seu conjunto, estes formatos, contribuíram para as ideias dos alunos

[59] No sentido que lhe é atribuído por Forman, Larreamendy - Joerns, Stein, & Brown (1998), autores cujas ideias relativas a esta estratégia foram analisadas a partir do documento 1 (tabela 7, capítulo V).

serem as bases do discurso desenvolvido e, simultaneamente, parecem ter permitido a Rebeca ter em conta as ideias ou processos matemáticos incluídos na sua agenda de ensino e considerar com seriedade as questões do conteúdo matemático. Por exemplo, ao ouvir de Alberto "potências de base 10", (§2, episódio *O que é que nós queremos fazer?*) recorre a um relato em que integra e expande esta resposta, clarificando, deste modo, o conteúdo do que este aluno tinha dito. Este modo de agir permite-lhe dar maior visibilidade à representação das dízimas finitas sob a forma de fracção decimal, conhecimento fundamental à produção de uma justificação rigorosa da conjectura "c. pot.", um dos objectivos da aula. Quando Rogério, no âmbito da prova desta conjectura, procura defender a sugestão que apresentou para o que evoca o exemplo $1/2^4x5^5$ e, referindo-se a ele, diz "aí 4 menos 5 dá –1 (§13, episódio *Mas não pode ser. O p é que é maior. E depois como é que sabemos qual é que é o maior para fazermos?*), Rebeca repete esta ideia (§14), destacando, por esta via, a ordem pela qual devem ser subtraídos os expoentes, um conhecimento essencial para a produção de uma prova correcta seguindo essa sugestão.

O considerar com seriedade as questões do conteúdo matemático tendo por base as contribuições dos alunos surge, em particular, quando estas contribuições são reformuladas de modo a evitar ambiguidades. Por exemplo, Tânia ao explicar como se pode obter a partir de 25/100 uma fracção do tipo das que a turma tinha conjecturado originarem dízimas finitas, refere que "ao 25 vou tirar o 5 ao quadrado e vai dar 1(...)" (§1, episódio *25 sobre 100 é igual a 1/4, é igual a 0,25).* Depois de registar no quadro os procedimentos descritos, Rebeca reformula parte da sua explicação, substituindo a palavra "tirar" por "dividir". Esta reformulação contribui para tornar mais correcta, de um ponto de vista matemático, a sugestão da aluna. De igual modo, quando procura que Rogério e Tânia expliquem a Duarte o processo de transformação de $1/2^n$ numa fracção decimal e ouve Rogério responder "multiplicámos por 5 *n*" (§12, episódio *Aqui no 1/2, no denominador, é sempre vezes 5?),* coloca-lhes uma questão que dirige a discussão de modo a fazer surgir a justificação deste procedimento e em que a intervenção de Rogério é reformulada de modo a tornar visível que o *n* a que se refere é expoente de 5 e não algo que está a ser multiplicado por este número: "Porque é que multiplicaram por 5 elevado a *n* (...)" (§13, idem).

Nem todas as intervenções dos alunos surgem como resposta a questões ou observações de Rebeca. Por vezes, emergem a partir da sua própria iniciativa e dirigem-se quer aos colegas, quer à professora. Neste último caso, frequentemente, focam-se na obtenção de esclarecimentos ou indicações sobre o trabalho que está a ser feito e, por vezes, visam conseguir apoio para algumas das objecções que levantam.

Rebeca preocupou-se em endereçar para os autores das ideias apresentadas, a sua clarificação e justificação. Por exemplo, o remeter para Rogério as explicações que lhe são pedidas quando este aluno tenta transformar $1/2^4 x 5^5$ numa fracção cujo denominador é uma potência de 10 seguindo a sugestão que apresentou, bem como a sua actuação no episódio *Aqui no 1/2, no denominador, é sempre vezes 5?* e a reflexão que sobre ele apresenta, denotam a existência deste tipo de preocupação. No entanto, reconhece que, por vezes, os alunos se focam muito nela própria e, reflectindo criticamente sobre a sua actuação, lamenta que haja ocasiões em que ainda tenta "resolver algumas coisas por eles":

> Está a Tânia a dizer: *Sôtora, mas aí não é 1, é –1.* O Rogério diz: *A diferença entre elas é 1.* E a Tânia: *Mas é n-p sôtora...* Aqui anotei "falam para mim", a tal história dos alunos se focarem ainda muito em mim. Neste caso a Tânia. O Rogério fez uma afirmação e a Tânia põe-a em causa mas falando para mim. (TST 39, p. 26)

> E depois aqui mais à frente o Rogério ainda está no quadro e eles continuavam a dirigir-me as perguntas a mim. Por exemplo: *Duarte: Oh sôtora. Rebeca: Diz Duarte. Duarte: Ele assim está a alterar a conta. Rebeca: Vamos lá ver então se ele alterou a conta, agora. Aluno: Não está não! Rogério: Não, ficou na mesma*. Eu não devia ter dito: Vamos lá ver então se ele alterou a conta. Devia ter dito para perguntar ao Rogério. Devia ter remetido mais as perguntas para o Rogério. Eu ainda tento resolver algumas coisas por eles!... (risos) (TST 39, p. 31)

Numa comunidade de discurso matemático, as competências argumentativas são essenciais. Elementos "muito importantes" para o desenvolvimento, pelos alunos, deste tipo de competências são, na perspectiva de Rebeca, as tarefas que se propõem e o tipo de discussões que ocorrem na sala de aula:

> No fundo é tentar desenvolver um certo tipo de raciocínio matemático e as tais competências argumentativas que se espera que se consiga através da participação dos alunos em certos tipos de discussão e da realização de determinado tipo de tarefas, que estão ligadas a conteúdos do currículo. Estes aspectos são muito importantes e sempre houve essa preocupação. (TST 38, p. 50)

As tarefas referidas são do tipo das seleccionadas no âmbito do projecto, ou seja, têm um certo grau de abertura propício a que ocorram discussões. As palavras de Rebeca revelam que a exploração de tarefas com determinadas características pode, potencialmente, facilitar o desenvolvimento pelos alunos de competências argumentativas. Simultaneamente, traduzem que as tarefas não bastam. Igualmente importante é que se fomente a sua participação “em certos tipos de discussão”. O significado atribuído a esta expressão pode ser iluminado, em particular, pela análise da reflexão apresentada a propósito dos momentos da aula que se seguiram à apresentação, por Susana, da conjectura que o seu grupo formulou. Esta reflexão contribui, ainda, para compreender alguns aspectos relativos ao modo como Rebeca concebe as suas interacções com os alunos, nomeadamente nas fases de discussão:

> Eu vou tentando ir percebendo o raciocínio deles. Eles vão dizendo e eu vou ouvindo e tentando descodificar o que dizem e vou tentando apoiar-me no que dizem para ir fazendo com que evoluam naquilo que estão a fazer, para que compreendam o que é um contra-exemplo, ou seja, que tipo de exemplo é necessário encontrar para se poder refutar uma conjectura. Às tantas pergunto: *e 20 é número primo?* [§23, episódio *Viram que não dava com um exemplo. Qual é o exemplo?*]. Uma aluna diz que não e pergunto: *Então servia para contrariar?* [§25, idem]. Então não serve. Não serve porque esse não é primo. Estão aqui duas coisas. Por um lado tem que ser uma dízima infinita e, por outro lado, tem que ser um número primo. Podia dizer, não é? Podia dizer então arranjem-me lá um número primo que dê origem a uma dízima infinita. Era mais rápido, mas por outro lado acho que se perdia muito da riqueza de tudo isto. (TST 38, pp. 52-3)

Rebeca pretendia que os alunos tomassem consciência do processo de refutação de conjecturas o que passa, em particular, pela compreensão da noção de contra-exemplo. Perante as ideias apresentadas, procura, antes de mais, ouvi-las e descodificar o significado que têm, ou seja, considera-as com seriedade partindo do pressuposto que têm subjacentes raciocínios que podem permitir explicar porque são razoáveis do ponto de vista de quem as enuncia. Neste processo, não perde de vista os objectivos que tem para a aula e estrutura as suas interacções com os alunos de modo a que, apoiando-se nas suas contribuições, os possa ajudar a progredir em direcção a esses objectivos, ou seja, a evoluir, neste caso, na compreensão da noção de contra-exemplo, uma ideia matemática significativa. Agindo deste modo mostra aos alunos que a aula de Matemática não é um local em que, perante uma resposta ouvida, a primeira reacção do professor é indicar se está correcta, ou não, mas antes ajudá-los a avaliarem o que apresentam e o que ouvem para poderem decidir acerca da sua legitimidade matemática.

As palavras de Rebeca revelam, além disso, que aquilo que faz, enquanto professora, está dependente do envolvimento e contribuições dos alunos. Esta dependência é acrescida na medida em que procura agir de modo a enquadrar a possibilidade dos alunos seguirem direcções diferentes das que previamente tinha imaginado. Foi o que aconteceu, por exemplo, quando decidiu aderir à sugestão apresentada por Rogério relativa ao processo de prova da conjectura "c. pot." ou quando indica "mudei de ideias" (TST 39, p. 6), porque os alunos, ao tentarem construir o enunciado desta conjectura, sentiram a necessidade de incluir na sua formulação uma representação algébrica dos expoentes das potências.

A análise incluída nas secções *Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas*, *Lidando com o ensino do discurso de prova* e *Lidando com a emergência e resolução de desacordos* inclui vários casos que ilustram que as ideias apresentadas pelos alunos constituíram, nalgumas ocasiões, fontes de inquietação para a professora. Por exemplo, a insegurança que sentiu face à referida sugestão de Rogério, ou as dificuldades que experienciou ao tentar que a turma acompanhasse as descobertas que Isabel e Tânia apresentavam (episódio *Dois mais dois dá quatro; temos um dois e passou a dois ao quadrado*). Noutras ocasiões, no entanto, as contribuições que apresentaram constituíram recursos úteis a Rebeca para efectuar o trabalho de ensino e enfrentar alguns problemas com que, no momento, se confrontava. A título de exemplo refiro a intervenção de Rogério na sequência da apresentação, por Susana, da conjectura que o seu grupo formulou. Esta contribuição permitiu clarificar o significado que este grupo atribuía à conjectura e, posteriormente, foi integrada na voz da professora quando relatou o seu enunciado de uma forma mais precisa e transparente. No entanto, não é, apenas, no que se prende com a substância das ideias matemáticas que estão em jogo, que os alunos constituem recursos para o trabalho que a professora procura realizar nas suas aulas:

> Nesta parte da aula, apesar de eu fazer algumas intervenções, no sentido às vezes de levantar coisas, acho que os alunos me põem bem no meu lugar (risos). A sério. O Rogério... eles interiorizaram muito bem que, de certa forma, me facilitam um bocado o trabalho de eu tomar a consciência que tenho que os deixar serem eles a argumentar. Eles interiorizaram isso tão bem que eles é que me ajudam a ter o cuidado de não me deixar a mim dizer muito mais coisas porque vão logo dizendo por eles naturalmente. (TST 39, p. 26)

A aula que Rebeca refere neste extracto é aquela em que surge o desacordo relacionado com a necessidade, ou não, de considerar separadamente os casos n>p e p>n na prova da conjectura "c. pot." seguindo a sugestão apresentada por Rogério. A sua reflexão revela que é o facto de haver elementos da turma que, por iniciativa própria, intervêm naturalmente, que facilita a tomada de consciência de que os deve deixar argumentar. Deste modo, os alunos constituem, também, recursos que a ajudam a compreender o tipo de cuidados que deve ter para, não boicotar, sem se dar conta, o tipo de discurso que procura ter nas suas aulas.

As ideias que apresentei, a par da análise da globalidade das fases de trabalho com toda a turma, revelam a existência de vários padrões de interacção:

- professora $\rightleftarrows$ turma;
- professora; $\rightleftarrows$ aluno(s) particulares;
- aluno(s) $\rightleftarrows$ turma;
- aluno(s) $\rightleftarrows$ aluno(s)

Nas referidas fases houve vários momentos em que as interacções entre alunos tiveram uma presença muito marcante. Por exemplo, no âmbito da prova da conjectura "c. pot." e, mais concretamente, dos desacordos que emergem na sequência da sugestão de Rogério não considerar separadamente os casos $n>p$ e $p>n$. Tânia, face a respostas que não a satisfazem, procura focar a atenção do colega naquilo que para ela é problemático. O processo que utiliza é ir-lhe colocando várias questões de especificidade crescente que parecem ter subjacente a intenção de fazer com que ele veja o que ela própria está a ver. Uma outra altura em que são dominantes as interacções entre alunos surge no final da aula de dia 17 quando Isabel, apoiada por Tânia, apresenta as descobertas relacionadas com o tipo de potências que podem aparecer nos denominadores das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas (episódio *Dois mais dois são quatro; temos um dois e passou a dois ao quadrado*). Observando as 58 intervenções registadas neste episódio (TA 17/10/02, pp. 10-2) constata-se que apenas dezoito (31%) têm origem na professora e que a grande maioria destas (catorze) prende-se, directamente, com a orquestração da discussão que está a ocorrer visando aspectos como: focar a atenção da turma na discussão; procurar que quem apresenta ideias o faça para todos e se preocupe em averiguar se os colegas as estão a perceber; interpelar a turma sobre esta compreensão; redizer contribuições dos alunos de modo a destacar aspectos pertinentes, tornar não ambíguas ideias apresentadas, articular informação pressuposta e tentar que expandam o raciocínio; dar visibilidade ao que se pretende com a discussão; e apelar à sistematização do que foi comunicado. A reflexão de Rebeca sobre este episódio permite evidenciar a intencionalidade de várias das suas intervenções:

> Eu tenho também aqui umas observações. Eu digo à Isabel: *Calma, calma. Isabel explica lá para eles que eu acho que não estão a perceber e eu acho que já sei mais ou menos o que fizeram*. Pois, ela estava a explicar as coisas para mim, estava nitidamente virada para mim e eu queria que ela se apercebesse que também tinha que explicar para os outros. Há aqui um aproveitar do que se está a passar para procurar fazer passar algumas normas de funcionamento que queria valorizar. Depois, estão a ver? O Rogério aqui interage muito com a Isabel. (...) Por exemplo, aqui, quando eu digo: *Vejam lá a discussão delas. Percebem?* E depois: *Vejam lá se os outros também estão a perceber* não é? Estavam só as duas a discutir... e é importante que os outros também percebam. E depois há aqui uma outra: *Vejam lá se os outros perceberam*. Eu queria que eles percebessem o que elas estavam a dizer e queria que elas se preocupassem também com isso. E tenho anotada outra que é quando eu digo: *Então vejam lá a outra. Calma. Então a outra. Rogério, escuta lá o que a Isabel diz. Diz para eles*. A Isabel deve falar para os colegas e o Rogério que estava a querer interromper deve primeiro ouvir o que ela tem para dizer. (TST 38, p. 54)

Estas palavras ilustram como, para Rebeca, os alunos devem falar acerca de Matemática nas suas aulas: quem fala, para quem e de que modos. Revela, ainda, como procurou capitalizar a discussão não antecipada que ocorria para, indo para lá da substância das ideias matemáticas em análise, negociar normas sociais de acção e interacção que deseja ver regular a actividade da aula. Estas normas têm uma natureza muito diferente das que regulam práticas de ensino orientadas por concepções de que é apenas o professor quem apresenta conteúdo matemático com valor e que o papel dos alunos é aprendê-lo porque ele o diz independentemente de lhe encontrarem sentido ou não.

Não só a reflexão atrás incluída, mas também várias outras ideias anteriormente apresentadas, deixam transparecer que o controlo do discurso nas aulas de Rebeca em que trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, foi partilhado com os alunos. Estes sabem que podem assumir a palavra para apresentar as suas ideias e vários fazem-no com frequência. Simultaneamente, essa reflexão permite evidenciar que a professora procura mostrar-lhes que não podem falar de qualquer modo. Quando explicam o seu pensamento têm que o fazer de maneira a que todos o compreendam, ou seja, devem dirigir as explicações a um auditório mais alargado do que aquele que é constituído, apenas, pela professora ou pelos colegas que são seus interlocutores directos durante as discussões, e preocupar-se em averiguar se o que dizem é entendido por esse auditório. Além disso, revela que Rebeca procurou ensinar à turma, através de Rogério, que é importante que sejam bons ouvintes, isto é que prestem atenção e estejam dispostos a escutar o que é dito.

Nas aulas em análise, as intervenções de Rebeca relacionadas com a negociação de normas sociais, relacionaram-se, fundamentalmente, com a escuta atenta e a participação organizada. Os comentários que faz a algumas destas intervenções, ao explicitarem a intenção subjacente, permitem apoiar esta ideia:

> Eu tenho aqui anotações que têm a ver com falas minhas relacionadas com normas sociais, que são visíveis nesta aula, e mais até na outra que vamos analisar e que noutras aulas não foram. Essa visibilidade tem a ver com o facto dos alunos estarem muito mais desatentos e conversadores este ano. Por exemplo, eu digo para o Diogo: *Diogo, queres ajudar? Estás com vontade de*

> *falar, podias-me ajudar*... No fundo o que eu queria é que ele falasse e participasse na aula. Está aqui implícito que na aula se deve falar mas é um falar para participar, não é para conversar com os colegas sobre outras coisas. (TST 39, p. 6)

> Depois tinha aqui uma norma implícita. O Diogo diz: *Sôtora, é melhor começar daquele lado*. E eu respondo: *É melhor começar daquele lado? Então porquê?* O Diogo diz: *Estamos a fazer* e eu respondo: *Então posso saltar por vocês, mas se estão a fazer não podem ouvir. Também não dá*. Está aqui implícito que eles têm que estar a ouvir o que os outros dizem. (...) Eu digo: *Mas se estão a fazer não podem ouvir*, mas não está dito assim taxativamente: Têm que ouvir o que os outros estão a dizer. Está dito no contexto. E depois digo mais à frente: *Ah, olhem, os vossos colegas passaram por cima ali daquelas colegas...* Isto também tem a ver com outra norma, não é? Que é se eu lhes pedi a elas para falarem, não é para as interromperem e passarem por cima... E por isso não os deixei falar. Quis que fossem as colegas a dizer. (TST 38, p. 40)

> Eu digo: *Está bem, o grupo. Prestem atenção! Eu vou pedir uma coisa que não devia pedir... mas eles vão repetir. Não devia pedir porque vocês estavam distraídos. Não se importam de repetir? Digam lá então*. Está aqui uma espécie de contradição. Não deviam repetir, mas afinal vão repetir? Implicitamente há aqui uma norma, não é? Por um lado não se deve repetir quando eles não estão com atenção, mas como é que eu faço isto? É importante que todos ouçamos, não é? Apesar de tudo, vá lá... (TST 38, p. 52)

A par destes comentários, Rebeca tece vários outros directamente focados nas formas que foi adoptando para negociar normas sociais. A análise conjunta destes comentários permite iluminar aspectos relacionados com o processo de negociação e com o porquê de se focar, nestas aulas, na escuta atenta e na participação organizada. É porque Isabel se estava a dirigir apenas à professora para explicar as descobertas que tinha feito e porque esta aluna e Tânia apenas discutiam entre si não se preocupando com a compreensão do objecto da discussão pelos colegas da turma, que Rebeca, ao procurar que ajam de outro modo, lhes revela que este comportamento não é adequado. Igualmente, é porque "os alunos estão muito mais desatentos e conversadores este ano", ou seja, porque esta actuação não é desejável, que fazendo intervenções contextualizadas nas transgressões que ocorrem, lhes diz, implicitamente, que é permitido falar para participar na aula, e não para conversar sobre algo que lhe é estranho, que quem está a falar não deve ser interrompido, que é importante ouvir o que é dito e que a repetição de algo que é comunicado é legítima desde que o(s) interlocutor(es) se tenha(m) esforçado por ouvir, o que passa, antes de mais por estar(em) com atenção. E embora, na generalidade, os alunos que participam nas aulas o façam num tom que permite que a sua voz seja ouvida, porque pensa que "importa que todos falem de forma audível para que os colegas possam entender" (TST 39, p. 28), quando considera que esta norma é violada, intervém num sentido que lhe permite torná-la visível e, através desta via, destacar o seu valor: "Depois eu digo: *Mais devagarinho. Tânia, diz lá o que estás a dizer mais alto para todos perceberem* (TST 39, p. 28).

Subjacente a todos estes movimentos está a valorização da escuta atenta e da expressão organizada e audível das ideias que se comunicam, o que não é, certamente, independente da ênfase colocada no envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Com efeito, a argumentação, enquanto fenómeno social, remete para uma atitude de abertura nas relações com o outro que se torna efectiva pelo desejo de comunicar e pela disposição para ouvir (Grácio, 1992). Não há oportunidade de concordar ou discordar de ideias, de compreender explicações ou justificações, de entender o porquê das posições que se assumem, de reflectir sobre o que se ouve e de analisar se há algo mais a acrescentar, a menos que se esteja disposto a escutar e se seja capaz de ouvir.

Rebeca tem ideias claras sobre as normas que pretende ver regular a actividade matemática das suas aulas. No entanto, com o ilustram os exemplos anteriormente apresentados, os momentos usados para promover a negociação nem sempre são passíveis de antecipar. Em todos estes exemplos estão em jogo transgressões. Uma parte importante da negociação parece ocorrer nestas ocasiões através da forma como Rebeca capitaliza os acontecimentos para mostrar aos alunos o que não é desejável e, por esta via, o que deles espera.

O processo de negociação de normas parece ser, por outro lado, alimentado pelos cuidados que Rebeca tem em relação ao seu próprio modo de agir em situações em que o que está em causa não são transgressão dos alunos. Por exemplo, quando concluiu que interpretou incorrectamente o enunciado da conjectura formulada por Isabel (episódio *Vamos lá ver se eu percebo bem o que está aqui)* explicita que cometeu uma "gafe", o que, implicitamente, tem subjacente a ideia de que esta aluna e Tânia a tinham ajudado a ver algo em que não tinha reparado. Deste modo, contribui para modelar o tipo de aprendizagem que deseja que exista nas suas aulas — todos podem aprender uns com os outros — e mostra à turma que é legítimo e desejável alterar uma posição anteriormente assumida quando se considera que as razões apresentadas são, em termos matemáticos, boas razões. E quando não consegue obter de Rogério a adesão pretendida relativamente à proposta de considerar separadamente os casos n>p e p>n e entendeu que seguir por esta via só poderia ser possível se o "porque eu quero" predominasse, altera o rumo da aula precisamente porque entendeu que actuar de outro modo significaria que ela própria estaria a violar as referidas normas: "Então ando ali com as normas, que é importante que as coisas tenham significado para todos, que não é porque eu digo que tem que se fazer assim, e depois numa situação daquelas!!!" (TST 38, p. 60).

Um aspecto que Rebeca parece valorizar nas interacções com os alunos é a apresentação de justificações sobre a sua acção em alturas em que não está em jogo o conteúdo da actividade matemática da aula. Por exemplo, justifica porque não regista no quadro a ideia apresentada por Diogo na sequência da conjectura enunciada por Alberto. Justifica, também, porque incluiu a conjectura de Isabel no grupo das "contrariadas". Justifica, ainda, porque propõe que se considerem separadamente os casos n>p e p>n. E mesmo quando a sua reflexão vai para lá da análise de aspectos particulares destas aulas, indica que o professor — no caso de decidir que não será provado, na aula, algo que, em termos matemáticos, pode ser provado — deve apresentar razões que permitam aos alunos compreender porque o faz. Rebeca não se pronuncia sobre o porquê da apresentação deste tipo de justificações. Poderá, no entanto, conjecturar-se que este modo de agir — ao revelar, implicitamente, aos alunos que a justificação do que se faz ou diz é uma componente das relações da aula — possa, também, estar a contribuir para sustentar o processo de negociação das normas sociais valorizadas e para modelar o tipo de discurso da aula.

Problemas experienciados

A gente vai no andamento, não é? E depois avançamos...

Reflectindo, globalmente, sobre as aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*, Rebeca refere que embora tenham sido das que melhor preparou e em que mais tempo investiu, foram das que originaram momentos em que “mais mal preparada” se sentiu:

> Foram das aulas com que despendi mais tempo na preparação, com que mais preocupação tive e ainda assim, lá nas aulas, me senti mais mal preparada (risos). Achei muito difícil gerir tudo aquilo e as coisas que foram surgindo dos alunos, apesar de ter perdido imenso tempo em casa a pensar em várias hipóteses para a prova e para isso tudo. Mas lá custou-me a gerir. Acho que esta tarefa é uma tarefa complicada. (TST 41, p. 6, 07/02/03)

Na sua perspectiva, a participação dos alunos nas discussões é facilitada se se fizer “um ponto de viragem bem claro, bem marcado (...) para definirmos bem quando é que passamos de uma coisa para outra e ter a certeza de que todos estão a prestar atenção, que estão todos a ouvir (TST 38, p. 6). Considera, contudo, que nem sempre actuou deste modo nas aulas em análise: “É a tal coisa que nos falta em muitas situações (...) a gente vai no andamento, não é? E depois avançamos e então eu acho que nesta minha aula que vamos analisar hoje [17/10] notei isso muito” (idem, p. 5). A par desta insatisfação, surge uma outra resultante de nem sempre ter conseguido que houvesse uma boa explicitação do que constituía o objecto das discussões:

> Um aspecto importante acho que é explicitar muito bem o que está em discussão para que eles possam argumentar. (...) Houve vários aspectos que vimos que estavam aqui a dificultar. Coisas que não estavam claras. É importante clarificar muito bem o que está a ser discutido. Em vários momentos isso tem que ser muito bem clarificado. E nomeadamente, antes de passar para a prova, clarificar muito bem o que se quer provar. Isso ser muito bem claro porque depois também facilita em termos de argumentação. (TST 39, p. 38)

A clarificação, em vários momentos, do que “está a ser discutido”, a par de uma demarcação nítida das mudanças existentes nos objectos da discussão, são, na perspectiva de Rebeca, elementos facilitadores do envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática.

Ela às vezes estava a tentar explicar as coisas e eu ia logo toda lançada

Uma das ocasiões em que Rebeca experienciou dificuldades no decurso de uma discussão, situa-se na aula de dia 17 na sequência de Susana ter apresentado à turma a conjectura formulada pelo seu grupo: "acho que tive um bocado de dificuldades em gerir essa discussão (...) acho que me atrapalhei um bocado (...) demorei muito tempo aqui nisto, não sei..." (TST 38, p. 40). Alguns aspectos destas dificuldades cuja origem se situa, na perspectiva da professora, numa "confusão em eu própria perceber o que as miúdas diziam" (idem, p. 43), foram já referidos na subsecção *Eu não estava a perceber mesmo o raciocínio delas*. Durante a aula "estava a tentar clarificar para os alunos o processo de formular as conjecturas e como é que nós contrariamos mesmo" (idem, p. 40), mas parecia-lhe que os exemplos que as alunas estavam a comunicar "não serviam nem para uma coisa nem para outra" (idem, p. 43).

Rebeca tentava apoiar-se nas ideias apresentadas pelo grupo e, simultaneamente, queria assegurar-se que as trocas discursivas tinham valor matemático, ou seja, que eram úteis para a turma poder evoluir na compreensão do processo de formulação e refutação de conjecturas. Foi a simultaneidade destes dois objectivos que introduziu complexidades no seu trabalho. Mantendo-se ambos, estas complexidades dificilmente poderiam ser evitadas uma vez que, com frequência, não é simples nem linear compatibilizá-los (Sherin, 2002). Lidar com elas poderia, no entanto, tornar-se mais simples se conseguisse entender o raciocínio subjacente ao percurso feito pelas alunas. Esforçou-se por fazê-lo e torná-lo visível para a turma. Interroga-se, no entanto, se a sua actuação não terá sido impeditiva da abertura necessária para que, em particular, Susana pudesse explicar adequadamente como tinham encontrado um contra-exemplo:

> Eu acho que houve dificuldades em encontrar o contra-exemplo e eu acho que de início cortei um bocado a palavra à Susana. Reparei mais quando estive a ver

> a cassete. Ela às vezes estava a tentar explicar as coisas e eu ia logo toda lançada e a cortar o que a rapariga estava a dizer. (TST 38, p. 41)

Equacionando o que poderia ter feito de diferente para lidar com a discussão que ocorreu, Rebeca sublinha que não deveria ter "cortado" a palavra a uma aluna cujo trabalho pretendia ver explicado, através das perguntas que fez. Do seu ponto de vista teria sido importante aguardar e ter "deixado mais tempo" (TST 38, p. 41) para que a explicação surgisse a partir da própria iniciativa do grupo em lugar de "começar logo a fazer perguntas" (idem). A paciência para esperar e a assunção, mais autónoma, da palavra pelos alunos surgem, assim, como meios de acrescer as hipóteses de poderem ocorrer possibilidades de compreensão dos seus raciocínios no decurso de discussões.

Temos que aprender a ter consciência quando é que podemos sair do guião e quando não podemos

Foi a primeira vez que Rebeca propôs aos seus alunos a tarefa *À procura de dízimas finitas*. Este aspecto, a natureza da tarefa e a experiência não muito longa que tem em ensinar Matemática a partir de tarefas de investigação, introduziram dificuldades acrescidas no trabalho que procurou realizar nas aulas em análise, mas não só:

> É que nós fazemos duas coisas. Nós pensamos em termos de argumentação mas com tarefas específicas que podem propiciar a argumentação. Esta argumentação e esta discussão com outras tarefas em que não surja nada de tão novo, não é tão difícil de gerir como nestas situações, acho eu, apesar de ser na mesma difícil, mas é diferente. Aqui, quando se propõem tarefas de investigação, há uma dificuldade acrescida que são as características das tarefas e das coisas que surgem que nós não estamos à espera. É que além de termos que estar com cuidado a gerir, temos também que estar com cuidado por causa das coisas novas que podem surgir, que nós não estamos à espera e que temos que perceber na altura e não interpretar erradamente, porque às vezes interpretamos, ou não apanhamos logo o sentido daquilo que os alunos estão a dizer e podem-se perder coisas. Daí, nós termos que ter muito bem preparadas várias hipóteses que possam surgir, para minimizar... (TST 38, pp. 36-7)

Esta reflexão permite destacar que se a gestão de situações de discussão em que se procura que os alunos argumentem as suas ideias apresentadas é, por si só, já difícil, a complexidade do trabalho do professor aumenta perante contribuições inesperadas, que a própria natureza das tarefas de investigação origina com maior frequência, e a necessidade de, no momento, entender o seu significado e não perder as que podem contribuir para ajudar os alunos a participarem num discurso matematicamente significativo. Na perspectiva de Rebeca, uma preparação muito cuidada da aula, através da qual se identificam várias hipóteses de caminhos que os alunos poderão seguir, proporciona ao professor "ferramentas" que, embora possam contribuir para minimizar o imprevisto, não podem, contudo, eliminá-lo: "Nunca conseguimos prever tudo. Daí que quanto melhor preparada nós tivermos a aula, mais ferramentas nós levamos" (TST 38, p. 37). No entanto, esta preparação não é suficiente:

> Nós queremos avançar para isto, para este tipo de discussão, e tarefas que sejam abertas no sentido de poderem propiciar a discussão e a argumentação na sala de aula, não é? E convém-nos que tenhamos o tal guião bem definido sem dizer assim: Eu tenho este guião e aconteça o que acontecer eu não posso sair daqui. Isso não. É estragarmos o processo todo, não há argumentação nenhuma. Mas aquele guião tem que estar bem definido e nós temos que aprender a ter consciência quando é que nós podemos sair do guião e quando é que não podemos. Temos que estar sempre com cuidado e ter uma certa flexibilidade para sair do guião e quanto mais à-vontade nós formos tendo mais nós vamos podendo sair e apanhar aquilo que eles vão dizendo. (TST 38, pp. 48-9)

Igualmente importante é o professor aprender a ter consciência quando é que, durante a aula, pode, ou não, sair do seu guião, isto é do que preparou para orientar a sua acção. Esta aprendizagem é necessária para que possa ser flexível, ou seja, para que enquadre no trabalho a desenvolver possibilidades não antecipadas resultantes do que os alunos "vão dizendo". Simultaneamente, as palavras de Rebeca permitem destacar que a flexibilidade de que fala é, também ela, fruto de uma aprendizagem que se vai fazendo à medida que, na prática e através da prática, se vai experimentando ser flexível. Esta ideia é apoiada pelas considerações que tece quando se debruça sobre as consequências negativas que pode ter demasiada flexibilidade quando, em particular, o professor não tem experiência de trabalho com tarefas de investigação e pretende que, através delas, se gerem situações de discussão e argumentação:

> Nesta discussão de ideias, na argumentação que queremos que exista na sala de aula... Como é que eu hei-de dizer? Nesta flexibilidade... se nós não temos prática, temos que ser flexíveis mas também não podemos ser demasiado flexíveis, porque se não corremos o risco de nos perdermos completamente e os miúdos a mesma coisa. Se calhar, temos também que ir fazendo estas coisas devagar. Ir avançando aos bocadinhos, sob pena de fazermos uma grande confusão. E, se calhar, nalgumas alturas, fazemos. Isto é muito complicado!! (risos) Eu não consigo exteriorizar bem... (risos) (...) Porque estou aqui a pensar. Se nós às tantas nos aventurarmos a sair demasiadas vezes [do guião] sem termos as coisas bem ponderadas, corremos o risco de não conseguir tirar proveito, de perdermos a aula, de gerar uma grande confusão naquilo que pretendíamos inicialmente. Não sei se estão a perceber? Mas isto é muito bom de dizer assim... (TST 38, pp. 48- 9)

A importância de que se reveste, para Rebeca, a necessidade de uma preparação cuidada das aulas em que se propõem tarefas de investigação e, simultaneamente, a capacidade de, em cada momento, improvisar a prática tendo em conta o que vai acontecendo, surge de novo quando, analisando criticamente o seu modo de agir nas aulas em análise, lamenta ter deixado os alunos “demasiado à vontade” e reflecte sobre o papel que importaria ter desempenhado:

> Acho que parti um bocado do princípio que a tarefa era muito fácil e que eles iriam conseguir e pelo facto dos alunos estarem a trabalhar em grupo e estarem a realizar uma tarefa de investigação, o nosso papel tem que ser mais interventivo e menos interventivo, ou seja, tem que ser interventivo de uma maneira diferente, mas tem que ser muito interventivo na mesma. A atenção tem que ser redobrada, no fundo, para estarmos muito atentas aos caminhos que estão a seguir e se eventualmente eles não estiverem a conseguir avançar para os irmos fazendo avançar. Tem que se ser muito controlado. Temos que os fazer avançar sem lhes dizer as coisas todas. Temos que arranjar maneira de ajudar a avançar, não se podem deixar estar ali uma data de tempo à balda... (TST 37, p. 10)

> Eu notei isso imenso nestas aulas da tarefa das dízimas. Eu acho que os deixei demasiado à-vontade. Deixei!!... Nós temos que ter as coisas cada vez mais controladas. As coisas são tão imprevisíveis nas aulas que as coisas têm que ir o máximo controladas possível, no entanto tendo consciência que não podemos estar agarradas aquele controle (risos). Eu não estou a conseguir exteriorizar bem. (...) Nós temos que levar isso [questões de vários tipos, por exemplo, questões que lançam desafios, questões que podem ajudar a progredir no trabalho mas sem conduzir demasiado os alunos...] e estarmos muito atentas porque podemos ter que as lançar. Não podemos deixar as coisas correrem assim por correrem. Tem que ser no ponto certo. Sempre que for necessário fazermos aquela intervenção que tem que ser feita. Não podemos estar à espera que eles comuniquem (risos), nós a dizermos o mínimo possível porque não queremos conduzir, influenciar... (risos). Não pode ser assim, não. Não podemos ter essa atitude. (TST 37, p. 39)

Estas reflexões permitem, por um lado, destacar que a identificação, feita previamente à aula, de questões que, do ponto de vista do professor, podem facilitar o progresso do trabalho, pode ser-lhe útil para perspectivar o modo de "fazer avançar" os alunos, caso seja necessário. Nesta medida, este aspecto constitui uma vertente relevante do trabalho do professor. Por outro lado, revelam que a identificação deste tipo de questões não basta para que o apoio proporcionado pelo professor seja adequado e significativo. Com efeito, a decisão de ajudar, ou não, os alunos através do que se diz, só é tomada face às circunstâncias concretas e apenas se a inexistência desta ajuda tiver custos relevantes para a actividade matemática a realizar pela turma. Se o professor não pretende substituir os alunos nesta actividade, ou seja, se não pretende fazer, ele próprio, o trabalho que os alunos devem fazer, ser capaz de discernir se a ajuda é necessária e conseguir identificar o "ponto certo" para fazer a "intervenção que tem que ser feita", constituem, também, vertentes importantes do trabalho do professor. Por último, as palavras de Rebeca "temos que os fazer avançar sem lhes dizer as coisas todas", permitem destacar que aquilo que se diz não pode, na sua perspectiva, boicotar o essencial da actividade matemática a desenvolver pelos alunos, ou seja, não pode eliminar os desafios através dos quais se procura que ampliem os seus conhecimentos e competências. Como Rebeca refere, o professor tem que desempenhar um papel "mais interventivo" e, ao mesmo tempo, "menos interventivo", tem que "controlar" mas sem estar "agarrada ao controle". Foi um papel activo com estas características que, na sua perspectiva, não conseguiu desempenhar de uma forma completamente adequada, o que constituiu, para si própria, uma fonte de insatisfação.

Outra dificuldade que eu sinto muito é o parar porque temos que ir discutir

Rebeca, ao reflectir sobre a primeira das aulas em análise, indica, referindo-se ao documento com a transcrição, que tem "em várias páginas assinalado o tal dilema dos alunos continuarem a querer trabalhar em grupo enquanto estamos na discussão" (TST 38, p. 42). Esta não é a primeira vez que se confronta com o que aqui designa por "dilema" e a que, noutras ocasiões, se refere como uma dificuldade: "Outra dificuldade que eu sinto muito é a tal história de parar, quando eu os mando parar na aula porque temos que ir discutir. Eu já tive essa dificuldade antes e continuo a sentir" (TST 38, p. 39).

Por um lado, considera que é importante os alunos terem a iniciativa de procurar caminhos de exploração das tarefas e serem autónomos a percorrer, ou abandonar, estes caminhos, embora sabendo que podem contar com o seu apoio. Muito frequentemente, quando sente que estão entusiasmados com esta exploração, concede-lhes um pouco mais de tempo do que tinha previsto, contribuindo, deste modo, para "alimentar" a iniciativa e autonomia que deseja que tenham. No entanto, por outro lado, considera que é, também, importante a partilha e confronto de ideias que é possibilitada pela apresentação e discussão na turma do que foi feito durante o trabalho em grupo ou em pares. É nestas alturas que, com maior frequência, os alunos se envolvem em actividades de argumentação matemática à medida que procuram explicar, justificar e defender os seus pontos de vista.

Se a decisão de qual o melhor momento para iniciar a fase de discussão, por si só, não é simples, o problema complexifica-se quando há alunos que durante esta fase retomam o trabalho de grupo, o que pode acontecer por várias razões. Na aula que Rebeca refere, o grupo de Tânia e Isabel insiste no trabalho de grupo porque quer prosseguir as descobertas que estava a fazer, e que não tinha concluído, quando a professora decide avançar para a fase de trabalho com a turma:

> Porque entretanto o grupo da Tânia e da Isabel tinha conseguido avançar um bocado mais. O que se passou com o grupo delas é que ficaram tão entusiasmadas com a tal sugestão dos denominadores, conseguiram avançar mais um bocado e estavam mesmo a querer descobrir. E então estavam a insistir em trabalhar no grupo... (TST 38, p. 42)

Porque valoriza a escuta atenta e considera que este tipo de actuação dos alunos não a permite, Rebeca tem-se preocupado, recorrentemente, em identificar os momentos mais adequados para iniciar as fases de discussão. Um dos objectivos que, por exemplo, está subjacente ao acompanhamento do trabalho em grupo é, precisamente, este. Além disso, através das intervenções que faz, tem tentado mostrar aos alunos que trabalhar em grupo durante as discussões colectivas não é uma actuação desejável. Face à persistência da dificuldade, indiciadora de que o que tem feito não basta, procura reflectir sobre o que poderá fazer mais, tentando, deste modo, inventar, para si própria, novos modos de agir: "Interromper o trabalho é a tal coisa. E eu pensei: O que é que se pode fazer então para minorar isso, que eu não faço?" (TST 38, p. 39). Analisando o conjunto de informações que, neste âmbito, apresenta, podem identificar-se três possibilidades de acção futura:

- Informar os alunos do tempo de que ainda dispõem para trabalhar em grupo: "Posso, por exemplo, avisá-los que dali a tanto tempo vou interromper. Estabelecer tempos, é uma hipótese. Não sei se resulta. Vou ver. Mas pode ajudar" (TST 38, p. 39).

- Certificar-se de que os alunos se sentam de modo a estarem virados para o local em que a apresentação é feita, usualmente o quadro, e, se necessário e viável — no caso de não fazer "só uma interrupção para discutir um bocadinho" (idem) —, fazer com que retomem os lugares habituais na sala:

> Outra coisa é certificar-me, e eu vi que não me certifiquei no caso de alguns, que estão mesmo todos virados para a frente... e se for preciso mesmo separar mesmo os grupos. Estou aqui a pensar. Mandá-los para o lugar deles, para que não continuem a discussão. (TST 38, p. 39)

- Estar atenta e não permitir que a discussão prossiga enquanto os alunos conversarem entre si: "Interromper mesmo. Só continuar quando eles estiverem a prestar atenção" (TST 38, 40).

Outra dificuldade é não validar as respostas

Não validar as ideias que os alunos apresentam constituiu, para Rebeca, uma preocupação e, ao mesmo tempo, uma dificuldade: "Não é a professora que valida, foi uma preocupação que eu tive" (TST 39, p. 29); "outra dificuldade é não validar as respostas e há algumas alturas nestas aulas em que eu acho que fiz isso" (TST 38, p. 39). A reflexão que apresenta a propósito do seu modo de agir perante uma resposta apresentada por Rogério, é reveladora da simultaneidade destes dois aspectos: "Aqui validei a resposta que o Rogério deu, validei a resposta do

Rogério!... (entoação de quem lamenta o facto). No entanto eu não acabei a conversa por aqui. Vá lá... (risos)" (TST 38, p. 42).

Considerada de um ponto de vista meramente matemático, a resposta de Rogério — 1/3 contraria a conjectura de Susana — é uma boa resposta, na medida em que permite refutar a conjectura falsa que estava em discussão. Esta resposta, ao ser apresentada e quando a professora considera tê-la validado, não foi seguida por explicação ou justificação alguma, pelo que poderia haver elementos da turma para quem aquilo que a garantia era a autoridade de Rebeca. Foi este aspecto que lhe desagradou. As justificações surgiram mais tarde, fruto do prolongamento da discussão e a professora congratula-se por ter proporcionado esta oportunidade. Ambos os sentimentos que experienciou parecem fundar-se no valor que atribui à legitimação das ideias apresentadas ser alcançada através de um discurso matematicamente válido que as fundamente.

Numa comunidade de discurso matemático, é importante que os alunos discutam as suas ideias sem que esperem, constantemente, que elas sejam validadas ou invalidadas pelo professor. Rebeca considera que não é fácil conseguir que procedam deste modo: "Eu acho que essa parte de eles não procurarem sempre um bocadinho a nossa validação é uma parte que é um bocado difícil. E uma coisa que eu noto" (TST 39, p. 40). Não reforçar esta tendência, através da forma como age, exige-lhe um cuidado e vigilância permanentes que extravasam os limites das aulas que são objecto de análise no âmbito do projecto de colaboração:

> Eles ainda me continuam a procurar, mesmo quando são exercícios que eles estão a fazer no lugar, para eu ver se estão bem ou não. Eles confrontam muito as coisas com o parceiro do lado, mas quando às vezes as coisas lhes dão resultados diferentes chamam-me para ser eu a ver o que se passa. E chamo-lhes muitas vezes a atenção e digo: Então vejam lá, vocês têm que ter mais confiança no que estão a fazer. Se seguiram um raciocínio com base nas regras que conhecem têm que ser vocês próprios, no final, a voltarem atrás e a tentarem validar, não sou eu que venho aqui resolver. (TST 39, p. 40)

Na sua perspectiva, uma hipótese explicativa para a dificuldade em conseguir que os alunos não procurem, "sempre um bocadinho", que o professor valide as ideias que apresentam é não conseguirem distinguir que há vários tipos de objectos matemáticos alguns dos quais podem não ser questionáveis:

> São as tais coisas que devem ser mais clarificadas até, desde o início logo. Porque tem a ver com a tal história da nossa autoridade. E os alunos podem ter alguma dificuldade em perceber quando é que nós afirmamos, que é o caso, por exemplo, das definições... Eles têm que perceber a diferença. E há muitas coisas que nós não dizemos para provar... É o caso, por exemplo, de certas propriedades ou regras... (TST 39, p. 40)

Ajudar os alunos a não fazer depender a validação do conhecimento matemático da autoridade que o professor detém na aula passa, também, do ponto de vista de Rebeca, por tornar claro, deste o início do desenvolvimento da actividade não só que, em Matemática, "há coisas que à partida não são postas em causa" (TST 39, p. 39) — como acontece, por exemplo, com definições — mas também que há "coisas", como é o caso de certas propriedades ou regras, que o professor pode enunciar sem que apresente ou proponha a sua prova, explicitando, nestes casos, que o faz e porque o faz.

Conseguirmos que todos os outros façam parte daquelas duas conversas paralelas, é uma das dificuldades que eu senti

Rebeca, tendo por referência as aulas que estão a ser objecto de análise, destaca que uma das dificuldades que se coloca ao professor quando pretende envolver os alunos em actividades de argumentação matemática, é o "gerir as conversas paralelas" (TST 38, p. 39). A expressão "conversas paralelas" não é, no entanto, entendida como a troca de ideias entre alunos, que por vezes existe nas aulas, focada em assuntos que são alheios ao trabalho que está a ser realizado:

> Em relação ao trabalho do professor relacionado com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Tinha apontado o gerir as conversas paralelas, é uma dificuldade. Mas paralelas no bom sentido. Nós às vezes costumamos dizer aos alunos que não queremos conversas paralelas... Mas aqui queremos (...) Só que é um bocado difícil gerir essas conversas (...) Conseguirmos que todos os outros façam parte daquelas duas conversas paralelas, é uma das dificuldades que eu senti. (TST 38, p. 39)

Esta reflexão revela que, para Rebeca, o problema não reside no que constitui o objecto da conversa, mas sim em haver elementos da turma que não conseguem acompanhar e fazer parte de discussões que, embora matematicamente significativas, se restringem e envolvem apenas alguns alunos. Neste contexto, foram, sobretudo, duas as ocasiões em que sentiu dificuldades em gerir as interacções que ocorriam.

Uma surge na aula de dia 17, no momento em que Isabel, que estava no quadro, se aproxima de Tânia, sua colega de grupo, e começam a interagir, entusiasticamente, porque se apercebem de uma nova regularidade nas decomposições, em factores primos, dos denominadores das fracções que originam dízimas finitas. Rebeca, referindo-se a este momento diz: "Tive nitidamente dificuldades em gerir a descoberta que estavam a fazer ali ao mesmo tempo, entusiasmadas, e em conseguir que os outros acompanhassem" (TST 38, p. 54).

Na sua perspectiva, porque estas alunas apenas começaram a percepcionar a nova regularidade no momento da apresentação, "também não conseguiam ao mesmo tempo estar a explicar o que estavam a pensar" (TST 38, p. 54). Sabe, no entanto, que as descobertas que estavam a ser comunicadas são fundamentais para a formulação da conjectura "c. pot.". Para além destas alunas e Rogério — cujas intervenções revelavam estar a entender o que diziam —, para que outros elementos da turma pudessem participar na construção do enunciado desta conjectura, como desejava, era fundamental que pudessem compreender essas descobertas, o que não estava a acontecer: "Entretanto o resto da turma não estava a acompanhar" (TST 38, p. 54).

Como referi na subsecção *Modo de estar e aspectos do trabalho da professora*, Rebeca preocupou-se com esta compreensão e tentou orquestrar a discussão de um modo que permitisse tornar visíveis e inteligíveis as ideias apresentadas procurando, neste processo, envolver e responsabilizar as suas autoras. No entanto, as palavras que pronuncia ao reflectir sobre este momento da aula, revelam alguma inquietação com a busca de outras possibilidades de acção: "Agora não sei o que é que eu poderia fazer numa situação destas. Dizer, por exemplo: Então estão a pensar mais, vamos parar? Mas estávamos mesmo no final da aula... Foi aqui uma dificuldade nítida" (TST 38, p. 54).

A segunda ocasião em que Rebeca sente que há muitos alunos que não acompanham a discussão que está a ocorrer, situa-se no momento em que Rogério e Tânia debatem, animadamente, a sugestão que este aluno apresentou para a prova da conjectura "c. pot.": "O problema é que eles estavam completamente focados um no outro" (TST 39, p. 37).

A discussão entre estes dois alunos é uma "conversa interessante mas que é só deles" (TST 38, p. 39). Os problemas que teve que enfrentar durante a apresentação das descobertas do grupo de Isabel, complexificam-se nesta situação, na medida em que, em determinados momentos, nem ela própria consegue "entrar para discussão" para a poder moderar de modo a ajudar os colegas a compreendê-la:

> Os colegas estão lá à toa e até eu não consigo entrar na discussão deles os dois (risos) (...) quero tornar essa conversa visível para, inclusivamente, eu poder moderar, porque, no fundo, eles não estão a precisar de mim para nada. Estão os dois a discutir um com o outro acerca daquilo que se está a passar. É uma das dificuldades e dilemas. (TST 38, p. 39)

Mesmo que nem todos os colegas fossem, ainda, capazes de argumentar como Tânia e Rogério o fizeram nesta ocasião e mesmo noutras, se pudessem escutar o que eles diziam poderiam aprender, tal como aprendem a partir do que ouvem as "crianças quando estão a aprender a falar, ou os viajantes numa terra desconhecida" (Lampert, 2001, p. 164). Só que, nesta situação, a maior parte dos elementos da turma, nem a partir do ouvir podia aprender: "Estavam muito perto um do outro e só quem estava ao pé deles é que ouvia" (TST 39, p. 37); "às tantas estão só eles os dois e mais dois ou três alunos a prestar atenção e a discutirem e os outros completamente a leste" (idem, p. 35).

Na altura, Rebeca procurou inverter a situação, chamando a atenção de Rogério e de Tânia para a necessidade de falarem para a turma: "Digo qualquer coisa do tipo: mas falem para todos, eu também quero ouvir, assim sinto-me posta de parte" (TST 38, p. 39). Houve mesmo um aluno que fez uma intervenção que permitiu reforçar esta necessidade: "Disse mesmo para os outros: É melhor eu ir embora. Acho que foi o Cristino" (Rebeca, TST 39, p. 35). No entanto, só a muito custo, a discussão deixou de estar centrada e de ser monopolizada por Rogério e Tânia.

O que fazer perante discussões matematicamente significativas que envolvam apenas dois ou três elementos da turma? Rebeca coloca esta questão a si própria numa tentativa de identificar modos de acção futura que a ajudem a lidar com estas discussões, caso comecem a surgir nas suas aulas:

> Agora o que é que eu posso fazer em relação a isso? Uma das coisas que pode ajudar é quando um está a explicitar uma coisa mais longa pô-lo no quadro o que já faz com que haja mais colegas que se foquem nele. (TST 39, p. 35)

Quando a apresentação de uma ideia ou raciocínio exige um tempo mais longo, disponibilizar ao seu autor o lugar do quadro possibilita, do ponto de vista da professora, que "haja mais colegas que se foquem nele" (TST 39, p. 35), faz com que "a conversa se torne mais audível para todos" (idem) e permite "evitar que haja aquela conversa paralela de lugar para lugar que, apesar de ser positiva, é mais difícil dos outros observarem" (idem).

Sensibilizar os alunos envolvidos na discussão para o cuidado que devem ter em não deixarem de lado os colegas e em preocuparem-se com o seu entendimento das ideias em debate e, simultaneamente, apelar ao envolvimento destes últimos na discussão, são, também, aspectos que Rebeca considera serem importantes:

> Fazê-los sentir que não são os dois únicos alunos [referência, em particular, a Rogério e Tânia] que estão na aula, dizer: a conversa é muito interessante, vocês discutam mas não se esqueçam dos vossos colegas... (...) Também tem que se apelar ao envolvimento dos outros. Tem que ser um investimento e um esforço das duas partes. (TST 39, pp. 36-7)

Estas preocupações estiveram subjacentes ao modo como a professora procurou lidar com a discussão entre Rogério, Isabel e Tânia, que ocorreu no final da aula de dia 17. No entanto, Rebeca reconhece que nem sempre lhe é fácil impedir que o fascínio que sente — "Fico fascinada" (TST 39, p. 36) — perante discussões matematicamente significativas que, por vezes, ocorrem — nomeadamente entre Rogério e Tânia —, embote a sua capacidade de antecipar os riscos que estas discussões podem ter na marginalização e consequente dispersão dos colegas. Apercebe-se desta dispersão quando ela está já instaurada: "Eu percebo quando começa a haver a tal dispersão, não é?" (idem). Só que, na sua perspectiva, esta percepção e posterior tentativa de captar a atenção dos alunos não é suficiente: "Mas não posso deixar chegar a estes momentos de haver a tal dispersão" (idem). Igualmente importante é estar alerta para o poder que sobre ela exerce esse fascínio e tomar consciência de que não pode deixar-se, por ele, embalar ao ponto de relegar para plano secundário outros elementos da turma por cuja aprendizagem é, também, responsável: "E aí tenho que acordar (...) Tenho que tomar consciência disso antes de deixar chegar aí" (idem).

O que é que nós fazemos quando há aqueles alunos que estão muito mais à frente que os outros?

O problema de conseguir que todos os alunos façam parte de conversas paralelas entrelaça-se com um outro, sentido por Rebeca, que se prende com o que fazer face a ideias apresentadas durante as discussões que têm subjacentes raciocínios que não são inteligíveis, pelo menos no momento em que são comunicadas, pela maioria dos alunos da turma.

Rogério, Tânia e Isabel são exemplos de alunos com um desempenho matemático muito bom. Frequentemente, as suas contribuições são recursos importantes que a professora pode, se assim o decidir, usar para ajudar a turma a progredir na sua compreensão da Matemática. No entanto, por vezes, as suas sugestões ou as discussões em que se envolvem não são compreendidas por muitos colegas da turma. Um "dilema muito grande" com que Rebeca teve que lidar nas duas ocasiões referidas na subsecção anterior, deriva, precisamente, do facto de haver alunos, como é o caso destes, que "estão muito mais à frente que os outros":

> Um outro dilema muito grande que fica aqui [referência ao final da aula de dia 17], e na última aula aconteceu também [referência a aula de dia 24], é a tal

> história que acontece quando há aqueles alunos que estão muito mais à frente que os outros. O que é que nós fazemos? Foi o caso do Rogério, na última aula. (...) No final, se calhar acabaram por perceber porque as coisas até foram explicadas com lógica, mas poucos ou nenhum estava a apanhar o raciocínio do Rogério. Acho que ninguém mesmo. Até eu não estava a apanhar aquele raciocínio que o Rogério estava a fazer!... Estás a ver? (TST 38, p. 59).

Ao longo das várias sessões de trabalho focadas na reflexão sobre as aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*, Rebeca retoma, por diversas vezes, os problemas que sentiu decorrentes de muitos alunos da turma não estarem a acompanhar a sugestão que Rogério apresentou na aula de dia 24, nem a consequente discussão que ocorreu entre este aluno e Tânia, o que é revelador da inquietação que estes momentos da aula lhe provocaram. Nas suas palavras: "É mesmo um dilema. Eu, por um lado, gosto de os ouvir discutir, gosto de os ouvir defender as suas ideias mas, por outro lado, há o resto da turma" (TST 39, p. 35).

Rogério e Tânia são alunos que "argumentam bem um com o outro" (TST 39, p. 35) personificando, assim, o tipo de discurso que Rebeca deseja que exista nas suas aulas. Tentam encontrar sentido no que ouvem, explicam e justificam o que dizem, expressam o seu desacordo quando acham que é de o fazer e procuram fundamentar as suas posições. Referindo-se, em particular a Rogério, um aluno que considera "muito empenhado e impecável" (TST 38, p. 47), diz:

> Aliás, se há pessoas na turma que menos se centram em mim uma delas é o Rogério. Ele quando quer saber alguma coisa comigo pergunta-me a mim, ou se quer dizer alguma coisa que seja importante que queira dizer directamente diz, mas se quiser saber alguma coisa que os outros estão a explicar ele nunca me pergunta a mim. Pergunta directamente às pessoas. (TST 38, p. 41).

Só que, nas palavras de Rebeca, "há o resto da turma" e, por vezes, como aqueles alunos "também estão mais avançados" (TST 39, p. 36), o problema é que os colegas ficam à parte: "O problema, nessas conversas entre a Tânia e o Rogério, é ficarem só eles" (idem).

Perante intervenções de alunos que "estão muito mais à frente que os outros", Rebeca preocupou-se com os restantes elementos da turma e esforçou-se por que compreendessem o que estava em discussão para que pudessem participar. O modo como agiu no decurso da discussão decorrente da apresentação das descobertas feitas pelo grupo de Isabel, bem como os cuidados que teve na aula de dia 24 face à apresentação da sugestão de Rogério e as reflexões que a este propósito apresenta — referidos na subsecção *Não podíamos resolver o problema considerando os dois casos?* —, são reveladoras desta preocupação e esforço. No entanto, tem consciência de que, nomeadamente na aula de dia 24, não conseguiu que houvesse uma participação equilibrada dos alunos e reflecte sobre os problemas com que se confrontou tentando interpretar porque agiu como agiu, identificar outras possibilidades de acção e reconstruir esta acção através da procura do que deve manter-se e do que pode ser alterado.

Referindo-se aos momentos da aula subsequentes à sua decisão de seguir a sugestão apresentada por Rogério para a prova da conjectura "c. pot.", Rebeca salienta que "foi boa opção eu ter pedido ao Rogério para ir ao quadro explicar, acho que foi má não o ter feito mais cedo" (TST 38, p. 60). Uma das reflexões que apresenta contribui para iluminar quer as consequências negativas que, do seu ponto de vista, advieram de não solicitado "mais cedo" a este aluno que fosse explicar à turma a sua sugestão, quer onde se poderá ter enraizado esta opção:

> E eu acho que aí já foi tarde demais, ou seja, ele [Rogério] devia ter ido mais cedo... Porque nós às vezes, professores, também somos um bocado chatos! Custa-nos a largar ali o nosso posto!... (risos) É verdade! Acho que as coisas se tinham resolvido mais rapidamente se eu lhe tivesse dado... Porque eu estava a dar-lhe a palavra mas ao mesmo tempo não saía dali, estava eu a interagir com ele e cada vez os outros a dispersarem-se mais. Devia ter ido ao quadro mais cedo explicar. (TST 38, p. 60)

A expressão "custa-nos a largar ali o nosso posto", tem ressonância com outras que Rebeca foi usando durante a reflexão sobre as aulas em análise: "Os professores às vezes são um bocado possessivos, não é? (TST 39, p. 3); "Temos a tendência de termos protagonismo a mais nas nossas aulas" (idem, p. 32).

No seu conjunto, estas expressões remetem para a questão da partilha da liderança das situações didácticas com os alunos. Rebeca pensa que "o excesso de protagonismo da parte do professor" (TST 39, p. 32) é "um problema (...) com que temos que ter cuidado" (idem). Simultaneamente, considera que evitar a possessividade de que fala e que pode boicotar o tipo de discurso matemático que deseja para as suas aulas, requer um esforço e uma vigilância permanentes: "Por mais que a gente tente, por vezes, quando não nos estamos a controlar, ainda há aquela tendência de querer impor ou dizer, porque achamos que nós percebemos" (TST 39, p. 3).

Numa situação em que sabia que a maioria dos alunos da turma não estava a compreender o que Rogério dizia, abandonar o lugar do quadro para que o aluno o ocupasse, dando-lhe, assim, a oportunidade de "ser professor" e abdicando, de algum modo, do controlo que estava a exercer, não era tarefa fácil. Exigia que sentisse confiança suficiente na explicação que ele iria apresentar, que aceitasse a incerteza relativa à sua eficácia para a clarificação das dúvidas e problemas dos colegas e que estivesse preparada para reagir a algo que a surpreendesse.

Face a tudo isto decide, de início, não partilhar a liderança deste momento da aula com Rogério, ideia que parece estar subjacente à expressão "Custa-nos a largar ali o nosso posto!...". No entanto, dá-se conta, a meio do percurso, que a sua actuação está a contribuir para que os colegas se dispersem cada vez mais e opta por alterar a decisão inicial: "E explicou e explicou muito bem, foi lá explicar para os outros" (TST 38, p. 60). Rebeca considera que esta foi uma boa opção e equaciona a sua acção futura tendo em conta o que o aprendeu ao reflectir sobre o modo como lidou com a situação:

> Não tem problemas em explicar as coisas. Está à-vontade. Até é muito claro [referência a Rogério]. O que eu anotei aqui nesta parte foi o seguinte: Em certas alturas, nomeadamente em raciocínios mais elaborados, é de fazer os alunos irem explicar ao quadro porque o professor pode deturpar o que o aluno está a tentar dizer e ao mesmo tempo foca muito as coisas no professor. (TST 39, p. 29)

Rogério é um aluno cujo modo de agir, nalgumas alturas, dificulta a acção de Rebeca na medida em que, sendo "um bocado individualista" (TST 38, p. 42), "às vezes também não deixa os outros acabarem o que estão a dizer (...) quando ele já percebeu já não interessa (...) mesmo que os colegas não tenham percebido..."

(idem, p. 41). No entanto, nomeadamente nesta situação, Rebeca reconhece que se Rogério tivesse ido ao quadro mais cedo, o problema da compreensão, pelos colegas, do seu raciocínio tinha sido ultrapassado mais rapidamente. As suas reflexões parecem revelar que (re)aprendeu, através de Rogério, que, em determinados momentos, a partilha da liderança com os alunos é importante e que estes, embora por vezes possam ser fonte de dificuldades, se lhe for proporcionada a oportunidade de serem professores, podem, também, constituir recursos valiosos para a ajudar a lidar com problemas com que se confronta na sua prática.

Encerrando o capítulo. Rebeca é uma jovem professora do quadro de nomeação definitiva de uma escola secundária que conhece bem os alunos com quem trabalha e que mantém, desde aluna, uma relação privilegiada com a Matemática. Enquanto professora, preocupa-se com a profissão e com o modo como a exerce. Desenvolve a sua prática profissional em diversos campos interligados onde se situa de um modo positivo, intenso, entusiasta e empenhado.

Quando nos conhecemos associava argumentação matemática à explicação e à justificação, pelos alunos, dos seus raciocínios, aspectos que considerava relevantes. Envolver a turma nestas actividades levantava-lhe certas dificuldades. A sua participação no projecto de investigação colaborativa foi, entre outros aspectos, um dos meios para poder compreender, de um modo mais aprofundado, o que estava em jogo em ensinar a argumentar em Matemática e, através desta via, poder melhorar as suas práticas.

Na segunda parte deste capítulo, apresentei a análise da aula desenvolvida a partir da tarefa *Números em Círculos*, a primeira de Rebeca em que estive presente e que foi instituída como objecto de análise individual e colectiva. Na sequência desta aula e durante a primeira fase do projecto, várias outras das suas aulas foram analisadas no grupo de pesquisa, o que deu origem à discussão de questões diversas focadas em aspectos do trabalho do professor que podem facilitar ou dificultar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Passados cerca de sete meses da data em que Rebeca trabalhou com a tarefa *Números em*

Círculos propõe aos alunos a exploração de *À procura de dízimas finitas*, tarefa em que trabalharam durante cerca de três aulas analisadas na terceira parte deste capítulo. Tal como na primeira aula que presenciei, também nestas houve acontecimentos diversos que originaram dificuldades, inquietações, problemas, dilemas, ou seja, situações de carácter problemático que, globalmente, designei por problemas. A análise individual destes acontecimentos e posterior reflexão no grupo de pesquisa, fez emergir, também, variadas questões relacionadas com o ensinar a argumentar em Matemática.

Apresento, em seguida, os problemas com que Rebeca se confrontou ao longo das quatro aulas em que foram exploradas as referidas tarefas organizando-os em quatro tabelas de modo a proporcionar uma leitura mais sistematizada dos desafios enfrentados pela professora. Em cada uma das tabelas, incluo os problemas associados a cada uma das quatro categoria usadas para estruturar a apresentação da análise das aulas. Incluo, também, nestas tabelas e para o conjunto de problemas respeitantes a cada categoria, questões ilustrativas de ideias debatidas no grupo de pesquisa a partir dos problemas enfrentados por Rebeca. Nalguns casos, estas ideias foram objecto de reflexão nas próprias sessões de trabalho dedicadas às quatro aulas analisadas neste capítulo. Noutros estas sessões proporcionaram um terreno propício para uma discussão posterior.

Apoio à formulação e avaliação de conjecturas

1. Tarefa *Números em círculos*	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
P1.Tive dúvidas se havia de mandá-las logo demonstrar para os positivos. P 2: Não tinha pensado que eles iam ordenar os números por ordem decrescente. P 3: Não percebi e conduzi para outro lado.	P4: Uma dificuldade foi eles não terem dado importância às conjecturas que refutam. P5: Eu não estava a perceber mesmo o raciocínio delas P6: Temos que estar sempre atentas à organização dos exemplos e, às tantas, não estamos	Q1/P1: Quando e como desafiar os alunos a envolverem-se em experiências de prova? Q2/P2: Como lidar com acontecimentos supreendentes quando não é perceptível o que os ocasiona sem fazer depender o rumo da aula da autoridade da professora? Q3/P3/P5: Como lidar com raciocínios inesperados que nem sempre se conseguem compreender no momento, de modo ao rumo da aula ser delineado tendo-os em conta? Q4/P4: Como ajudar os alunos a compreenderem que as conjecturas que refutam também têm valor? Q5/P6. O que dizer e quando o dizer para ajudar os alunos a progredir sem boicotar a relevância matemática da sua actividade? O que pode facilitar a formulação de conjecturas?

Ensino do discurso de prova

1. Tarefa *Números em círculos*	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
P7: Não há uma interpretação matemática das letras P8: Convencê-lo que quando utilizou o x não tinha imposto nenhuma restrição não foi fácil P9: Queria que eles provassem e eles não estavam a perceber a necessidade...	P 10: Deveria ter ficado claro que se ia provar nos dois sentidos P 11: A sugestão para a prova foi ao contrário... P 12: Um problema foi não estar claro que $p/10^k$ representa, de uma maneira geral, todas as dízimas finitas P 13: Queríamos provar a conjectura para o 1 sobre e depois estávamos com fracções do tipo y sobre... P 14: No caso $1/2^n x 5^p$ tinha pensado que talvez nem fosse para as letras e a ir, iria sempre separar os casos em que n>p e p>n	Q6/P7: Como ajudar os alunos a encontrarem um processo de representar algebricamente números inteiros consecutivos sem os informar desta representação? Que papel pode ter a análise de exemplos? Q7/P8: Como, sem recorrer a argumentos de autoridade, ajudar os alunos a compreender o significado de representações algébricas ? Q8/P9: Como ajudar os alunos a compreender o significado de prova e a sentir a necessidade da prova? Q10/ P10/P11/P12/P13: Que dificuldades se colocaram aos alunos no processo de prova? O que poderá estar na sua origem? O que poderia ter sido feito para os ajudar a ultrapassar as dificuldades? Q11:P14: Como lidar com acontecimentos supreendentes que suscitam inseguranças, sem fazer depender o rumo da aula da autoridade que a professora detém?

Emergência e exploração de situações de desacordo

1. Tarefa *Números em círculos*	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
P15: Não está preocupado em saber o raciocínio dos colegas, não lhe dá importância...	P16: Se tivesse perguntado porquê podia ter aproveitado para mostrar as limitações do raciocínio indutivo... P17: O mal não é não perceber. É não termos consciência no momento que podemos não estar a compreender	Q12/P15: Como lidar com a participação de alunos muito intervenientes e que se focam exclusivamente na professora, a única pessoa na turma com quem consideram poder aprender? Como ajudar esses alunos a valorizar as contribuições dos colegas? Q13/P16: Como lidar com situações de divergência de ideias de modo a delas tirar o maior partido? Q14/P17: O que poderá estar na origem da não compreensão da existência de situações de desacordo? O que poderá ser feito para aumentar as possibilidades desta compreensão?

Constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático

1. Tarefa *Números em círculos*	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
P18: Aqui podem surgir mais situações de que não estamos à espera... P19: Mas podia pô-los, de algum modo, a confrontarem-se mais uns com os outros... P20: Quanto menos dirigirmos mais tempo perdemos, quanto mais dirigirmos mais tempo poupamos...	P21: A gente vai no andamento, não é? E depois avançamos.... P22: Ela às vezes estava a tentar explicar as coisas e eu ia logo toda lançada P23: Temos que aprender a ter consciência quando é que podemos sair do guião e quando não podemos P24: Outra dificuldade que eu sinto muito é o parar porque temos que ir discutir P25: Outra dificuldade é não validar as respostas P26: Conseguirmos que todos os outros façam parte daquelas duas conversas paralelas, é uma das dificuldades que eu senti P27: O que fazemos quando há aqueles alunos que estão muito mais à frente que os outros?	Q15/P18/P23: Como fazer face à imprevisibilidade das aulas que é acrescida pela exploração de tarefas de investigação? Como ajudar os alunos a progredir sem os substituir na sua actividade? Q16/P19: Como conseguir que haja entre os alunos um maior confronto de ideias? Como incentivar e facilitar as interacções entre os alunos? Q17/P20: Como apoiar o trabalho dos alunos sem constranger o desenvolvimento da sua autonomia matemática? Q18/P21/P22: O que pode facilitar a orquestração de discussões de modo a favorecer o envolvimento dos alunos? Que cuidados ter para não impedir a expressão do raciocínio dos alunos e para alargar as possibilidades do professor os compreender? Q19/P24: Como articular as várias modalidades de trabalho? Quais os momentos mais adequados para iniciar a discussão? O que fazer para os alunos não prosseguirem o trabalho entre si durante as fases de discussão? Q20/P25: Como ajudar os alunos a compreender que também são responsáveis pela avaliação que surgem contribuições na aula? Porque é que os alunos procurarão tanto a validação do que dizem pelo professor? Q/21P26: Como evitar que alguns alunos monopolizem as discussões sem limitar a abertura para que todos possam participar? Como alargar a outros elementos da turma discussões matematicamente significativas mas restritas a alguns alunos? Q22: P27: Como lidar com contribuições matematicamente relevantes mas não inteligíveis pela maioria dos alunos?

Observando, globalmente, o conjunto das quatro tabelas, constata-se que os problemas com que Rebeca se confrontou foram em número significativo e surgiram a partir de situações de natureza diversa, destacando-se a categoria relacionada com a constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático. Destaca-se, também, que a incidência dos problemas foi variada, tal como é, aliás, revelado pelo título através do qual designei cada um. Como referi no capítulo IV, este título constitui um extracto do discurso da professora quando reflectiu sobre o problema nas sessões de trabalho do grupo de pesquisa ilustrativo da sua incidência. A discussão das questões incluídas nas tabelas, de outras questões suscitadas por outras aulas, suas ou da colega, as experiências que foi fazendo para promover e apoiar um discurso argumentativo nas suas aulas e a reflexão sobre estas experiências, favoreceu, em Rebeca, um novo olhar sobre argumentação matemática. Abordarei este aspecto no capítulo VIII.

Capítulo VII

-

Anita

O núcleo central deste capítulo é uma análise pormenorizada de quatro aulas de Anita orientadas para o envolvimento dos seus alunos em actividades de argumentação matemática e seleccionadas de acordo com os critérios apresentados no capítulo IV. Numa primeira parte, apresento impressões que retenho da pessoa de Anita, através do que me foi dado a conhecer nos muitos momentos que partilhámos. Incluo, também, ideias relacionadas com o seu percurso profissional, com o seu modo de estar na profissão docente, com significados que atribuiu a argumentação matemática no início do projecto de investigação colaborativa, com dificuldades que experienciava neste âmbito, com a escola em que lecciona e com características da turma onde foram leccionadas as aulas que presenciei. A segunda e a terceira partes do capítulo, as mais longas, são dedicadas à análise das aulas em que Anita trabalhou, respectivamente, com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* e *À procura de dízimas finitas,* tendo por pano de fundo o seu pensar e o seu agir.

Traços de um retrato

A pessoa, a professora

Ao negociarmos o projecto de investigação colaborativa, Anita iniciava o quinto ano de ensino, o segundo na escola em que ainda hoje lecciona. Tinha 31 anos. Habita com o marido e o filho, na altura bebé, num apartamento agradável em que sempre me senti bem recebida. O local de residência situa-se numa localidade distanciada da escola por alguns quilómetros, percurso que faz no seu automóvel em cerca de 20 minutos que lhe são particularmente úteis para despertar completamente, nos dias em que inicia as aulas às 8 horas e 15 minutos da manhã. Morena e de aparência esbelta, usa no dia-a-dia uma maquilhagem imperceptível ao primeiro olhar e veste-se de um modo elegante e descontraído que condiz bem com o seu ar jovem.

As imagens que me ocorrem quando recordo o meu primeiro encontro com Anita, são a *reserva não distante*, o *sorriso simpático e tímido,* um *brilhozinho nos olhos* quando conversámos sobre projectos em que tinha estado ou estava envolvida e a *vivência muito intensa da profissão*. Com o passar do tempo fui dando conta que era importante estar muito atenta à entoação da sua voz, à gestualidade e expressões faciais, para poder entender o que dizia e sentia. Aprendi que, por jeito de ser, Anita não é muito conversadora, sobretudo quando o cansaço se acentua, quando, por alguma razão, não se sente satisfeita consigo própria ou face a pessoas que não lhe são familiares. Vê-se como uma pessoa "introvertida" (E2, p. 23, 22/07/02), "muito agarrada às pessoas e às coisas que conhece" (E3, p. 79, 18/03/03) e para quem "uma pessoa nova é uma pessoa nova" (idem). Nas suas palavras "por natureza não sou muito faladora" (E2, p. 15), "sou tímida, mas depois ultrapasso a timidez e sou capaz de falar" (E3, p. 78), mesmo se "levo um bocadinho mais de tempo" (idem, p. 36). Dei-me conta, também, que porque a entusiasmam a partilha e a discussão de ideias, o *brilhozinho nos olhos* é, de facto, real quando se trata de projectos:

> Não te enganaste [em relação ao "brilhozinho nos olhos"]. Sou eu que sou assim. Olha, tenho lá uma colega, não sei se conheces, a (...) [indicação do

nome da colega] que também pertence aos grupos de trabalho da APM, está ligada à resolução de problemas... (...) Ela está a trabalhar comigo no âmbito do meu projecto e de mais projectos, porque ela é uma pessoa que também gosta, que também gosta de discutir as coisas. Ela apareceu com umas coisinhas do ProfMat para a gente discutir (...) temos andado a reunir-nos há duas ou três reuniões, em tempo extra relativamente ao estabelecido para o meu projecto, para discutir isto e aquilo. (...) Quais são as aplicações do que a (...) [indicação do nome da colega] trouxe do ProfMat no nosso 8º ano? Quais seriam as possíveis extensões? O que a gente faria com aquilo? (...) eu penso logo como é que eu fazia isto com o *Sketchpad*, em termos de conjecturas? E não sei quê... E depois para demonstrar? (...) Até gostávamos de discutir com mais pessoas. (...) Mas estás a ver, surge o bichinho, a gente quer discutir, ver como podemos aplicar, o que é que se pode fazer, não sei... (E1, p. 6, 23/11/01)

Compreendi que quando a timidez e a reserva de Anita se esbatem, emerge um carácter meigo e um modo de ser doce e cuidadoso que não a impedem de se empenhar naquilo em que acredita, nem de enfrentar situações novas consciente dos riscos e das possibilidades de erro que podem advir da novidade. Em termos profissionais, distancia-se, assim, do "não fazer nada, para não arriscar, para não receber críticas, para não sofrer, para não falhar e pronto. Estou cá e faço sempre assim *'forever and ever'*. O mundo muda e a gente fica na mesma..." (E3, p. 23). Este modo de estar revela-se, por exemplo, na postura que assumiu face às críticas que escutou no grupo de discussão realizado no ProfMat a propósito de aspectos da sua aula em que foi explorada a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*. Transparece, também, na naturalidade com que encara o haver situações que correm "melhor" e outras "pior" quando está em jogo o "arriscar" em práticas de ensino em que a sua experiência não é muita e que se revestem de complexidades significativas:

E olha lá, nós estivemos também a trabalhar com tarefas de investigação, que tu sabes que não é um campo fácil. Não é propriamente chego aqui e ando aqui aos pulinhos. Surgem coisas novas. Mas também lá está, depende da perspectiva com que tu encaras as coisas. Olha por exemplo, tu vês, eu arrisquei. E houve situações que me saíram melhor e outras pior. Basta veres o tal caso dos candeeiros [referência à tarefa *Uma questão de candeeiros*]. Não é uma tarefa de investigação propriamente dita, mas aconteceu aquela situação e eu estive, na aula, montes de tempo a pensar e, como essa, houve outras em que eu tive de estar a pensar na altura, obviamente. Isso é natural, acontece. (E3, p. 96)

O mesmo modo de estar na profissão e, em geral, na vida, sobressai, ainda, nas considerações que Anita tece sobre o papel do erro na aprendizagem dos alunos e sobre as potencialidades que lhe reconhece em termos do seu próprio processo de aprendizagem:

> Mesmo que uma coisa, como no caso do Rogério, não esteja mesmo bem, embora com o seu valor, é a tal coisa: Aprende-se a partir dos erros. E isto é uma coisa que eu lhes tento transmitir e sempre (...) Mas isso é mesmo o que eu penso, é essa tal coisa de eu aprender com os meus erros e com os dos outros. Posso, às vezes, não aprender, mas pelo menos tenho sempre aquela ideia, mesmo para mim, de ver o que os outros fazem e não ter que passar pelo mesmo. Não quer dizer que uma pessoa tenha que errar para aprender, mas se temos a oportunidade de contactar com os nossos erros e os dos outros, daí pode-se tirar alguma aprendizagem. (E3, p. 4)

Anita foi colega de estágio de Rebeca, com quem gostou muito de trabalhar. As tecnologias de informação e comunicação (TIC) são um dos seus centros de interesse pois podem "ser ferramenta muito útil no ensino/aprendizagem" (E1, p. 3). O modo como perspectiva a utilização destas tecnologias em termos educativos, transparece nas suas referências ao papel que do computador na aula de Matemática:

> O computador é uma ferramenta que permite testar muitos exemplos concretos em pouco tempo, motiva a formulação de conjecturas e, posteriormente, a prova ou rejeição. E no caso de ser uma conjectura falsa pode permitir encontrar um contra-exemplo. (E1, p. 4)

Observando as memórias evocadas por Anita a propósito do estágio pedagógico, constata-se que o seu interesse pelas tecnologias e o reconhecimento de possibilidades de aprendizagem a partir da partilha de ideias, estão presentes já na altura. Refere, por exemplo, a "acçãozinha com calculadoras" (E1, p. 2) que co-dinamizou com os elementos do grupo de estágio em que estava inserida e para a qual "convidámos colegas de outras escolas" (idem). Recorda, também, que tanto ela como Rebeca, "no estágio, estávamos sempre prontas para aprender e víamos as críticas às aulas como ajudando-nos a aprender" (E3, p. 75). Concluída a licenciatura, Anita concorre, em primeiro lugar, ao quadro de nomeação definitiva da escola onde ainda hoje Rebeca lecciona e fica aí colocada. Tem, nesta escola, uma experiência de trabalho muito positiva e envolvente. No entanto, passados dois anos abandona-a devido à inexistência de turmas em número suficiente para ser atribuído horário a todos os docentes do Departamento de Matemática. Sendo a professora com menor classificação profissional fruto da quase inexistência de tempo de serviço, ficaria numa situação de "horário zero" o que não correspondia, de modo algum, aos seus anseios profissionais.

O gosto pela utilização das TIC no ensino da Matemática e o interesse de Anita pela inovação pedagógica encontram na escola de Rebeca um terreno favorável para se desenvolverem. Participa nos concursos ao "IIE, nas acções de formação com computadores, com as calculadoras" (E1, p. 2) enquanto formadora, co-dinamiza, juntamente com esta professora e outro colega, "uma sessão prática sobre funções com o *Sketchpad*" (idem, p. 3) realizada num ProfMat e, nas suas palavras, "para o Ciência Viva ainda contribuí" (idem). Quando muda para a escola em que actualmente lecciona, transporta consigo este dinamismo e empenhamento. Alia-lhes o espírito de iniciativa e a ousadia para percorrer novos caminhos e vive anos de intenso envolvimento profissional. É membro da Assembleia de Escola, coordenadora do Departamento de Matemática e assessora técnico-pedagógica do Conselho Executivo. Além disso, é responsável e coordena um projecto centrado na produção, experimentação e divulgação de materiais de carácter pedagógico para o ensino e aprendizagem da Matemática com recurso às tecnologias. Este projecto, apresentado ao *I Concurso de Materiais de Apoio à Revisão Curricular e Organização Escolar* lançado pelo Ministério da Educação, já decorria quando iniciámos a colaboração. A divulgação do trabalho realizado no seu âmbito leva Anita a participar, activamente, em vários encontros de carácter profissional. O protagonismo que teve na concepção e desenvolvimento deste projecto, bem como o entusiasmo com que viveu a experiência, podem ser ilustrados pelo que diz quando, durante a primeira entrevista, lhe solicito que me fale sobre ele:

> Foi assim. Eu estava nas minhas navegações na *internet* e encontrei aquele concurso. (...) Olha tem a ver com o DAPP, é o Prodep que o financia, mas tem também ligações com o Nónio. Temos que desenvolver um *site* para divulgar os materiais produzidos (...) A minha ideia foi assim. Eu gostava imenso de

> começar a fazer materiais de apoio ou de trabalho para as aulas com recurso às tecnologias. A minha escola tem poucos materiais a nível de computadores, mas temos a sala do Centro de Formação de Professores do (...) [indicação da zona de localização do Centro]. Eu com essa sala tenho trabalhado já com os meus alunos, porque está muito bem equipada (...) Agora tenho conseguido levar alguns colegas a experimentarem, nessa sala, alguns dos nossos materiais com os seus alunos, porque a ideia é também essa. Temos uma equipa para testar e para produzir e eles também têm conseguido ir para a sala. E é giríssimo. (...) Eu gostava muito de produzir materiais para as aulas e então pensei: porque não, já que é um agrupamento, tentar produzir para o 1º, 2º e 3º ciclos? Tem toda a pertinência num agrupamento... Entusiasmei-me e propus a ideia ao Presidente do Conselho Executivo. Ele gostou da ideia e mãos à obra. E foi assim. (...) Concorri e conseguimos. (...) Esses materiais estarão ligados a conteúdos e têm como objectivo levar os alunos a comparar e testar muitos exemplos em pouco tempo, relacionarem propriedades, formularem conjecturas... (E1, pp. 3-5)

As ideias que anteriormente apresentei, as expressões "até já pensei discutir isso com colegas mais velhos" (E1, p. 17) e "tens que dar uma mãozinha... ideias... Temos que aproveitar... (risos)" (idem, p. 18), que Anita pronuncia na sequência de referir aspectos das suas práticas que a inquietam, paralelamente à decisão de se candidatar e frequentar um mestrado na área da Didáctica da Matemática, deixam transparecer que a intensidade com que se entrega à profissão se prende, por um lado, com o não deixar escapar oportunidades que imagina poderem trazer-lhe aprendizagens que considera relevantes para um desempenho, cada vez melhor, do seu trabalho. Move-a esta vontade. Por outro lado, no que diz respeito, em particular, à vida da escola para além das paredes da sala de aula, esta intensidade parece, também, estar associada ao respeitar compromissos assumidos ou fidelidades que sente em relação a colegas que defendem perspectivas pedagógicas com as quais se identifica. Por exemplo, a aceitação da assessoria ao Conselho Executivo da sua escola decorre de se ter empenhado e envolvido na defesa das ideias propostas pelas pessoas que vieram a integrar este Conselho numa altura particularmente conturbada de eleições disputadas por duas listas:

> Nós na escola atravessámos umas fases muito complicadas, o período de eleições foi terrível, e eu sinto que tu poderás pensar assim "mas o que é que esta tem a ver com isso?" Pelo menos eu acho normal que os outros pensassem assim, eu provavelmente também o pensaria... Mas no fundo está tudo ligado, percebes? (...) acabei por colaborar com pessoas nas quais acredito, e que me ofendia e chateava ver determinadas coisas do outro lado, e tinha também de defender as pessoas e discutir com as pessoas, e pronto. E quando eu te digo

> que, se calhar, me estou a pôr em coisas que podem prejudicar o meu futuro... por exemplo estar na assessoria e estar numa data de coisas... mas também tem a ver com… olha se vamos falar de confiança e lealdade também tem a ver um bocado com isso lá na escola, percebes? Como é que eu te hei-de dizer? Se calhar prejudico-me a mim, noutras coisas. Ainda por cima se entrei para o mestrado e não sei quê... Mas é a tal coisa, quando me meto nas coisas eu tento não prejudicar todos os lados, e as coisas aparecem-me por ordens, como eu te digo assim, diferentes. (...) Pronto, não gosto de determinadas perspectivas de maneira de estar, e sou chata, e se calhar não devo, mas então… também não posso deixar de apoiar pessoas que estão a defender uma coisa que me agrada, que se calhar precisam mesmo, para ir contra outras correntes… (E2, pp. 21-3)

Anita teve desde sempre uma boa relação com a Matemática: "Eu gosto porque acho que tem sentido (risos) (...) porque não é preciso decorar, não é nada disso (...) De umas coisas podem vir outras (...) pode-se argumentar, relacionar, por aí fora..." (E1, pp. 14-5). Como também "gostava de ser professora" (idem, p. 1), nas suas palavras, "juntei o útil ao agradável (...) [e] concorri logo para a licenciatura em Matemática (...) ensino da Matemática". Inicia e termina esta licenciatura na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Em finais de Novembro de 2001, ou seja, pouco depois de termos iniciado a colaboração, Anita refere que um bom professor de Matemática tem, antes de mais, que criar condições para os alunos não verem esta disciplina como "aquela coisa que se aplica e pronto..." (E1, p. 17). Na sua perspectiva, não pode "mostrar aquilo como (...) faz-se e faz-se assim (...) Não se pode estar sempre a mandar aplicar coisas disparatadas, contas e contas..." (idem). Quando a interpelo sobre o que lhe ocorre dizer quando pensa em argumentação/ argumentação matemática, refere:

> Que é uma das minhas grandes batalhas, mas não sei se consigo. Vocês vão ver, logo se vê... (risos) (...) O que é que é para mim argumentação? É tentar que os alunos justifiquem determinadas afirmações. Agora ultimamente o que eu tenho andado a fazer é iniciá-los na demonstração das coisas. (...) Eles às vezes dizem coisas, eu tento que eles justifiquem, mas lá está, nem sempre consigo. Vou tentando... (...) Estamos sempre a tentar... (E1, p. 7)

Procuro compreender de que forma se revestem as tentativas feitas por Anita ao "batalhar" para seus alunos se envolverem em actividades de argumentação matemática. Simultaneamente, porque a palavra "batalha" tem ressonâncias com confronto entre forças ou ideias contrárias, com esforços constantes para vencer obstáculos, tento entender as principais dificuldades que, neste processo, tem enfrentado.

A este propósito, Anita recorda um episódio de uma das suas aulas em que estava em jogo o "demonstrar que uma mediana dividia o triângulo em dois triângulos equivalentes" (E1, p. 8). Refere que começou por "puxar por eles, a tentar que argumentassem, justificassem (...) porque eles confundem-se sempre com as medianas e as alturas (...) e entretanto toca" (idem). Lança como "desafio" (idem) o provarem, em casa, esta propriedade para um triângulo qualquer. Alguns alunos fazem-no "para casos particulares [desenharam triângulos isósceles e equiláteros] devidamente justificados" (idem, p. 9) o que considera ter sido "interessante, para depois partir para outras explorações e comparar e ver se é só ali que podia acontecer aquilo" (idem).

Nas tentativas de envolver os alunos em actividades do tipo da descrita, Anita situa a principal dificuldade com que se tem debatido em concepções dos alunos acerca do que é a Matemática que vão no sentido de uma sobrevalorização de procedimentos de cálculo e da sua mera memorização e aplicação:

> Estou farta de tentar convencê-los de que a Matemática não é um conjunto de procedimentos ou regras a aplicar e então na Geometria estou a levar um bocadinho mais de tempo precisamente por causa dessas coisas. A Geometria não é só aquelas coisinhas, fazer continhas... aplicar o teorema de Pitágoras (...) às vezes [há professores que] tentam levá-los muito para a parte só do cálculo, mostram a Matemática assim um bocadinho de uma maneira...é isto, decora-se e aplica-se, percebes? E eu luto um bocado contra isso. (...) é a maior barreira e que eu continuo a tentar modificar, por enquanto. (E1, pp. 9-10)

Anita considera que as concepções que refere não são independentes do que suspeita ter sido o passado escolar de vários alunos da turma e a sua "luta" passa por tentar que "sintam a necessidade de justificar (E1, p. 10), por "tentar levá-los, convencê-los que realmente é importante" (idem). Por exemplo, recorrendo ao *Geometer's Sketchpad*, procura que sejam formuladas "muitas conjecturas, para tentar que eles demonstrem depois e que justifiquem e que lhes surjam outras ideias. Pronto, é demonstrar-lhes mesmo a importância" (idem). No entanto, tornar inteligível para os alunos a necessidade de justificar não é, também, tarefa fácil para a professora: "Tenta-se, é como te digo, não é muito fácil, mas vai-se tentando..." (idem).

As dificuldades associadas à "luta" referida são acrescidas porque, por vezes, para acelerar a actividade da aula, Anita não consegue resistir a "induzir" (idem, p. 12) os alunos nos percursos argumentativos que pretende que percorram. Agir deste modo não é, na sua perspectiva, o mais adequado. No entanto, evitá-lo também não é simples:

> Lá está, se é para eles argumentarem e para eles fazerem as coisas, não vou ser eu... às vezes não resisto, mas então... lá está. Às vezes tenho que pôr um selo na boca, mas olha... (risos) (...) Porque às vezes dá vontade de... e pode-se puxar de várias maneiras e às vezes é uma tentação de... (E1, pp. 12-3)

Considerando que o projecto de investigação colaborativa vai ao encontro do que valoriza no ensino e aprendizagem da Matemática e pensando que "só tenho a lucrar com a análise das coisas mediante aquilo que a gente pretende e os nossos objectivos" (E2, p. 16), Anita viu na sua participação no projecto uma possibilidade de poder melhorar o seu trabalho para poder melhorar o dos alunos.

Contextos de trabalho

A escola de Anita

A escola básica 2,3 em que Anita lecciona é a sede de um agrupamento de escolas que abrange, para além dela, duas outras do 1º ciclo fisicamente separadas. Tem instalações muito recentes, de aspecto agradável e funcional e provém de uma outra mais antiga situada na mesma localidade. Frequentam-na cerca de 37 turmas, distribuídas pelo 2º e 3º ciclos, e é nela que funciona o Centro de Formação de professores da área.

A minha primeira sensação ao entrar na escola de Anita foi a de vastidão. A segunda foi a de que deveria ter muito cuidado e atenção para não me perder no meio do que se me afigurou como um grande labirinto de corredores, múltiplas salas de aula, gabinetes, laboratórios e outros locais de trabalho/lazer. A sala de professores é muito ampla e bem arranjada. Tem vários recantos adequadamente mobilados que são propícios à conversa mais informal ou ao trabalho e pareceu-me que o corpo docente usufrui de qualquer uma destas potencialidades. Não foi inusual, por exemplo, ver nos espaços mais sossegados vários professores sentados em torno de uma mesa consultando materiais e trocando ideias entre si.

Das instalações da escola, Anita diz serem “razoáveis à excepção da acústica que não parece ser a mais adequada” (DEA, p. 1, 10/11/03). A segunda parte desta afirmação merece o meu total acordo. O fenómeno de ressonância existente nas aulas que observei foi pouco propício ao entendimento de intervenções de alguns alunos e introduziu nos registos magnéticos um ruído de fundo que dificultou bastante a sua observação e transcrição. Tenho, no entanto, algumas reservas quanto à qualificação das referidas instalações como, meramente, “razoáveis” se tiver por referência o que vi em muitas outras escolas e salvaguardando que não tenho um conhecimento das suas limitações tão profundo como o da professora. Com efeito, nem sempre existem, contrariamente ao que acontece na escola de Anita, por exemplo, “várias salas de departamento, laboratórios de Ciência e CFQ bem equipados, oficinas e o laboratório de Matemática” (idem).

O ambiente geral da escola é “um bocadinho difícil de definir porque varia ao longo do tempo” (E4, p. 33, 31/07/03). Vai “dependendo dos professores que em cada ano ficam na escola” (DEA, p. 1, 10/11/03), pois o corpo docente é muito instável: “Os não efectivos na escola são muito numerosos” (idem). A situação é algo diferente no grupo de Matemática na medida em que é aquele onde há um maior número de professores do quadro de nomeação definitiva, “principalmente no 3º ciclo” (E4, p. 33). Aqui “o ambiente é bastante bom” (DEA, p. 1, 10/11/03). Quando iniciámos o projecto, o laboratório de Matemática não funcionava ainda e só vem a ser devidamente equipado muito perto do final do nosso trabalho através de verbas atribuídas à escola pela sua participação no concurso nacional financiado pelo Prodep que anteriormente referi. Um dos objectivos do projecto coordenado por Anita era, precisamente, obter financiamento para equipar este laboratório. Assim, as aulas de Anita que requeriam a utilização de computadores eram leccionadas, em parte ou totalmente, na sala do Centro de Formação de professores. Esta situação conduziu a que nem sempre fosse simples ou possível incluir este recurso em todas as situações em que a professora o considerava importante e adequado.

A turma do projecto

Anita começa a trabalhar com a turma envolvida no projecto quando os alunos frequentam o 7º ano de escolaridade. No ano lectivo seguinte, altura em que a conheci, era constituída por 28 elementos a maior parte dos quais se relacionavam desde o 2º ciclo do ensino básico. Este número decresce um pouco no início do 9º ano, mas a turma mantém, globalmente, a mesma composição:

> A turma de 9º ano era constituída por 24 alunos, 15 raparigas e 9 rapazes. Trata-se de uma turma que tem mantido mais ou menos a mesma constituição ao longo dos 2º e 3º ciclos, com excepção da integração de alguns alunos de outras turmas. A maioria dos alunos que integraram o 5º ano que veio a originar esta turma de 9º ano, provinham essencialmente (...) [de] Duas escolas que, apesar de uma ser pública e outra privada, têm uma realidade muito semelhante e "maneira de estar". Portanto, trata-se de uma turma na qual os alunos já se conheciam há bastante tempo. (DEA, p. 1, 10/11/03)

Um dos factores que Anita sentia dificultar a sua actividade quando iniciámos o projecto era a turma ter um número de alunos "muito maior" (E1, p. 5) do que o das turmas com que tinha trabalhado antes de mudar para a escola em que actualmente lecciona:

> Atrapalham um bocado [turmas grandes]. Tenho que ser sincera. É verdade. Isto também tem a ver com a minha experiência. (...) estranhei um bocadinho, a primeira vez que me vi com uma turma de 28. Não aconteceu nada, não morri, mas sente-se a diferença (...) São muitos alunos, são muitas cabeças e tu tens que trabalhar com elas todas ao mesmo tempo quase... (...) É difícil gerir uma turma grande. Vai-se gerindo mas é mais complicado do que gerir uma turma pequenina. (E1, pp. 5-6)

O trabalho de Anita complexificava-se devido à heterogeneidade da turma e às características do modo de ser e de estar de diversos dos seus alunos: "Em termos gerais, pode dizer-se que inicialmente esta turma era bastante heterogénea em termos de rendimento e de maneira de estar (forma como participam ou não, segurança, atitude para com os outros...), e bastante competitiva" (DEA, p. 5, 10/11/03). A competitividade traduzia-se em "nenhum deles gostar de ficar atrás dos outros" (E3, p. 2). Os alunos queriam "fazer 'boa figura' na participação" (DEA, p. 2, 10/11/03) e preocupavam-se, significativamente, com as classificações: "Preocupam-se com as notas, têm tendência para comparar as notas, não lhes agrada tirar nota inferior aos outros" (idem). Só que o "fazer boa figura" traduzia-se para vários, entre os quais está Júlia o caso mais paradigmático, numa "grande valorização do que está certo" (idem, p. 4) e numa inibição em contribuírem com ideias para o trabalho colectivo a menos que estivessem seguros da sua correcção: "É como se essa fase a partir da qual sairá o que está certo, não possa nunca ser revelada. Seria a parte pensada, quando se escreve e se mostra terá que ser a versão 'perfeita'" (idem). Além disso, "pouco se interessavam pelo que os outros diziam" (idem, p. 5), centrando-se, sobretudo, em si próprios e na professora: "trabalham muito para eles próprios (...) tenho-lhes pedido, às vezes, para apresentarem coisas à turma (...) mas nem sempre os outros estão a ouvir bem. Parece que o que eu faço é que é melhor" (E1, p. 11).

Segundo Anita, "vários alunos participavam, mas era complicado gerar interacção entre eles" (DEA, p. 5, 10/11/03). Nalgumas ocasiões, alguns dos mais competitivos, mas "mais desinibidos e menos preocupados com a exposição das suas ideias" (idem, p. 2), utilizavam para comentar contribuições dos colegas um tom de voz que, na perspectiva da professora, "nem sempre era o mais desejável para uma discussão saudável" (idem, p. 5). Este tom, a par de certos "comentários (embora não assumindo termos incorrectos)" (idem, p. 2), inibia a participação não só de outros elementos da turma igualmente competitivos a quem eram endereçados, mas também de alunos com outras características: "Embora não fossem muitas vezes dirigidos aos alunos que menos participavam penso que fariam pensar duas vezes estes alunos antes de o tentarem. Porque se eles são assim com estes..." (idem).

A competitividade da turma com os contornos que assumia, aliada às concepções de vários alunos sobre o significado de serem perfeitos e impecáveis na aula de Matemática, constituía, para Anita, um factor de perturbação: "Quando há uma competitividade há mais um factorzinho perturbador (...) Querem ser perfeitos, mas a perfeição deles é que anda num contexto diferente da minha, percebes? Porque para mim ser perfeito não é chegar ali e dizer tudo bem" (E3, pp. 88-9). Este modo de estar ia em sentido contrário à sua própria perspectiva sobre o papel que desejava que assumissem no discurso da aula e tornava "complicado" (DEA, p. 2, 10/11/03) haver na turma uma "troca de [ideias] no sentido de uma construção e não de uma destruição" (idem).

Anita começa a lutar contra o referido modo de estar antes de iniciarmos o projecto. O extracto que a seguir apresento permite apoiar esta ideia e, paralelamente, torna visível que as suas preocupações são partilhadas por outros colegas e se alargam para além das aulas de Matemática:

> Por exemplo, voltando à outra turma, ao 8º A, uma das coisas que nós estamos agora a propor para, por exemplo, Formação Cívica é que eles sejam um bocadinho melhores uns com os outros, no sentido de se respeitarem (...) é uma luta, é mais uma luta. (...) Temos andado a tentar, porque eles são competitivos, percebes, às vezes... (...) Uns com os outros são, assim um bocado. (...) a cooperação é muito mais importante e tenta-se que cooperem, mas.... vamos tentando (...) A gente tenta tudo, agora vamos ver, mas também não é um bicho de sete cabeças, não é? Para mim seria melhor de outra maneira, mas... (E1, p. 11)

Durante o período de tempo em que trabalhamos conjuntamente, a cooperação começa a ganhar terreno e as discussões na aula começam a assumir outros contornos. A competitividade, no entanto, mantém-se e a prevenção de possíveis efeitos perversos continua a exigir à professora uma atenção abrangente e um esforço constante.

As ideias anteriormente apresentadas, a par do que observei nas aulas em que estive presente, revelam que Anita cuida do modo como se relaciona com os alunos e das relações que procura que estabeleçam entre si. No início ou final destas aulas foi frequente vê-la rodeada por vários elementos da turma que se encaminhavam, espontaneamente, para o local em que se encontrava e com quem conversava de sorriso nos lábios. Quando se lhes dirige no decurso das actividades, o mesmo sorriso é frequente, o modo como lhes fala é expressivo e meigo e a qualidade do relacionamento que mantém com os alunos é, claramente, visível. As múltiplas conversas que tivemos ao longo do desenvolvimento do projecto, deixam transparecer que conhece bem particularidades do seu modo de ser, ambientes familiares em que se movem e possíveis relações com algumas destas particularidades. Na reflexão escrita que elabora sobre a caracterização da turma encontram-se vários elementos que permitem apoiar estas ideias.

Anita refere, por exemplo, que "Cristina e Maria sempre assumiram uma postura muito independente do que os outros dizem" (DEA, p. 3, 10/11/03). Em contrapartida, Roberto, apesar de ser "capaz de explicar o que fez" (idem) tal como estas colegas, "mesmo no quadro buscava normalmente um apoio na professora (...) também não exibindo grande segurança" (idem). No seu caso, a insistência na apresentação de ideias era frutuosa, mesmo na ausência deste apoio: "embora se se insistisse com ele acabasse por defender as ideias mesmo sem ter confirmação" (idem, p. 4). O mesmo não acontecia com outros alunos "mais caladinhos" (idem, p. 2). Entre estes estava, por exemplo, uma que era objecto de maus tratos por não corresponder a expectativas familiares. Estavam, também, outros cujo baixo nível de participação se devia ou ao pouco conhecimento da Língua Portuguesa resultante da vinda recente para o país ou a um problema de dicção "destacado por todos os professores do Conselho de turma" (idem, p. 3). Este último facto originava risos dos colegas, "situação bastante desagradável" (idem) com que era necessário ter cuidado e tentar precaver. Estavam, ainda, aqueles alunos que, nas palavras da professora, "chamá-los a participar, como várias vezes o fiz implicava uma longuíssima espera para dizerem qualquer coisa e muito embaraço (a julgar pelas suas caras coradas e/ou atrapalhação)" (idem, p. 2).

Anita evoca as "diversas vezes" (DEA, p. 3, 10/11/03) que falou com Renata C., "uma aluna tímida, que inicialmente corava e falava muito baixinho, principalmente nas aulas filmadas" (idem) a propósito da sua "preocupação excessiva com as pequeníssimas falhas que por vezes cometia (...) no sentido de relativizar esta sua preocupação descabida" (idem). Tece, ainda, longos comentários sobre o caso de Júlia que "costuma ser acompanhada pelo pai, que ao que parece nas palavras da aluna, exige a perfeição dela" (idem, p. 4). Este contexto, na sua perspectiva, acarretou que Júlia tivesse "consigo própria uma certa intolerância ao falhar, a não aceitar muito bem a discussão/crítica dos outros (...) e a não querer arriscar-se a expor as suas ideias quando não se sentia 100% segura" (idem, p. 4). A exemplo do que fez com Renata e outros alunos, Anita teve com Júlia conversas particulares que, neste caso concreto, iam, em especial, "no sentido de mostrar que também se aprende a partir dos erros, como se aprende a partir deles, como todos os colegas poderão lucrar a partir dessa partilha" (idem). Assisti a uma destas conversas e percebi que uma parte significativa da boa relação que a professora tem com os alunos é, também, tecida em espaços de conversação informais e privados situados para além do espaço da aula.

A propósito da tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*

A aula em que foi explorada a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* foi leccionada em 14/03/02 e é a primeira de Anita que analisámos no grupo de pesquisa. Surge depois de nos termos debruçado sobre aquela em que a colega trabalhou com *Números em círculos* e cerca de quatro meses após o começo do projecto. A instituição desta aula como objecto de reflexão individual e colectiva derivou da necessidade e da vontade de encontrarmos formas de compatibilizar as minhas necessidades e as de Anita. Quando negociámos as suas aulas em que eu estaria presente, acordámos que o seu início se situaria no 2º período lectivo e que a turma trabalharia, também, com *Números em círculos*. No entanto, não foi possível manter este acordo devido à não conclusão no tempo previsto de uma ficha de trabalho sobre os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Na altura, as férias da Páscoa avizinhavam-se, havia várias actividades de avaliação sumativa agendadas e o único espaço de 90 minutos sequenciais não parcialmente ocupado por estas actividades era o destinado a *Números em círculos*. Percebi, ao conversar com Anita, que não alterar o acordo introduzia constrangimentos diversos no seu trabalho e intuí que a inquietava não respeitar o compromisso assumido e poder, de algum modo, perturbar a minha investigação. Proponho que se adie a apresentação desta tarefa para outra altura mais oportuna e que analisemos se as propostas de trabalho não exploradas incluídas na referida ficha são potencialmente favoráveis à emergência de episódios de argumentação matemática na aula, o que merece o acordo da professora. Esta análise leva-nos a intuir que são prometedoras face aos objectivos do projecto: uma apelava à formulação de uma conjectura, existia um problema que admitia várias soluções e era pedido que fossem comentadas três afirmações, o que pressupunha a indicação do seu valor lógico e respectiva justificação. Tomámos, assim, a decisão de que eu gravaria a aula destinada à conclusão da ficha de trabalho e que ela seria objecto de reflexão no grupo de pesquisa.

A designação *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* foi adoptada durante a preparação dos materiais de apoio à dinamização do grupo de discussão realizado no ProfMat para nomear a tarefa explorada na aula que é objecto de análise. Esta tarefa é constituída por três subtarefas, uma das quais, a subtarefa (a), incluída na referida ficha de trabalho e as restantes apresentadas oralmente na aula. Quanto à sua natureza, a tarefa tem características mistas de exercício e de problema (anexo 13). A subtarefa (a) é constituída por duas partes. A primeira parte requer a utilização dos procedimentos de cálculo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum entre dois números a partir da sua decomposição em factores primos. Estes procedimentos são já conhecidos dos alunos: “Mas eles a calcularem os divisores e o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo não tiveram nenhum problema, percebes?” (TST 13, p. 5, 05/03/02). Incluo-a, por isso, na categoria de exercícios orientados para a consolidação de conhecimentos. A segunda parte da subtarefa (a) envolve a formulação de uma conjectura e pode situar-se na interface entre exercício e problema. Com efeito, o seu enunciado, a par do carácter fortemente estruturado da primeira parte, condiciona muito a actividade dos alunos, limitando-lhes, em particular, a possibilidade de descobrirem conjecturas e processos de resolução próprios. No entanto, ao pressupor uma elaboração pessoal do enunciado da conjectura deixa-lhes uma maior margem de liberdade e abre caminho à possibilidade da sua resolução passar pela utilização de um processo não inteiramente conhecido de antemão. A subtarefa (b) consiste no pedido de justificação da conjectura formulada: "E o que eu vos queria pedir era que analisassem o que têm no vosso caderno e vejam lá se encontram alguma justificação para que isto seja, ou não, sempre verdade" (TA 14/03/02, p. 4). Face à constatação de que vários elementos da turma estão convencidos de que os casos que analisaram são suficientes para garantir veracidade da referida conjectura para o caso geral, a professora confronta-os com o desafio de a avaliarem num novo domínio: o conjunto de ternos de números naturais. Este desafio, pensado individualmente por Anita na fase da preparação da aula, representa a subtarefa (c). As subtarefas (b) e (c) estavam clara e explicitamente formuladas mas, contrariamente ao que acontecia com (a), os alunos não podiam responder-lhes recorrendo à mera aplicação directa de procedimentos já seus conhecidos. Encontrar estas respostas exigia-lhes raciocínios novos que lhes permitissem ultrapassar descontinuidades entre o ponto de partida e aquele a que era necessário chegar. Por estas razões, e restringindo-me à face objectiva do conceito de problema (Boavida, 1993), considero que as subtarefas (b) e (c) se incluem nesta categoria.

Panorama geral sobre a aula

A aula em que foi explorada a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* teve a duração de 90 minutos e o sumário escrito no quadro foi: *Relação entre máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Conclusão de uma ficha de trabalho (máximo divisor comum)*. Reflectindo sobre os objectivos previamente pensados, Anita refere: "Gostava que eles justificassem, no fundo, relacionassem, tentassem tirar coisas" (TST 15, p. 4, 28/03/02). Quando, durante a aula, se dá conta que alguns alunos "começam a achar que os três casos serviam para provar a conjectura" (idem) indica, nas suas palavras, que "optei por lançar aquela questão com os três números" (idem) porque "pretendia que eles vissem que há conjecturas que se verificam para alguns casos e que não são válidas para quaisquer" (idem, p. 5). Assim, fruto dos acontecimentos da aula, aos objectivos definidos na fase da preparação, junta-se um outro, mais específico, focado em ajudar os alunos a compreenderem que a verificação de uma conjectura para casos particulares não constitui uma prova desta conjectura.

Estruturalmente, a aula em análise pode organizar-se em três partes principais. Uma primeira, centrada na realização da subtarefa (a), que é concluída quando o enunciado da conjectura é registado no quadro. Uma segunda, focada na subtarefa (c), que termina quando vários elementos da turma indicam ser falsa a conjectura quando se consideram quaisquer ternos de números naturais. O último terço da aula foi dedicado à subtarefa (b). Porque os alunos estavam com dificuldades "em avançar na justificação" (TST 15, p. 32) e porque, nas palavras de Anita, "quando apostei que eles haviam de ir lá sozinhos, deixei tudo o resto" (idem, p. 14), a exploração das restantes questões da ficha[60] foi remetida para uma outra altura, decisão que foi comunicada à turma: "Eu, se calhar, já não vos... Se vocês não vão lá agora eu deixo-vos pensar mais um bocadinho, e não fazemos a oito, está bem?" (TA 14/03/02, p. 18). A justificação da conjectura só é dada por concluída uns momentos após o toque de saída.

Durante a maior parte da aula os alunos trabalharam em pares acompanhados pela professora. Noutras alturas, a turma trabalhou colectivamente. Nestas últimas, Anita colocou questões endereçadas à globalidade dos alunos ou a elementos particulares, solicitou a alguns que fossem ao quadro apresentar ideias provenientes

[60] A ficha onde estava incluída o que designei por subtarefa (a) inicia-se com um problema a que se seguem exercícios ou outros problemas num conjunto de dez propostas de trabalho. Anteriormente à aula de dia 14/3, os alunos tinham resolvido as seis primeiras pelo que a subtarefa (a) corresponde à sétima. A intenção de Anita era, como o próprio sumário da aula indicia, trabalhar as restantes tarefas da ficha nesta aula, o que não foi possível devido à ocupação dos 90 minutos lectivos com a sétima e as subtarefas (b) e (c) que lhe estiveram associadas.

do trabalho de pares, quando considerou as subtarefas já concluídas ou em fase de conclusão, e procurou que estas ideias fossem analisadas.

Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas

Nesta secção analiso as fases da aula em que a actividade dos alunos se centrou na formulação da conjectura e seu teste em diversos domínios numéricos, ou seja, as primeira e segunda partes.

Apoiando a construção do enunciado da conjectura

Os alunos começaram a realização da subtarefa (a), em trabalho de pares, pouco tempo após o início da aula e depois de ultrapassada o que Anita considerou ser uma dificuldade resultante de alguns elementos da turma não terem conseguido localizar a ficha de trabalho: "Uma das dificuldades logo foi aquela coisa de andar à procura da ficha. Como a ficha vinha de outra aula, tivemos que andar à procura da ficha e ainda foi um certo tempo, não é? (...) eu ainda tive que arranjar algumas... (risos)" (TST 15, p. 23). Trabalham com empenho, alguns trocam impressões com colegas sentados em mesas próximas e a professora, circulando pela sala, vai analisando os registos que fazem nos seus cadernos, colocando e respondendo a questões, dando indicações e incentivando-os a prosseguirem. A observação da actividade da aula permite intuir que são vários os pares que resolvem, rapidamente, a subtarefa. Alda é uma destas alunas e é ela quem, a pedido de Anita, se desloca para junto do quadro onde desenha a tabela incluída no enunciado que preenche após ter registado a decomposição, em factores primos, dos números aí indicados e, para cada caso, o seu máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. Durante este tempo a atenção de Anita reparte-se entre o que se passa no quadro e o acompanhamento do trabalho que os alunos realizam nos seus lugares e com quem continua a interagir. Quando Alda finaliza os registos solicita-lhe que explique o que fez, o que dá origem ao episódio *De outros dois números quaisquer?*.

De outros dois números quaisquer?

1. Alda *(no quadro):* Tive que decompor em factores primos para achar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Depois... *(pausa)* multipliquei estes dois números. Digo também as conclusões? E concluí que ao multiplicar o *a* pelo *b*... *(vai apontando para a tabela)*
2. Anita: Sim...
3. Alda: É igual ao produto do máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum.
4. Anita: Desses...
5. Alda: Desses dois números.
6. Anita: E agora tu disseste... Concluíste... O que é que queres dizer com concluíste?
7. Alda: A conjectura é...
8. Anita: Umh... *(afirmativo)*
9. Alda: Que... digo o *a* vezes o *b*?
10. Anita: Ah?
11. Alda: *a* vezes *b* é igual ao produto do mínimo múltiplo comum entre dois números pelo máximo divisor comum.
12. Anita: De outros dois números quaisquer?
13. Outra aluna: Não. Desses mesmos.
14. Anita: Desses mesmos. Então, oiçam lá. E quem é que me garante a mim que isso é para dois números quaisquer? Vocês só experimentaram com o 10 e o 15, o 12 e o 20, e o 4 e o 6. Por isso é que se chamava uma... o quê?
15. Alunos vários: Conjectura
16. Anita: Conjectura. Mas será que é sempre válida?
17. Um aluno: Não sei...
18. Cristina: Não sei.
19. Anita: Não sabem. Então é assim... (*dirigindo-se à aluna que está no quadro*) Escreve a conjectura lá por cima, se chegares... (...)

(...)

A Alda, no quadro, prossegue ditando ao Paulo o enunciado da conjectura. A Anita circula pela sala, observando o que os alunos fazem nos seus lugares, respondendo a perguntas e observando o que se vai passando no quadro.

38. Anita: É assim.. Quando vocês dizem... Podiam dizer assim "A conjectura é"... tirem lá o "que" (*dirigindo-se ao Paulo e à Alda que se mantêm no quadro*). Ponham dois pontos... Mas quando dizem o produto do máximo divisor comum... O que é isso?
39. Maria *(falando baixo):* De dois números pelo mínimo múltiplo comum desses números é igual ao produto dos números dados inicialmente.
40. Anita: Ouviram o que ela disse? Diz isso mais alto.
41. Maria: O produto do mínimo múltiplo comum de dois números pelo máximo divisor comum dos mesmos números é igual ao produto dos números dados inicialmente.

42. Anita: Qual é a diferença entre isto que a Maria disse e o que vocês têm aí escrito? (*dirigindo-se aos alunos que estão no quadro*)
43. Paulo: Não sei...

(Há outras intervenções de alunos que não são perceptíveis)

44. Maria: Tem que se dizer que é dos mesmos números.
45. Anita *(para a turma)*: Como é que vocês acham... Se eu vos dissesse assim: calculem o mínimo múltiplo comum e não vos dissesse mais nada, o que é vocês faziam?

(TA, 14/03/02, pp. 3-6)

A análise das intervenções feitas por Anita ao longo deste episódio e também na sua sequência até ser finalizado o registo do enunciado da conjectura, deixa transparecer que, nestes momentos da aula, o seu trabalho foi orientado por dois tipos de preocupações: (a) clarificação do significado de conjectura e (b) aperfeiçoamento da formulação da conjectura verbalizada por Alda de modo a garantir a clareza e correcção do enunciado.

As intervenções correspondentes aos §6, §8, §14 e §16 são ilustrativas da primeira preocupação. Com efeito, quando escuta as palavras de Alda "E concluí" (§1) procura compreender e tornar visível para a turma o significado atribuído pela aluna à expressão (§6). A palavra "concluí", num contexto em que está em jogo a análise de uma relação intuída a partir da observação de casos particulares, é problemática, na medida em que pode reforçar a ideia de que esta relação é válida, para a generalidade dos casos, mesmo na ausência de um processo de justificação. Através do pedido que dirige a Alda, Anita parece querer trazer à tona possíveis ambiguidades escondidas em "concluí", para poder ajudar a turma a compreender o carácter provisório das conjecturas. Este carácter é reforçado através de várias intervenções subsequentes (por exemplo, §14 e §16).

A preocupação com o aperfeiçoamento da formulação da conjectura é visível desde o início do episódio (§4, §12, §14). Alda, ao comunicar o que descobriu, omite algumas informações, nomeadamente que o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum estão a ser calculados para pares de números e que os pares devem manter-se quando, em cada caso, se efectuam os produtos referidos. São estes aspectos que Anita procura fazer emergir. Neste âmbito, o registo no quadro que solicita (§19) é um meio que contribui para que surjam novas oportunidades de discussão, através das quais procura que os alunos se apercebam que, em termos matemáticos, não tem sentido falar, apenas, em máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum e que, quando estes se calculam, é importante manter os números para que possa existir a igualdade referida na formulação da conjectura. Com efeito, quando Alda e Paulo concluem o registo, constata que na formulação da conjectura persiste a não explicitação dos referidos aspectos e intervém no sentido de procurar que os verbalizem (§38). A fala de Maria (§39), que por iniciativa própria entra na conversação, parece ter funcionado como um recurso que lhe é particularmente útil para atingir o objectivo que pretende. Procura dar-lhe visibilidade (§40) e tenta que os alunos que estão no quadro e, em geral, a turma, foquem a atenção no que diferencia esta contribuição do enunciado registado (§42, §45). O diálogo prossegue nesta linha até a conjectura ser reescrita numa forma mais detalhada e precisa.

Durante a sessão de reflexão sobre a aula de 14/3, Anita não se debruça sobre o episódio *De outros dois números quaisquer?* e sua continuação. Só vem a fazê-lo no âmbito da quarta entrevista em que, por iniciativa própria, o aborda. O que diz, ao desvelar intenções que estiveram subjacentes à discussão que procurou que existisse neste momento da aula, permite apoiar algumas das ideias que apresentei:

> Tudo isto tinha a ver com o produto do máximo divisor comum pelo mínimo múltiplo comum de dois números ser igual ao produto dos números ou desses dois números. Lembras-te? Isto é bastante diferente em termos de consequências (...) Porque o que estava ali em causa não era só o português, não era uma vírgula a mais ou a menos. São as consequências que isso tem. Estar escrito de uma maneira ou de outra são coisas distintas mesmo. (E4, p. 16)

Criando uma situação para destacar o carácter provisório das conjecturas

É a indagação de qual o posicionamento da turma quanto à validade da conjectura registada no quadro, que dá origem a uma situação que permite destacar o carácter provisório das conjecturas. As respostas de vários elementos, entre os quais Júlia, denotam que a consideram verdadeira. O episódio *Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer*?, bem como as reflexões que Anita sobre ele apresenta, revelam como lidou com este posicionamento e ilustram intenções subjacentes a opções que tomou.

Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer?

1. Anita *(dirigindo-se à Júlia):* Mas tens a certeza porquê?
2. Júlia: Porque verifiquei para os três casos.
3. Anita: Não chega. Eu ponho a seguinte questão. Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer? Testem *(escreve no quadro "3 números quaisquer").* Agora quero que vocês testem para três, e testem com estes, por exemplo *(escreve no quadro 3,5,7)*. Façam lá para estes. Vá testem...

Os alunos iniciam o trabalho nos seus lugares e a professora circula pela sala.

4. Anita: Façam lá para estes e podem fazer para estes *(escreve no quadro 6,7,5)*.

Os alunos prosseguem o trabalho de pares. Alguns copiam o que está no quadro. Outros trabalham na tarefa que lhes foi proposta. Outros conversam com os colegas de mesa mas parecem não estar focados na tarefa. A professora circula pela sala observando a sua actividade e, por vezes, interage com alguns alunos.

5. Anita *(para a turma)*: A Júlia já disse que com 3,7 e 5 dá.
6. Vários alunos: Dá.
7. Anita: E com 6,7,5?

(TA 14/03/02, pp. 7-8)

É o pedido de justificação da posição expressa por Júlia (§1), que permite trazer à tona a ideia de que a fundamentação da veracidade da conjectura se baseia na sua verificação para alguns casos. Este movimento é favorável para a fundamentação vir a ser instituída como objecto de análise comum e, simultaneamente, proporciona uma abertura para Anita apresentar uma questão que pode contribuir para a pôr em causa: "Já tinha pensado antes e tinha decidido introduzi-la [a questão do §3] caso fosse necessário. (...) E foi" (TST 15, p. 4). Decide lançá-la porque, tal como Júlia, havia outros alunos que "estavam a pensar que, como tinham verificado para três pares de números, a conjectura era válida. Já chegava, pronto... " (TST 15, p. 5). O "desafio" relativo ao teste da conjectura num universo diferente daquele que permitiu formulá-la, tem precisamente por objectivo ajudar a turma a rever esta concepção de prova:

> Digo não chega e ponho a seguinte questão. Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer? Isto, no fundo, é um desafio. Portanto, eu lanço um desafio para eles verem que não chega verificar-se para três casos, para que noutras situações não caiam na "esparrela" (risos).(...) Estou a tentar criar uma situação que os leve a rever essa ideia de prova... (TST 35, p. 2, 28/09/02)

No âmbito da exploração deste desafio, Anita toma três decisões principais. Opta, antes de mais, por ser ela própria a apresentar três casos de ternos de números que os alunos devem começar por testar. Dois destes casos podem ser observados no episódio *Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer?* (§3 e §4). Um pouco mais tarde apresenta um outro: 2,3,5. Esta decisão foi orientada por dois tipos de intenções. Em primeiro lugar pretende que os alunos, no início do teste da conjectura, tenham uma experiência análoga à que tiveram quando a formularam e, deliberadamente, escolhe três exemplos que também a verificam: "Os três exemplos foram escolhidos a dedo para resultarem (risos), para eles verem que aquela conjectura também se verifica para três casos..." (TST 15, p. 16). Tendo tido esta experiência, ao confrontarem-se, mais tarde, com casos que a contrariam, poderão, do seu ponto de vista, aperceber-se melhor das limitações do raciocínio indutivo: "E porque se verificou para alguns casos já está provado? E deu para jogar um bocado com eles, não é? E vemos depois que não dá para todos" (idem). Em segundo lugar, Anita sabe que no conjunto constituído por ternos de números naturais, para a conjectura ser válida não é necessário que os três números de cada terno sejam primos: "Basta que sejam primos entre si dois a dois" (idem, p. 21). Assim, tenta evitar que os alunos possam ser induzidos em erro e inclui, propositadamente, num dos exemplos que escolhe, um número não primo: "Lá estava aquele 6 ali de propósito" (idem, p. 22).

A segunda decisão prende-se com um investimento de tempo superior ao previsto na exploração do desafio que, tal como a terceira, foi significativamente influenciada pelo decurso da actividade da aula: "A opção de dar muito mais tempo foi tomada na altura em função das dificuldades que houve logo ali com aqueles dois casos" (TST 15, p. 15). Perante estas dificuldades e porque pretende que os alunos se "apropriem bem" da ideia de que os exemplos não bastam para provar conjecturas, opta por lhes dar "mais tempo" para reflectirem, esperando, em especial, que venham a descobrir que há casos para os quais a conjectura falha, o que veio a acontecer:

> Eu achei que havia ali necessidade quer seja de introduzir o tal caso com três números, que isso eu já levava na manga, quer seja de deixar estar mais tempo para ver se, no fundo, eles se apropriam bem daquilo, pelo menos os que… (…) Da necessidade de que, pronto, três, ou quatro ou cem ou mil não chegam para provar uma conjectura... eu queria que eles se apropriassem bem, porque, às tantas, se eu fosse ali tomar um bocado o pulso... (TST 15, p. 15)

> E também achei que poderia insistir aí um bocado para eles verem que falhava. Optei por perder ali tempo, percebes? (...) E até foi útil porque lá está, convém que apareça um caso onde falhe e apareceu. (TST 15, p. 4)

A terceira decisão decorre de uma actividade desenvolvida pelos alunos durante o trabalho que se segue ao episódio *Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer?*, que os desvia do propósito do desafio lançado por Anita (§3): "Depois começaram-se a formular conjecturas e isso tu deves ter-te apercebido... E alguns teimavam em ficar nas conjecturas!... (risos)" (TST 15, p. 5). Durante o trabalho de pares subsequente a este episódio e também em resposta a intervenções dirigidas à turma, Anita dá-se conta que alguns alunos começam a formular conjecturas relacionadas com a relação entre o máximo divisor e o mínimo múltiplo comum para ternos de números. Decide reencaminhar a turma para a questão em análise e remeter para um momento posterior a exploração deste tipo de raciocínios: "E eu aí optei por conduzir. Depois há uma certa altura onde eu peço... mando para casa" (idem). A análise das suas reflexões permite identificar elementos cuja conjunção pode contribuir para perceber onde se fundamentou esta decisão. Vários destes comentários deixam transparecer a existência de preocupações relacionadas com a compreensão, por todos os alunos, da actividade matemática que se desenvolve na aula:

> É que alguns tentam formular conjecturas e ir por aí... Como tu viste há alunos mais fracos, não é? E se alguns já se estavam a perder sem ir... se tivesse ido, então!!!... (risos) Ainda se dispersavam mais... Foi uma opção, percebes? Tentei levá-los outra vez para o mesmo sítio. (...) Decidi não avançar por ali e deixar para casa. (...) Lá está, porque é assim: como eu tenho alunos muito fracos e aquela questão já estava um bocado, digamos assim, alongada, se eu começasse

> agora a discutir mais uns casos que servem e outros que não servem, alguns não vão perceber, não acompanham. Já estava a ser difícil focarem-se numa... Com outros que estão com outras ideias, e que são raciocínios válidos, bons e óptimos, mas que baralham, ainda mais, os mais fracos. (TST 15, pp. 5-6)

Ao avaliar se para a turma é inteligível a actividade matemática da aula, Anita considera que há elementos, os "alunos mais fracos", para quem está a ser difícil focar-se, acompanhar e entender esta actividade. Porque receia que estas dificuldades se agudizem, decide não inflectir o rumo de modo a enquadrar a possibilidade de exploração dos raciocínios que estavam a ser feitos por outros elementos cujo desempenho matemático é, na generalidade, muito superior ao destes alunos.

Outros comentários revelam que a decisão foi, também, influenciada pelo valor que atribuiu aos raciocínios dos alunos e pela necessidade de tempo que pensa requererem. Analisando-os, conclui que "era pena que se perdesse o que estavam a fazer" (TST 15, p. 23) e procura identificar ocasiões que lhes permitam começar a actividade de formulação de conjecturas com ternos de números ou aprofundar a que tinham iniciado. Porque esta "já seria outra questão em que eles teriam mesmo que pensar e reformular bem a linguagem" (idem, p. 22) e sobre a qual "queria que eles reflectissem melhor" (idem), apoia-se nas ideias apresentadas durante a aula e cria uma nova questão que regista no quadro e que remete para trabalho de casa: "Será que a vezes b vezes c é igual ao mínimo múltiplo comum entre a, b e c vezes o máximo divisor comum entre a, b e c para algum tipo de números com características especiais?" (TA 14/03/02, p. 14). Mais tarde inclui esta questão numa ficha de trabalho e solicita aos alunos que, durante as férias da Páscoa que estavam à porta, reflictam sobre ela e que lhe entreguem a resolução por escrito: "Vamos lá ver se eles pensam nisso durante as férias, que eu mandei-os pensar... (...) E pedi para me entregarem. Agora vamos ver se entregam..." (TST 15, p. 22).

Para focar a atenção da turma no desafio com ternos de números, Anita

- regista no quadro o que denomina por nova questão: "Nova questão: Será que axbxc = mmc(a,b,c) x mdc(a,b,c) para quaisquer três números inteiros positivos a,b,c?" (TA 14/03/02, p. 9),
- faz um ponto de situação em que relata o trabalho realizado pelos alunos com pares de números: "Ora bem, vamos lá fazer aqui um ponto da situação. O que está aqui em questão é o seguinte. (...)" (idem, pp. 9-10),
- coloca diversas questões através das quais procura que evoquem o que tinham dito sobre a veracidade da conjectura formulada para pares de números e o que aconteceu quando a testaram com os ternos que lhes indicou,
- e tenta "provocar" os alunos com a intenção de os incentivar a posicionarem-se em relação à validade da conjectura quando se consideram ternos de números:

> Aqui quando digo: *Já fizeste aquele? E então? Faz lá*... E depois para a turma: E então? *Então será que já posso concluir que aquela conjectura é válida para três? Já fiz para três casos também... Será que posso?* Aqui estou a picá-los, a provocá-los[61]... (TST 35, p. 5)

É Renata quem indica que não pode concluir-se que a conjectura é válida para todos os casos. Anita solicita-lhe que justifique a sua posição, mas a aluna fala em voz muito baixa e o que diz não é perceptível pela grande maioria dos elementos da turma:

> Ela [Renata], realmente, diz-me, ela justifica, realmente. Encontra um caso que não dava... Não serve, para justificar para todos, só para alguns casos. No fundo, arranja um contra-exemplo e, portanto, aquilo não era válido para todos. (...) O que ela faz é assim: encontra um caso e diz-me: *Experimentei com três números, só um é que era primo e não deu e portanto aquilo falha*. Mas aqui é que não se ouve mesmo nada. (TST 15, p. 40)

Apesar dos esforços de Anita, Renata não se expressa de forma audível, nem mesmo quando lhe solicita que vá ao quadro apresentar o caso descoberto que

[61] O verbo "provocar" significa, para Anita, "arranjar uma maneira de dizer as coisas de outro modo para ver se a pessoa reage respondendo com alguma coisa ou se alguém entra reagindo a" (E4, p. 9).

contraria a conjectura. Em determinada altura, a professora opta por ser ela própria a própria a focar a atenção da turma neste caso e nos registos a ele associados que a aluna tinha feito no quadro. Começa por relatar o trabalho realizado e, em seguida, procura salientar que a igualdade entre o produto dos números e aquele que se obtém quando se multiplica o seu mínimo múltiplo comum pelo seu máximo divisor comum, neste caso, não se mantém. Para o efeito recorre a uma questão, através da qual, embora sem explicitamente o dizer, tenta que a turma compare estes produtos — "(...) e o que é que aconteceu?" (TA, 14/03/02, p. 13) — e à repetição da resposta de uma aluna que destaca através do tom de voz que usa.

Tendo dado visibilidade a que os produtos são diferentes, Anita procura que os alunos usem esta informação para tomarem uma decisão relativamente à validade da conjectura quando se consideram ternos de números. No entanto, esta tarefa parece levantar-lhes algumas dificuldades. De início não respondem às questões colocadas. Não é, no entanto, perceptível se o seu silêncio se enraíza na incompreensão do conteúdo das perguntas, na incapacidade de mobilizarem a informação expressa para se posicionarem quanto à validade da referida conjectura ou noutros factores. Passado algum tempo, começam a surgir algumas contribuições incluídas no episódio *Olhem lá, eu aqui digo que é válido só para alguns?* que encerra a segunda parte da aula.

Olhem lá, eu aqui digo que é válido só para alguns?

1. Anita: Aah! Olhem lá, eu aqui digo que é válido só para alguns?
2. Alunos vários: Não.
3. Anita: O que é que eu digo aqui? (*aponta a palavra "quaisquer" incluída na "nova questão" que se encontra registada no quadro*)
4. Alunos: Para quaisquer
5. Anita: Para quaisquer três números. Se eu digo para quaisquer três números, mesmo se eu dissesse isto *(tapa a palavra "quaisquer"),* se não dissesse mais nada já é para quaisquer (*aponta para a "nova questão" escrita no quadro*). Se serve para alguns ternos de números mas existe um *(ênfase)* para o qual falha, é válido para todos?
6. Alguns alunos: Não.
7. Anita: Então, o que é que se pode escrever?
8. Aluna: Para alguns é que é válido.

9. Anita: Eu pergunto é só se é verdadeira ou falsa uma conjectura formulada assim.
10. Alguns alunos: Falsa
11. Anita: Se eu digo para quaisquer, ou se eu não disser mais nada é porque estou a dizer que é para quaisquer, então se falhar... basta que falhe para um único terno, o que é que se pode concluir?
12. Vários alunos: Que é falso.
13. Anita: Que é falso. Pronto. Então aqui posso dizer o quê? (*aponta para a nova questão indicada no quadro*) Que é falso (*regista a resposta no quadro*). Agora em casa, para TPC, é que vocês podem pensar nas tais conjecturas que vocês estavam já a tentar baralhar com a resposta em relação a isto (*aponta para a nova questão escrita no quadro*) em que a questão é para quaisquer. Agora vou fazer uma nova: Será que *a* vezes *b* vezes *c* é igual ao mínimo múltiplo comum entre *a*, *b* e *c* vezes o máximo divisor comum entre *a*, *b* e *c* para algum tipo de números com características especiais? *(vai registando a questão no quadro à medida que a enuncia: TPC: Será que axbxc = mmc(a,b,c) x mdc(a,b,c) para algum tipo de números?)* Isto, vocês agora é que podem pensar. Agora, pergunto eu... Se a gente viu isto em que um caso falha, será que a partir destes três *(aponta para 10,15; 12,20; e 4,6)* eu poderei dizer que aquela conjectura é verdadeira? (*aponta para a conjectura escrita pelo Paulo no quadro com o apoio da Alda*).
14. Vários alunos: Não.
15. Anita: Chega?
16. Vários alunos: Não.
17. Anita: Quem é que me diz a mim se não sei onde não haverá mais dois números que... o quê?
18. Alunos: Falha.
19. Anita: Para os quais aquilo falha... Por isso é que aquilo é só uma conjectura.

(TA 14/03/02, pp. 13-5)

A primeira intervenção de Anita (§1), surge na sequência de uma resposta de Maria — “Por enquanto falhou só para um” (TA 14/03/02, p. 13) — e de alguns elementos da turma terem indicado que a conjectura não é válida. A professora considera, fruto de conhecimento que lhe advém de várias outras situações em que propôs à turma “questões só com a utilização de quantificadores” (TST 15, p. 46), que vários alunos não têm uma compreensão clara e profunda das diferenças que existem entre os significados de expressões do tipo “ser para quaisquer” e “ser só para alguns”. Do seu ponto de vista, para os alunos “perceberem bem (...) uma conjectura formulada assim" (idem, p. 28), "o maior problema, para eles, são mesmo os quantificadores" (idem).

Ao confrontar-se com a resposta de Maria, Anita parece evocar o seu conhecimento sobre estas dificuldades dos alunos e preocupa-se, antes de mais, com a inteligibilidade da questão dos quantificadores ou seja, neste caso, em reforçar e destacar que a "nova questão" registada no quadro e que traduz o desafio que lançou, foi formulada para quaisquer ternos de números: "Tanto que eu reforço, não sei se tu vês, reforço o facto de ser para quaisquer e não ser só para alguns... (TST 15, p. 28)"; "Estou outra vez nos quantificadores, a tentar reforçar essa parte com eles" (idem, p. 46). Neste âmbito salienta, através da pergunta que coloca (§1), que o seu enunciado não inclui a expressão "só para alguns", procura dar visibilidade à palavra "quaisquer" que aí aparece (§3, §5) e clarifica que a generalização da conjectura a todo o domínio considerado se manteria mesmo na ausência explícita desta palavra (§5, §11). E porque considera que, para os alunos, o "maior problema" são mesmo os quantificadores, lamenta não ter submetido ao escrutínio da turma uma contribuição para que se gerasse uma nova oportunidade de discussão aí focada, mesmo considerando que já trabalhou este aspecto em várias outras situações:

> Aqui há uma coisa que eu, se calhar, deveria ter desenvolvido mais. (...) Ouço dizer: *Para alguns é válido* [§8]. E eu pergunto só se é verdadeira ou falsa uma conjectura formulada assim [§9]. (...) E escrevi aqui assim: podia ter agarrado e pedir, se calhar, aos outros para comentarem aqui outra vez... (...) Podia ter usado para reforçar mais aqui, outra vez, a diferença entre o "para quaisquer" e o "para alguns"... Escapou!... (…) Mas é que já é tantas vezes, percebes, que às tantas... Mas acho que devia ter pedido. (TST 15, p. 46)

No episódio *Olhem lá, eu aqui digo que é válido só para alguns?* transparece, por outro lado, a preocupação com a compreensão, pela turma, de que basta um único exemplo para invalidar uma conjectura (§5), ou seja, com o entendimento do conceito de contra-exemplo. Quando Anita obtém de alguns alunos a indicação de que a conjectura é falsa (§10), procura reforçar e destacar esta ideia através de uma questão análoga (§11) a outra já colocada que leva mais alunos a expressarem-na (§12) e, também, através da sua repetição: "Repito depois para reforçar e destacar também" (TST 35, p. 7). Na aula em análise, Anita, ao dirigir-se a toda a turma, não utilizou a designação "contra-exemplo". No entanto, uma das suas intervenções anterior ao episódio supramencionado leva a supor que já a usou noutras ocasiões: "(...) Como é que vocês provavam se fosse mentira [a conjectura formulada para pares de números]? (...) Bastava encontrar um quê? Eu uso aquele nome esquisito que é um..." (TA 14/03/02, p. 4).

Na parte final do episódio, retoma a conjectura resultante do aperfeiçoamento da enunciada por Alda e procura que os alunos usem a experiência relativa ao seu teste com ternos de números para se posicionarem em relação à veracidade desta conjectura (§13, linhas 12-5). Contrariamente ao que antes aconteceu, neste momento há vários elementos da turma que enunciam respostas reveladoras de terem deixado de considerar a conjectura verdadeira (§14).

Os movimentos subsequentes de Anita, parecem ter sido orientados por dois objectivos intrinsecamente ligados: destacar que a verificação de uma conjectura por alguns exemplos não basta para garantir a sua veracidade (§15, §17, §19 linha 1) e salientar a provisoriedade inerente ao próprio conceito de conjectura (§19 linhas 1-2).

Problemas experienciados

E depois os alunos começam a avançar com conjecturas! E eu não queria dizer nada, nem queria que fossem lá...

Como anteriormente referi, há momentos na aula em que alguns alunos fazem afirmações que Anita interpreta como constituindo a formulação de novas conjecturas e em que opta por "conduzir" (TST 15, p. 5) a turma para o teste da conjectura, enunciada para pares de números naturais, usando ternos de números. O episódio *Com três só dá se forem primos*, que constitui o primeiro destes momentos, permite ilustrar o modo como a professora lidou com a situação, o que é útil para compreender, em particular, o significado que, neste contexto, atribui à palavra "conduzir".

Com três só dá se forem primos

1. Júlia: Com três só dá se forem primos.
2. Anita: Primos? (*sublinha o 6 registado no quadro*)

Ouvem-se alguns "não"

3. Roberto: O seis não é primo.
4. Anita *(para a Júlia)*: Este também é primo? (*aponta para o seis*)
5. Júlia: Não. Só dá se forem primos, os três.
6. Anita *(falando para a Júlia)*: Este *(aponta para o 6)* também é primo?

A Júlia, que está muito perto do quadro junto do qual a Anita se encontra, continua a falar em voz baixa para a professora mas a sua intervenção não é perceptível. A professora escreve no quadro 2,3,5. Dirige-se à Júlia e conversa com ela. Antes de se deslocar para junto de outros pares, ri-se e faz-lhe uma carícia. Os alunos continuam o trabalho nos lugares (...).

(TA 14/03/02, p. 9)

A exploração de ternos de números com vista à formulação de conjecturas não fazia parte da agenda que tinha estabelecido para esta aula. Nessa medida, a resposta de Júlia (§1) constitui um factor inesperado. Anita, no entanto, não a descarta referindo, por exemplo, que este não tinha sido o trabalho solicitado. Em lugar disso, institui-a como objecto de atenção e assume, ela própria, o papel de focar a atenção da aluna no caso, registado no quadro, que permite invalidar a conjectura que começa a esboçar-se (§2, §4, §6).

Este episódio ocorre cerca de cinco minutos após o início do teste da conjectura. Anita encontra-se muito próxima de Júlia que se expressa num tom de voz não muito audível. É plausível que vários colegas da turma não tenham ouvido este diálogo. Por esta razão, ou não, mais tarde Maria, expressa, de novo, a ideia apresentada por Júlia e o modo de agir de Anita tem paralelismos com o revelado no episódio *Com três só dá se forem primos*. Também aí, ao solicitar a Maria que reefectue os cálculos relativos a um dos ternos indicados no âmbito do desafio, assume o papel de a encaminhar para o exemplo que põe em causa a ideia apresentada.

Na sessão de reflexão dedicada à aula em análise que ocorreu cerca de duas semanas após a sua leccionação (sessão de trabalho 15), Anita foca-se, globalmente, nas várias ocasiões em que alguns alunos "tentam formular conjecturas e ir por aí..." (TST 15, p. 5), onde inclui o episódio. Quando, em particular, se debruça sobre ele, não comenta, especificamente, as suas intervenções, embora descreva o trabalho de Júlia: "Estava a formular com os dois primeiros [casos] mas não tinha feito bem um e com um número não primo falhou" (TST 15, p. 22). O comentário surge, mais tarde, no âmbito da preparação do grupo de discussão realizado no ProfMat. As suas palavras permitem, por um lado, reforçar a ideia anteriormente expressa de que, subjacente à decisão que tomou, estiveram preocupações relacionadas com a dispersão dos alunos e a compreensão, por todos, da actividade matemática que se desenvolve na aula. Por outro lado, revelam que não questionar as ideias apresentadas por Júlia, poderia, na sua perspectiva, contribuir para reforçar a concepção, que sabia ser partilhada por vários elementos da turma, de que para garantir a validade de uma afirmação para o caso geral basta que ela se verifique por alguns exemplos:

> Eu disse *Este também é primo?* para eles não se dispersarem e também se deixasse estávamos a incorrer no mesmo erro. A Júlia diz que se forem três números só dá se forem primos e não está a dar a esta afirmação o estatuto que eu pretendia. Está a fazer uma afirmação que podia ser encarada como do mesmo tipo da outra, ou seja, uma afirmação que também estava a ser validada a partir de exemplos. (TST 35, p. 3)

O referido comentário permite, ainda, evidenciar que uma das questões com que Anita se confrontou nas várias ocasiões em que os alunos expressaram ideias relacionadas com a formulação de conjecturas, foi a de se deveria, ou não, remeter para a turma a análise dos raciocínios que estavam a ser feitos:

> A questão aqui foi o decidir, entre as várias situações que surgem, o que fazer com o que eles dizem, se lançar para a turma ou não... Neste caso achei que era melhor não para os alunos não se dispersarem. (TST 35, p. 4)

A questão referida neste extracto não é, explicitamente, abordada por Anita na sessão de trabalho do grupo de pesquisa em que, pela primeira vez, partilhou as suas reflexões sobre a aula em análise. No entanto, algumas das considerações que tece deixam transparecer que ela se lhe colocou durante a aula e, simultaneamente, parecem revelar que não foi simples decidir o que fazer face às conjecturas que começaram a surgir:

> E depois os alunos começam a avançar com conjecturas! Ainda por cima sabia que eles poderiam chegar à tal que eu queria que eles chegassem, que é a melhor, a mais forte... (...) Que basta que sejam primos entre si dois a dois, percebes? E eu não queria dizer nada, nem queria que eles fossem lá... Se eu fosse por aí ainda teria, se calhar, que levar um bocadinho mais de tempo, não é? Já está lá o exemplo que motivava isso que era o tal que tinha o seis... (TST 15, p. 23)

As palavras da professora revelam uma certa hesitação. A expressão "não queria dizer nada" é, de certo modo, ambígua. No entanto, considerando o contexto em que surge, pode conjecturar-se que ela traduz o desejo de não limitar a possibilidade dos alunos chegarem à conjectura "mais forte", tanto mais que considera que seriam capazes de o fazer e tinha apresentado um terno que o "motivava". Esta interpretação é reforçada quando se constata que Anita, ao avaliar os seus raciocínios, refere que "são raciocínios válidos, bons, óptimos" (TST 15, p. 6), o que é indiciador do valor que lhes reconhece. Aceitar esta possibilidade interpretativa conduz a considerar que, por um lado, a professora desejava que os alunos não abandonassem os caminhos que estavam a trilhar; por outro lado, não queria que os prosseguissem — "nem queria que eles fossem lá" — pois implicaria, do seu ponto de vista, investir mais tempo da aula no que, nas suas palavras, era uma "questão [que] já estava um bocado, digamos assim, alongada" (idem), o que poderia agravar o risco de alguns elementos da turma se dispersarem.

A existência da referida hesitação e das dúvidas com que Anita se confrontou, é reforçada quando se analisam as palavras que proferiu, a propósito das conjecturas que os alunos começaram a formular, durante a quarta entrevista:

> E, às tantas, comecei a andar entre o vou ou não vou para aqui ou para ali: por um lado podem dispersar, um diz isto e outro aquilo, por outro lado se não deixo ir por aqui não sei quê... Depois acabei por mandar para casa... (E4, p. 17)

Júlia não atribuiu à afirmação feita o estatuto de conjectura, o que não é de estranhar. Foi a aluna que justificou que a conjectura formulada para pares de número era verdadeira porque, nas suas palavras, "verifiquei para três casos" (§1, episódio *Será que uma conjectura deste tipo será válida para três números quaisquer?).* Considerar a sua ideia sem correr o risco de reforçar esta concepção de prova, passava, por exemplo, por ser a professora a atribui-lhe esse estatuto. Pelo seu discurso na sessão de trabalho situada proximamente à leccionação da aula, não é claro se, no decurso da actividade desenvolvida, esta ideia lhe ocorreu, ou não, e, consequentemente, se a decisão de não o fazer foi deliberada e conscientemente tomada. Na quarta entrevista Anita refere que o poderia ter feito. O que diz leva a supor que esta foi uma possibilidade pensada na altura que foi excluída pelos riscos de dispersão que acarretaria. Pode, no entanto, traduzir, também, uma reconstrução da história vivida transformada pela existência de novas perspectivas sobre a organização e gestão de aulas em que os alunos se envolvem em processos de descoberta e justificação de conjecturas:

> Lembras-te que há uns que começam a dizer: *Ah, só dá se os números forem primos*, o que era mentira e acabo por dizer eu, mas pronto. Era primos entre si. Podia ter escrito essa conjectura, mas depende se isso ia fazer dispersar mais ou não. O que eu acho que falhou aqui foi o tal ponto de situação, porque como já estava tudo também mais disperso, eu ainda tive mais medo de que o facto de introduzir mais conjecturas fosse dispersar ainda mais (E4, p. 17).

E no meio daquilo tudo, mesmo já depois dos contra-exemplos e tudo...

Na altura em que foi proposta a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*, a justificação da conjectura formulada pelos alunos para pares de números "não lhes fazia falta" (Anita, TST 35, p. 8). Nas palavras de Anita, "eles já estavam convencidos" (idem) da sua validade pelo que "tinha que ser eu a motivar, a levar para aí" (idem). O desafio que lançou à turma e a opção de "dar muito mais tempo" (TST 15, p. 15) para que se "apropriassem bem" (idem) da ideia de que a prova de uma conjectura não pode ser obtida a partir da sua verificação por alguns exemplos, foram os recursos de que se serviu para os ajudar a sentir a necessidade de provar as conjecturas que não refutam.

Anita evoca, a propósito da aula em análise, a actividade desenvolvida com os alunos da outra turma que lecciona (8ºC), a quem também propôs a mesma tarefa, mas com quem o modo de trabalhar foi diferente: "Conduzi mais rapidamente, percebes? (…) Toda a aula. Tomei mais pulso, digamos assim. Perguntei mais (…) Não lhes dei tanto tempo… [para trabalharem sozinhos]" (TST 15, p. 7). Quanto a estes alunos refere não ter tanto a certeza, como tem relativamente aos envolvidos no projecto (8º A), de que interiorizaram a necessidade de provar a conjectura:

> No 8º C, como eu ajudei, estás a ver... Não tenho, se calhar... Aqui [8º A] espero ter... Pelo menos penso que tenho mais a certeza, que eles interiorizaram a necessidade de provar a conjectura. (…) No 8º C não tenho tanto... Pronto, penso... Não sei... Mas não tenho tanta certeza. (TST 15, p. 16)

A maior certeza de que Anita fala em relação aos alunos do 8º A, não é uma certeza absoluta. É, antes, uma intuição e, simultaneamente, uma expectativa que lhe advém do tempo de reflexão que lhes proporcionou: "Espero que estes tenham sentido mais. Pelo menos dei-lhes tempo para eles sentirem... quer dizer, para reflectirem..." (TST 15, p. 16). Não tem esta intuição relativamente a todos os alunos da turma: "Todos não foram de certeza..." (idem, p. 30). Admite, mesmo, que "pode haver algum que se perdeu" (idem, p. 29). No entanto, intui que "os tais, alguns alunos..." (idem, p. 29), referência implícita a um grupo em que inclui Maria, Renata e Júlia, sentiram a necessidade da prova.

Quando interpelo Rebeca sobre a sua intuição, ao observar a aula, relativamente à apropriação, pelos alunos, da necessidade de justificarem a conjectura formulada para pares de números, refere: "É assim, eu não tenho tanto a certeza se eles ficaram com esse *feeling*... (risos)" (TST 15, p. 17). Numa certa altura da aula, concretamente na sequência imediata do episódio *Olhem lá, eu aqui digo que é válido só para alguns?*, considerou que "ficou clara a necessidade da prova" (Rebeca, idem). No entanto, posteriormente, o modo de agir de alguns alunos fê-la ter "dúvidas" (idem, p. 18): "Fiquei com a sensação de que aquela ideia com que eu tinha ficado lá atrás, que tinha ficado perfeitamente clara, (...) se calhar não tinha ficado tão clara quanto isso" (idem, p. 17).

Estas dúvidas contribuíram para que, ao longo da sessão de reflexão e enquanto analisávamos episódios a partir do registo em vídeo, dedicássemos uma atenção especial a este aspecto. A troca de ideias resultante contribuiu, não só para reforçar a sua pertinência, como possibilitou iluminar a perspectiva de Anita sobre onde se enraízam as dificuldades dos alunos relativamente à compreensão da necessidade de justificarem conjecturas.

É no facto de não entenderem, com profundidade, as diferenças de significado entre artigos indefinidos e artigos definidos e entre expressões do tipo "para quaisquer" e "existe pelo menos um" ou "só para alguns" — que traduzem, do ponto de vista de Anita, uma "falta de *feeling*" em relação aos quantificadores — que localiza uma parte crucial das dificuldades relacionadas com a incompreensão da necessidade da prova:

> No fundo, quando eu estou a tentar justificar coisas, do que eu sinto uma grande falta é disso [quantificadores] e dos artigos definidos e indefinidos... Sinto uma grande falta, no fundo, de traquejo deles aí, percebes? E eu comento muito, mas mesmo muito... Tanto que no outro problema que vinha a seguir eu digo *Determina um valor de x sabendo que não sei quantos, tal que*... (...) Eu reforço muito bem o facto de dizer "um". Digo-lhes: " *Reparem que eu digo "um" e não "o". Se eu dissesse "o" era só um, se eu digo "um" é porque existe mais do que um*... Percebes? E eu acho que nesta coisa dos quantificadores, é que eles têm muita falta de *feeling*... Eu acho que é isso... (TST 15, p. 28)

O não entendimento das referidas diferenças enraíza-se, segunda Anita, em incompreensões da língua materna. Se os alunos as entenderem em português, poderão, na aula de Matemática, aperceber-se que o "para quaisquer", subjacente, por exemplo, à formulação da conjectura para pares de números, é importante e, através desta via, compreenderem a necessidade da prova ir para lá da sua verificação para casos particulares:

> Porque isto não é um preciosismo da Matemática... Ou seja, o facto de haver uma conjectura... não somos nós por sermos de Matemática... Porque, no fundo, está o português lá. E o essencial disto é mesmo o português, quanto a mim... (...) Ali o *feeling* é o "para quaisquer", "para todos"... Estás a perceber? (...) É o *feeling* da necessidade de "para quaisquer" e da diferença em relação a "existe pelo menos um"... (TST 15, pp. 28-9)

A preocupação de Anita em tornar inteligível para os alunos a questão dos quantificadores é recorrente e extravasa as próprias aulas de Matemática: "E eu passo a vida nisto, percebes? (...) É essa parte que eu levo a vida a batalhar. Mesmo até no Estudo Acompanhado. Aproveito algumas coisas e comento..." (TST 15, pp.

28-29). A importância que atribui a esta questão e ao papel que a língua materna pode ter na sua compreensão surge, de novo, quando, ao procuramos localizar as contribuições dos alunos que originaram as dúvidas expressas pela colega, Anita se debruça sobre interacções que estabeleceu com alguns dos elementos da turma enquanto tentavam justificar a conjectura:

> E no meio daquilo tudo, mesmo já depois dos contra-exemplos e tudo... Eu não sei bem em que altura foi, mas a alguns eu tive que dizer, para eles sentirem o facto de que verificar-se algumas vezes não prova, uma coisa que eu digo muitas vezes... Não sei se ouviste.... É: *Se eu disser vou à praia todos os dias, quando é que isto é mentira?* Mas isto eu digo muitas vezes, não foi só aqui... Estás a perceber? Eu continuo a dizer que os quantificadores... (TST 15, p. 45)

Para ajudar alguns alunos a compreenderem que o verificar-se algumas vezes não constitui uma prova, Anita recorre a um exemplo do dia-a-dia: "o exemplo da praia". É através dele que procura clarificar a noção de contra-exemplo. Subjacente a este modo de agir, está a perspectiva de que para os alunos aprenderem a "sentir a importância do ser 'para todos' e do 'existe pelo menos um', ou 'alguns'..." (TST 15, p. 45) não é imprescindível que o professor lhes ensine noções de lógica no sentido mais formal do termo: "Não precisam de ser lógica, que eu às vezes até lhes digo que é uma coisa que eles já não dão, que é formal" (idem). O que é fulcral é conseguir que entendam "que o que eles usam no Português, em que até interpretam, têm que aplicar aqui... têm que sentir que é fundamental na Matemática" (idem).

Como contexto introdutório ao "exemplo da praia", profere a frase: "E no meio daquilo tudo, mesmo já depois dos contra-exemplos e tudo...". Nesta frase parece transparecer a ideia de existirem alunos, nomeadamente aqueles a quem teve que apresentar este exemplo entre os quais se inclui Júlia, para quem o teste da conjectura num domínio constituído por ternos de números e posterior constatação da sua não validade neste domínio, não foi suficiente para compreenderem a necessidade de provar a conjectura para pares de números. De algum modo, esta ideia parece ir ao encontro das dúvidas expressas pela colega pelo que poderá interpretar-se como uma abertura à sua plausibilidade. Esta plausibilidade é reforçada quando Rebeca, procurando fundamentar as suas dúvidas, foca a atenção no facto de vários alunos terem continuado a trabalhar na questão proposta como trabalho de casa, quando era suposto estarem a tentar justificar a conjectura relativa a pares de números e, sobretudo, na resposta "É…" (TA 14/03/02, p. 17) dada por Renata a Anita quando esta, procurando motivá-la a encontrar esta justificação, lhe diz: "Só que agora eu preciso de saber se ela é verdadeira..." (idem).

Renata é a autora do contra-exemplo que permitiu refutar a conjectura para ternos de números e quem explicou à professora porque falhava. Responder afirmativamente à questão de Anita indicia que está segura da veracidade da conjectura com pares de números, embora não a tenha justificado. Uma hipótese explicativa avançada por Rebeca para a sua resposta pode enraizar-se no facto de não ter conseguido encontrar um contra-exemplo para esta conjectura, contrariamente ao que aconteceu quando trabalhou com ternos: "Como ela encontrou muito facilmente para a outra um contra-exemplo e para esta não conseguiu arranjar, se calhar está convencida que é verdadeira..." (Rebeca, TST 15, p. 52). Anita não descarta esta hipótese: "Pode ser isso..." (idem). Simultaneamente, evoca o caso de um outro aluno que, tal como Renata, estava convencido da veracidade da conjectura para todos os pares de números mesmo antes de a justificar:

> Mas não tem que ficar convencida só porque não consegue encontrar um contra-exemplo!... Eu ainda disse ao Roberto, que também andava na mesma, que nem que ficasse a vida inteira... (...) Mas pode ter acontecido, pode. (TST 15, pp. 52-3)

Ao iniciar a reflexão sobre esta aula, Anita incluiu Renata entre os elementos da turma que intuía terem sentido a necessidade de provar a conjectura formulada para pares de números. A constatação de que esta aluna estava convencida da sua veracidade — independentemente da produção de uma justificação — e a assumpção da possibilidade da sua convicção se enraizar no facto de não ter conseguido encontrar um caso que não a verificasse, permitem evidenciar a possibilidade de existirem alunos que, embora sendo capazes de, autonomamente, refutarem conjecturas e compreenderem porque o fazem, não entendem a necessidade de provar as que não conseguem refutar.

Assim sendo, poderá conjecturar-se que toda a troca de ideias oriunda das dúvidas que se levantaram sobre a apropriação, pelos alunos, da necessidade de justificação da conjectura formulada para pares de números, poderá ter contribuído para um acréscimo de consciência sobre a importância de encontrar caminhos a percorrer no futuro que tenham em conta que a aprendizagem da necessidade da prova e o reconhecimento da sua relevância é um processo complexo e prolongado no tempo.

Lidando com o ensino do discurso de prova

É na terceira parte da aula, que teve uma duração aproximada de 30 minutos, que Anita procura que a turma se centre na justificação da conjectura formulada para pares de números. Inicialmente os alunos trabalham em pares, com o seu acompanhamento, durante cerca de treze minutos. Posteriormente, uma aluna, a seu pedido, desloca-se ao quadro onde faz vários registos relacionados com os factores primos resultantes da decomposição de dois casos de pares de números e com o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de cada par. Embora durante este período, que teve uma duração aproximada de dez minutos, Anita faça, pontualmente, algumas intervenções cuja audiência intencional é a turma, são os últimos quatro minutos da aula que, claramente, são dedicados à análise conjunta dos registos feitos no quadro de modo a produzir a justificação.

Desafiando os alunos a justificarem a conjectura

O episódio *Se suspeitam que é verdadeira, então tentem lá justificar porque é que é...*, que ocorre na sequência imediata dos alunos terem sido confrontados com o facto de existirem conjecturas que embora verificando-se para alguns casos não são válidas para outros, ilustra como Anita desafia a turma a justificarem a conjectura formulada para pares de números no momento em que considera que os alunos "já pensam que é necessário justificar" (TST 15, p. 18).

Se suspeitam que é verdadeira, então tentem lá justificar porque é que é...

1. Anita: Para os quais aquilo falha... Por isso é que aquilo é só uma conjectura. Então, é assim. Vocês não podem demonstrar aquilo de uma maneira muito formal, mas podem encontrar uma pequena justificação para isto acontecer com dois números (*aponta para a conjectura escrita no quadro*). Procurem lá.

Os alunos trabalham em pares. A Maria continua a explorar o que se passa com três números. A professora diz-lhe que sobre isso vai pensar em casa e incentiva-a a tentar justificar porque é que a conjectura formulada será válida para pares de números. Dirigindo-se, de novo, a toda a turma diz:

2. Anita: Agora é assim. Supondo que não vai falhar... porque a gente só fez para três casos... vocês podem tentar fazer mais uns quantos, mas isso nunca nos vai garantir que não haja quaisquer dois números para os quais falhe... Se suspeitam que é verdadeira então tentem justificar porque é que é... Pensem no quê? Vejam lá o que é que têm que ir relacionar. Têm o quê? Têm o mínimo múltiplo comum entre dois números e têm o máximo divisor comum entre dois números (*escreve, dentro de rectângulos no quadro, mdc(a,b) e mmc (a,b)*). Pensem no que é que é cada uma das coisas e tentem encontrar uma justificação. Porque é que aquilo se verifica com dois? (pausa) Escrevam o que é que quer dizer mínimo múltiplo comum de dois números e máximo divisor comum de dois números para vos ajudar e tentem encontrar uma justificação.

Os alunos trabalham nos lugares. Alguns parecem pensar na tarefa proposta. A Anita, circulando pela sala, interage com os alunos de modo a acompanhar o trabalho que realizam.

(TA 14/03/02, pp. 15-6)

Anita começa por indicar aos alunos que "podem encontrar uma pequena justificação" (§1) para a conjectura formulada, embora não a possam "demonstrar de uma maneira muito formal" (idem). O significado que atribui a estas palavras pode ser ilustrada a partir de uma das opções que refere ter tomado anteriormente à aula: "Já tinha tomado a opção de usar um exemplo generalizável, percebes?" (TST 15, p. 55). Tinha contactado com a ideia de exemplo generalizável (Veloso, 1998) enquanto processo de prova, numa das sessões de trabalho da equipa do projecto e, ao preparar a aula, evocou-a porque, do seu ponto de vista, no caso da conjectura para pares de números ele é acessível a alunos que frequentam o 8º ano de escolaridade.

É através das duas intervenções registadas no episódio, separadas por pouco mais de um minuto, que Anita procura mobilizar os alunos para encontrarem a justificação da conjectura. A análise destas intervenções, bem como o contexto em que surgem, deixa transparecer que apresenta a justificação como um instrumento de validação, na medida em que pode permitir ultrapassar incertezas resultantes da verificação de uma conjectura para um número limitado de casos: "vocês podem tentar fazer mais uns quantos, mas isso nunca nos vai garantir que não haja quaisquer dois números para os quais falhe... " (§2, linhas 2-4). Apresenta-a, também, como um meio que pode permitir compreender porque é que a conjectura é válida quando se consideram pares de números; "Se suspeitam que é verdadeira então tentem justificar porque é que é"; "Porque é que aquilo se verifica com dois?" (§2, linhas 4, 5, 9,10).

Referindo-se à parte final da intervenção correspondente a §2 (linhas 5-12), Anita indica que ela inclui algumas sugestões que podem ajudar a turma a encontrar a justificação da conjectura. Ao apresentá-las considera que está a dar uma "dica" (TST 15, p. 18) aos alunos que, do seu ponto de vista, foi prematura uma vez que pretendia que começassem por tentar descobrir essa justificação por eles próprios: "Eu não queria dar logo... Mas é que eu não queria dar logo estas sugestões... Queria que eles tentassem sozinhos" (idem).

Estas palavras revelam alguma insatisfação com o modo como agiu. Esta insatisfação decorre, não do conteúdo do que disse, mas antes do momento em que o disse. Na sua perspectiva, "o ideal era que eles [os alunos] conseguissem fazer sozinhos" (TST 15, p. 47) o percurso de justificação da conjectura, pelo que pretendia que, pelo menos numa primeira fase, trabalhassem de forma totalmente autónoma: "Queria que os alunos pensassem sozinhos" (idem, p. 19). Esta e outras sugestões do tipo, que tinha planeado na fase da preparação da aula, seriam reservadas para mais tarde, depois de se terem debruçado sobre a tarefa e apenas quando, na sua ausência, não conseguissem avançar no trabalho:

> Portanto, as minhas dicas: "Pensem no que é cada uma das coisas" e eu planeei isto, já percebes? (...) Já é uma dica, porque se eles não pensarem e

> interpretarem o que lá está escrito, já.... já considero que estou um bocadinho a gerir demais. Percebes? Mas é das tais coisas. Acabo por fazer quando realmente vejo que está a ser necessário. "Porque é que acontece nuns e não acontece nos outros?" Também pode ajudar a justificar. (...) É mais uma dica. É dirigida para o Roberto... Está no raciocínio dele porque cada um está ir por um caminho, percebes? (...) Eu estava a tentar conter-me até que... (risos) (TST 15, pp. 46-7)

Contrariamente a Anita, a colega não considera que a intervenção referente ao §2 contenha achegas significativas que possam auxiliar os alunos a progredir na justificação da conjectura: "Pensem no que é o mdc e o mmc. Então mas isso não é nenhuma dica de especial. Acho que nós também temos que dizer alguma coisa" (Rebeca, TST 15, p. 18). A troca de ideias decorrente desta divergência de pontos de vista, juntamente com a análise de várias reflexões de Anita, permitem iluminar o porquê de considerar que o seu modo de agir, nessa ocasião, poderia ter contribuído para facilitar a descoberta da justificação que pretendia. Possibilitam, ainda, compreender uma opção que tomou esperando que fosse útil para os alunos poderem, por eles próprios, encontrar esta justificação.

Na perspectiva de Anita, o trabalho que está solicitar à turma, "não é nada de elaborado" (TST 15, p. 32) pois "ali não há nenhuma construção de justificação que vá buscar coisas de fora" (idem). Considera que se os alunos interpretarem os procedimentos de determinação do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum entre dois números que têm registados nos seus cadernos e reflectirem sobre eles "já lá está tudo o que eles têm que relacionar" (idem, p. 28) para conseguirem justificar. Na sua perspectiva, faz parte do papel dos alunos saberem que têm que pensar e interpretar o que têm escrito e se para o fazerem ela tiver que o dizer, pensa que já está um "bocadinho a gerir demais" (idem, p. 46): "Eles tinham obrigação de saber que era nisto que tinham que pensar, percebes?" (idem, p. 19).

Nessa medida, embora concordando com a colega que a sua intervenção os está a conduzir para a tarefa em si mesma, considera que vai para lá deste aspecto: "Também, mas não é só isso..." (TST 15, p. 24). O próprio facto da intervenção destacar aspectos em que os alunos deveriam reflectir por iniciativa própria, de lhes dizer para escreverem o que "quer dizer mínimo múltiplo comum de dois números e máximo divisor comum de dois números" (§2), constitui um reforço que, porque os encaminha no processo que pretende que sigam, os ajuda. Assim sendo, é, nas suas palavras, uma dica:

> Eu considero que dei uma dica, porque é assim: se já lá está que eles têm que justificar, se eu estou a reforçar, já estou a dar um bocadinho de dica... Não sei... Não é nada de especial, não disse como é que se fazia, mas já estou a dizer... a encaminhar, pronto. (TST 15, p. 24) (...) Disse escrevam o que é que é... (...) Para mim já estou a dar uma dica. (idem, p. 26)

Procurando compreender melhor o significado que Anita atribui a "dica", quer em geral, quer no que se prende com as especificidades dos momentos da aula que estão em discussão, interpelo-a neste sentido. Refere:

> Eu não sei se tu reparaste que eu mantive durante muito tempo as decomposições lá em baixo... demasiado tempo... (...) Quando a miúda, a Alda, foi ao quadro e completou a tabela, eu pedi-lhe para ela deixar as decomposições durante muito tempo cá em baixo, estás a ver? Eu estava à espera que eles reparassem nelas. (TST 15, p. 19)

As decomposições mencionadas neste extracto dizem respeito aos pares de números incluídos no enunciado da tarefa 7 da ficha de trabalho. Tendo decidido, previamente à aula, que a justificação da conjectura passaria pelo recurso ao exemplo generalizável, opta por mantê-las no quadro:

> Já tinha tomado a opção de usar um exemplo generalizável, percebes? Depois era relacionar com aquilo das decomposições. Daí eu ter mantido *tanto tempo* (ênfase) aquelas decomposições em baixo. (...) Aquilo não estava ali por acaso, ainda por cima com um quadro daqueles. (TST 15, p. 55).

A expressão "um quadro daqueles" referida neste comentário, tem implícita a ideia de que o seu tamanho é insuficiente, na perspectiva de Anita, para fazer um registo adequado da actividade matemática desenvolvida na aula. Esta insuficiência, recorrentemente comentada em várias sessões de trabalho, constitui, para si, um factor de perturbação. Ter mantido no quadro, apesar do seu tamanho, os registos das decomposições durante "tanto tempo depois da gente apagar a tabela" (TST 15, p. 55), foi uma opção que, conscientemente, tomou porque imaginava que, no decurso da justificação da conjectura, daí poderiam advir vantagens tanto para o seu próprio trabalho, como para actividade que tentava que os alunos realizassem. Em particular, tinha a expectativa de que estes, ao observá-los, pudessem intuir, autónoma e rapidamente, um processo de justificação que, embora apoiando-se na análise de casos particulares, fosse para além deles: "Outra opção foi manter as decomposições iniciais julgando que poderia vir a utilizá-las e que eles repararíam como exemplo generalizável. Achei que deviam lá estar e pensei que eles iam lá mais rápidos" (TST 15, p. 20).

Os alunos não observaram as decomposições do modo como Anita pretendia e durante o trabalho de pares, subsequente ao episódio *Se suspeitam que é verdadeira, então tentem lá justificar porque é que é...,* a generalidade da turma poucos progressos faz na produção da justificação da conjectura: "Anita *(para a turma)*: Ora bem. Só há aqui uma pessoa que parece que atingiu mas não quer falar!... (risos)" (TA 14/03/02, p. 16). Quando se dá conta da situação — e a exemplo do que fez quando propôs aos alunos o desafio respeitante ao teste da conjectura para ternos de números — toma, na altura, a opção de lhes "dar muito tempo para pensarem apostando que eles iam lá sozinhos" (TST 15, p. 20).

Apostar que os alunos chegam, por eles próprios, à justificação da conjectura não significa que Anita se demita de acompanhar o trabalho que realizam. É através deste acompanhamento,

- que tenta que se foquem nessa justificação e não, por exemplo, no trabalho que lhes tinha proposto para casa: "Mas não é isso que quero que façam [dirigindo-se a Renata e colega depois destas alunas indicarem que estavam a fazer este trabalho]. É que tentem justificar esta (*aponta para o quadro*)" (TA 14/03/02, p. 17);
- que averigua os progressos que estão, ou não, a ser feitos e os incentiva a prosseguirem o trabalho: "Então? Já chegaram a alguma conclusão?" (TA 14/03/02, p. 17);
- que reforça a prossecução de caminhos que indicam e que lhe parecem prometedores: "Porque é que acontece nuns e não acontece nos outros? (...)

É mais uma dica. É dirigida para o Roberto... Está no raciocínio dele (...)" (TST 15, pp. 46-7);

- que se dá conta que Júlia tem "uma justificação que só precisava de alguns retoques" (TST 15, p. 3) e a incentiva a apresentá-la aos colegas, embora os seus esforços tenham sido em vão: "só que não quis dizer alto" (idem);
- que se apercebe que Maria "estava a utilizar um exemplo para sistematizar e generalizar a conclusão que se queria justificar" (TST 15, p. 3).

Ao iniciar a reflexão sobre a aula, Anita refere que "houve para aí três miúdas" (TST 15, p. 3) que conseguiram fazer progressos significativos na justificação da conjectura: Júlia, Renata e Maria. Solicita a Maria, "a única que tem coragem para ir lá" (idem), que vá ao quadro apresentar o trabalho que realizou, dando-se, assim, início a uma nova fase da aula.

Produzindo, com a turma, a justificação da conjectura

Maria começa por registar, no quadro, em linguagem corrente, os procedimentos que permitem determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre dois números a partir da sua decomposição em factores primos. Em seguida decompõe 15 e 30, o par de números que tinha analisado, e escreve o seu máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum adoptando uma forma de representação que torna visíveis os factores usados em cada caso. Posteriormente, regista 30x15 que iguala a uma expressão numérica em que cada um destes números é representado sob a forma de multiplicação dos seus factores primos:

$$30\text{x}15 = \underline{2\text{x}3\text{x}5} \times \underline{3\text{x}5}$$

A partir do que escreve no quadro ou das indicações que, oralmente, dá a Maria, Anita contribui, também, para estes registos assumirem a sua forma definitiva. A reflexão que a seguir apresento permite compreender algumas das preocupações que orientaram as interacções que a professora estabeleceu com esta aluna a propósito do que devia ser escrito no quadro:

> Aqui o que eu tentei fazer, por isso eu pus aqueles tracinhos assim, foi que... Eles para verificarem isto podiam ter feito de várias maneiras. Por exemplo, achavam o máximo divisor comum e achavam o mínimo múltiplo comum e punham logo o resultado e multiplicavam. Assim, não se tornava tão visível como através daquilo que eu depois tento levá-la a fazer. No fundo, estou a ver se a turma apanha toda para depois eu sublinhar e comentar. Estás a perceber? (TST 15, pp. 55-6)

A visibilidade dos factores resultantes da decomposição dos números em factores primos é fundamental para a turma compreender a justificação da conjectura respeitante a pares de números. Com efeito, é através da comparação entre os elementos de um grupo formado pela junção (não excluindo a repetição) de todos os factores primos resultantes da decomposição de um par de números cuja multiplicação origina o produto dos números e aqueles que se seleccionam para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum desses números, que os alunos podem entender que esta selecção esgota todos os factores do referido grupo. Mobilizando este conhecimento, Anita procura, antes de mais, "ajudar a Maria a organizar as coisas" (TST 15, p. 55) de modo a que os registos tornem visíveis os factores: "Porque se ela escrevesse só os resultados, digamos assim, via-se que era igual mas não se viam os tais factores que eu queria. Daí eu ter posto os tracinhos para organizar" (idem, p. 56).

Este modo de agir não deriva, somente, nem sobretudo, de intenções relacionadas com o ajudar esta aluna, em particular, a compreender a justificação da conjectura. Neste momento, para a professora, "a Maria já sabe o que está a fazer" (TST 15, p. 56) embora não tenha o seu trabalho "tão bem sistematizado em termos do exemplo generalizável para... no fundo para a turma acompanhar ou tentar acompanhar" (idem). O que procura, fundamentalmente, é que os registos sejam claros e pormenorizados para que, através do que é escrito e do que, posteriormente, será discutido, esta justificação se torne inteligível para os colegas: "Porque da outra maneira não acompanhavam mesmo" (idem).

Enquanto Maria está no quadro, Anita, embora atenta à sua actividade, circula pela sala observando e apoiando os pares de alunos que trabalham nos seus lugares, com quem continua a interagir a partir de solicitações que lhe são feitas ou por iniciativa própria. Há ocasiões, que serão analisadas na subsecção *Dúvidas, dificuldades, problemas ou dilemas...*, em que endereça mensagens à turma destinadas a salientar que os registos feitos no quadro não constituem a justificação da conjectura. Terminados estes registos com o par 15, 30, sugere a Maria que use o caso 24, 15 e organize, no quadro, a informação a ele relativa seguindo o que tinha feito para o anterior caso. Este movimento é acompanhado por uma intervenção dirigida à turma que pode interpretar-se como uma justificação para a sugestão que apresenta: "[15, 30] não é grande coisa (...) desculpem lá" (TA 14/03/02, p. 20). As palavras de Anita permitem compreender o porquê desta opção:

> Agora quais foram as vantagens que eu achei? Achei que era mais elucidativo na altura. O 30 é múltiplo do 15 e o 15 é divisor de 30. Foi isso mesmo. E achei que aquilo ia ser... pronto... falseávamos o resultado. Na altura foi o que eu pensei. Depois já não reflecti mais sobre isso. (TST 15, p. 56)

Simultaneamente, esta opção parece não ter sido independente do facto da aula estar muito perto do final. Esta ideia emerge a partir de um comentário apresentado por Rebeca com que Anita concorda de imediato:

> Sim [Eu acho que isso se calhar também teve um bocado a ver com o estares sob pressão do tempo e quereres chegar às coisas], porque eu aí já não tinha quase tempo nenhum... Atenção!... Está quase a tocar mesmo..." (TST 15, p. 56)

As posteriores reflexões de Anita deixam transparecer não só o receio de que não houvesse, na aula, tempo suficiente para que pudessem ser clarificadas eventuais incompreensões derivadas das particularidades do exemplo de Maria, como também que a opção tomada não a deixou plenamente satisfeita: "Mas já não tinha tempo... Se calhar valia a pena ter aproveitado... Se calhar foi uma má opção..." (TST 15, p. 56).

Quando Maria finaliza a actividade relativa ao par 24, 15, Anita inicia a análise da informação registada no quadro visando a produção, com a turma, da justificação da conjectura. O episódio *Explica lá o que vais escolher*, que encerrou a aula, ilustra as interacções que, neste âmbito, ocorreram.

Explica lá o que vais escolher

1. Anita *(para a turma):* Ora bem. Escrever 24 vezes 15 é a mesma coisa ou não que dois ao cubo vezes três vezes três, vezes cinco?
2. Alunos: É
3. Anita: É ou não?
4. Alunos: É.
5. Anita: É? Então agora faz lá o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum e explica o que é que vais escolher *(para a Maria)*.
6. Maria: Para o mínimo múltiplo comum, primeiro escolhi os números com um maior expoente que neste caso é dois ao cubo, depois três que é o número comum em ambos, meto vezes 3 e depois meto o 5 *(vai registando no quadro o que vai dizendo).*
7. Anita: Primeiro... Desculpa lá, estás a fazer o mínimo múltiplo comum entre quê?

A Maria sorri, apaga mmc e escreve mmc (24,15)

8. Anita: Agora diz lá o que estavas a dizer.
9. Maria: Para o mínimo múltiplo comum entre 24 e 15 escolhi primeiro os números com maior expoente que era o 2 ao cubo, depois escolhi o factor comum ao 24 e 15 que era o 3, e depois o não comum que era o 5.
10. Anita *(para a Maria):* Mais? Agora o máximo divisor comum (pausa) entre...

Maria escreve mdc (24,15) = 3

11. Anita: Para aí escolheste o quê?
12. Maria: Para aqui escolhi o três *(??) (a intervenção prossegue mas não se consegue ouvir. É feita em voz muito baixa e dirigindo-se à professora que se encontra muito próxima do quadro)*
13. Anita *(para a turma)*: Olhem lá... É assim. Basicamente, isto... O que é que eu escolhi para aqui, Cristina? (*aponta para o mmc*) Escolhi os factores quê?
14. Aluno: Primos
15. Anita: Os factores! *(ênfase)* Para o mínimo múltiplo comum... Os factores...
16. Cristina: Comuns e não comuns com maior expoente.
17. Anita: Factores comuns e não comuns de maior expoente *(escreve no quadro a frase)*. E para aqui, o que é que eu escolhi? *(aponta para o mdc)*
18. Maria: Factores comuns de menor expoente (*A Anita regista no quadro*)
19. Anita *(dirigindo-se à turma):* Ora bem, vocês o que queriam provar, isto a Júlia já disse mas teve vergonha em dizer depois... O que é que eu queria provar neste caso? Que 24x15 era igual a quê?
20. Alguns alunos: Máximo divisor comum entre 24 e 15 vezes o mínimo múltiplo comum entre 24 e 15

A Anita regista no quadro 24x15= mdc (24,15) x mmc (24,15).

21. Anita: Agora vejam o que é que se está a passar aqui. Quais são os factores que entram aqui nisto? *(aponta para mmc (24, 15); a Maria responde em voz baixa)* Entra isto e mais isto, entra isto *(vai apontando para os factores*

resultantes da decomposição dos números em factores primos e pondo traços em torno deles)... E o que é que entra mais? *(pausa)*

Toca para a saída. Os alunos começam a arrumar os seus cadernos.

22. Anita: É assim. Então vejam lá o que é que fica neste lado. Ficam factores quê? Júlia!
23. Maria: Comuns e não comuns.
24. Anita: Comuns e não comuns. Porquê? Porque se para aqui escolho todos os factores comuns de maior expoente, o que é que fica a sobrar?
25. Maria: Os de menor expoente.
26. Anita: Os de menor expoente que estão aqui. Ao multiplicar todos tenho o produto dos dois números. Esta é a justificação. E acabei por fazer eu, porque ela não disse nada!!... *(dá uma "palmadinha" na mesa da Júlia para lhe chamar a atenção e olha-a intencionalmente*)

(TA 14/03/02, pp. 20-2)

Através das primeiras intervenções endereçadas à turma (§1, §3), Anita procura focar a atenção dos alunos na igualdade entre o produto de 24 por 15 e o produto dos factores primos resultantes da decomposição de cada um destes números. Estas intervenções podem percepcionar-se como um meio que usa para se certificar de que os alunos não questionam esta igualdade. Simultaneamente, podem interpretar-se como um recurso através do qual tenta reforçar a visibilidade desses factores, um elemento importante para a compreensão da justificação que pretende. A direccionalidade prioritária das intervenções subsequentes muda (§5, §7, §8, §10, §11). As mensagens são endereçadas a Maria e visam obter, a partir desta aluna, a indicação dos factores seleccionados para obter o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre dois números. Neste processo, Anita procura explicitar informações pressupostas, como transparece quando a interpela sobre os números que estão a ser usados quando se dá conta que no quadro apenas é registado *mmc* (§7).

Maria está a caminhar por uma via prometedora no sentido da justificação da conjectura e é capaz, não só de a prosseguir, como também de explicitar os raciocínios que fez: "A Maria estava a tentar fazer. Ela ainda lá ia. Essa é das que tem capacidade para falar..." (TST 15, p. 31). No entanto, neste momento, a aula está muito perto do final. Anita receia que se continuar com a mesma estratégia, ou seja, se mantiver na aluna a principal responsabilidade pela explicação do processo de justificação, não haja tempo para o concluir, como deseja: "Mas depois tenho que ser eu a agarrar para despachar porque está a tocar" (idem). Opta, então, por iniciar um conjunto de interacções com a turma (§13 a §26) através das quais procura sublinhar, apoiando-se no exemplo registado no quadro, que no grupo formado por todos os factores primos oriundos da decomposição dos números, ao seleccionarem-se para o mínimo múltiplo comum os factores não comuns e os comuns de maior expoente, "fica a sobrar" (§24) os comuns de menor expoente que são aqueles que se incluem no máximo divisor comum.

A parte final da aula foi, para Anita, muito precipitada: "Teve que ser tudo a correr. Toca..." (TST 15, p. 31). Vê-a "exactamente como uma grande frustração" (TST 35, p. 10) pois, nas suas palavras, "andei ali tanto tempo a tentar que fossem eles a fazer a prova e no final tive que ser eu a pegar nas coisas!" (idem). A frustração que sentiu perante a globalidade da actividade desenvolvida pelos alunos no âmbito da justificação da conjectura, é explicitada por diversas vezes e em diversas ocasiões, o que revela bem a sua insatisfação. Esta insatisfação agrava-se por ter ocupado um pouco do intervalo, o que não considera adequado tanto mais que o espaço temporal que separa a maioria das aulas é de apenas cinco minutos: "Ainda por cima, ocupei um bocado do intervalo. Isto, se se pudesse, era um bocadinho de evitar" (TST 15, p. 58).

De algum modo, a sua intervenção final (§26) é indiciadora destes sentimentos. Simultaneamente revela o seu desagrado por Júlia, uma aluna que "tinha feito, mas não quis dizer" (TST 35, p. 10) não ter querido partilhar com os colegas a justificação que descobriu: "Não vês que eu estou a refilar com ela?" (idem).

Problemas experienciados

Por um lado eu digo que os exemplos não provam e, por outro, vou recorrer a um exemplo...

Um dos dilemas com que Anita se confrontou resulta da opção pelo "exemplo generalizável", enquanto processo de prova da conjectura formulada para pares de números. Ao preparar a aula considerou que os alunos seriam capazes de justificar a conjectura através desse processo embora, tendo em conta o seu nível de escolaridade e a maturidade matemática a ele associada, não esperasse que fossem para lá dele: "Mas aqui eu nunca esperava mais do que isso, neste caso, de miúdos do 8º ano. Era isso que eu esperava" (TST 15, p. 54). Há, durante a aula, um momento, incluído no episódio *Embora não seja com exemplos que se prove...*, que, na sua perspectiva, é revelador do dilema com que se confrontou.

Embora não seja com exemplos que se prove...

1. Anita *(para a Maria):* Agora já consegues. Com base em exemplos, o que é que concluíste? Embora seja um bocado... *(olha para o caderno da Maria).* Ah!... Tenta lá... Faz lá um exemplo para vermos... Embora não seja com exemplos que se prove... *(franzindo as sobrancelhas e parecendo falar com ela própria)*

2. Maria: Sôtora, posso apagar?

3. Anita: Podes.

A Maria, no quadro, faz a decomposição de 30 e de 15 em factores primos, escreve 30=2x3x5, 15= 3x5 e regista mdc e mmc. A professora circula pela sala, interagindo com os alunos que trabalham nos seus lugares, e completa, no quadro, os registos da Maria.

4. Telma *(apontando para o que a Maria faz no quadro):* Sôtora, isso serve para justificar a conjectura?

5. Anita *(falando para Telma):* Isto não é uma justificação, atenção! Isto pode ajudar a analisar a situação.

6. Telma *(para a professora):* Era isso que eu queria dizer. Para justificarmos temos que justificar através de cálculos e depois explicar?

7. Anita *(para a Telma)*: É assim, podem orientar-se por aí... *(pausa)* Só... *(ênfase em "só") (olha de modo significativo para a aluna e acena com a cabeça)*

A Maria, no quadro, olha para o que aí escreveu e observa o seu caderno.

(TA 14/03/02, pp. 18-9)

Este episódio surge enquanto Maria faz os registos associados ao par 15, 30 tendo em vista a justificação da conjectura. Referindo-se à intervenção correspondente ao §1, Anita diz que neste momento, falava consigo própria, estava a "reflectir alto" (TST, 15, p. 54), devido à preocupação que a opção pelo "exemplo generalizável" pudesse reforçar a concepção, partilhada por muitos alunos, de que a verificação de uma conjectura através de exemplos basta para a provar:

> Estava preocupada. Até falei comigo própria (...) *E agora? Isto vai causar alguma coisa. Isto do exemplo generalizável... Eu não posso usar... Vai causar alguma confusão. Por um lado eu digo que os exemplos não provam e, por outro, vou recorrer a um exemplo...* (TST 15, pp. 53-4)

Neste momento da aula, segundo Anita, "tive um dilema mesmo" (TST 35, p. 8). Na sua perspectiva, "para se fazer a prova ao nível do 8º ano, tem que ser a partir da análise de um exemplo" (idem). Este processo "pode dar a ideia de que os exemplos provam mas, por outro lado, a análise do exemplo é necessária para eles perceberem porque é que a conjectura é válida" (idem).

Procurando lidar com este dilema, evita usar a expressão "exemplo generalizável" por recear que a sua utilização, ao conter a palavra "exemplo", possa, implicitamente, contribuir para apoiar a referida concepção: "Às tantas eu falo com os meus botões (...) sou eu a desabafar comigo própria (risos). Como é que eu agora vou dizer isto do exemplo generalizável? (risos) Tenho que dizer isto de outra maneira..." (TST 15, p. 3). Além disso, procura, intencionalmente, dar visibilidade à ideia de que os exemplos são insuficientes para provar conjecturas: "Digo para a Maria fazer um exemplo para vermos. Faço questão de dizer *embora não seja com exemplos que se prove* [§1], porque penso que isso pode causar alguma confusão..." (idem, p. 53). Neste âmbito, a intervenção de Telma (§4) constitui um recurso que é útil para o objectivo visado: "E depois digo: " 'Isto não é uma justificação, atenção! Isto pode ajudar a analisar a situação...' [§5] Estás a perceber? Digo: Ajuda a analisar! (ênfase)" (idem, p. 54).

Pode, além disso, conjecturar-se que as elocuções "pode ajudar a analisar a situação"(§5) e "podem orientar-se por aí" (§7), proferidas por Anita, são meios de que se serviu para ajudar, não só Telma, mas também os colegas que possam ter escutado o diálogo, a compreenderem que os exemplos podem constituir uma fonte inspiradora e orientadora para a descoberta do processo de justificação de uma conjectura. Ao reflectir sobre a aula, não se pronuncia, explicitamente, sobre este aspecto. No entanto, a opção de manter no quadro as decomposições dos pares de números existentes na tabela incluída no enunciado de uma das subtarefas que propôs, é reveladora da importância que atribui à observação e análise atenta dos exemplos para a produção da referida justificação.

É caso para dizer que o professor tinha mais expectativas...

Anita proporcionou aos alunos um tempo superior ao que habitualmente lhes concede para poderem realizar, com poucas intervenções da sua parte, a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* e, em particular, encontrar a justificação da conjectura para pares de números: "Porque eu não levo tanto tempo, normalmente, a tentar assim... " (TST 15, p. 47).

A propósito da exploração da mesma tarefa noutra turma, diz "Dei a dica e interagi..." (TST 15, p. 49), ou seja, através das indicações que deu aos alunos e das questões que lhes colocou, foi-os ajudando a pensar e, simultaneamente, a progredir no processo de justificação. Porque este é o modo de trabalho usual nas suas aulas e porque em muitas ocasiões destaca, explicitamente, que "tudo o que eu digo e lhes pergunto deviam ser eles a perguntarem a eles próprios" (TST 15, p. 37), esperava que os alunos fossem capazes de colocar a si próprios questões que lhes permitissem fazer sozinhos o percurso de justificação da conjectura:

> E eu digo-lhes isto muitas vezes, ainda por cima, quando estou a fazer este tipo de pensamento com eles. (...) E olha que eu já faço isso há muito tempo. Estás a ver? E agora... Por isso é que eu te digo que acho que eles aqui deveriam ter percorrido o caminho sozinhos. (TST 15, pp. 37-8)

As suas expectativas eram acrescidas porque a actividade não envolvia, do seu ponto de vista, um grau de dificuldade elevado tendo em conta o tipo de questões com que habitualmente confronta os alunos e as respostas que apresentam: "Não era assim tão difícil, percebes, para o tipo de questões que eu usualmente lhes ponho e que eles me respondem" (TST 15, p. 38). Na sua perspectiva, o que os alunos tinham que fazer era "pensar o que é o máximo divisor comum, o mínimo múltiplo comum e relacionar (...) Os exemplos já eles lá tinham" (idem, p. 34).

Ao reflectir sobre a aula, refere: "É caso para dizer que o professor tinha mais expectativas... mas é, mas é mesmo. Tinha" (TST 15, p. 36). Esta intervenção, a par de várias outras, é ilustrativa de que as suas expectativas ficaram muito aquém da realidade: "As minhas expectativas foram muito ultrapassadas por baixo, digamos assim. Neste caso, ficaram muito aquém..." (idem, p. 55). Sentiu-se frustrada — "Fiquei frustrada..." (idem, p. 43, p. 61) — desiludida, até zangada — "Só que aqui tinha a expectativa que chegassem lá sozinhos... E achei que havia de esperar... Fiquei desiludida. Até fiquei zangada, tu viste" (idem, p. 50). — pois, apesar do tempo que esperou, a generalidade dos alunos não conseguiu progredir do modo como esperava que o fizesse.

Anita "não esperava ocupar tanto tempo" (TST 15, p. 3) com o processo de justificação da conjectura. Optou por prolongar o tempo de trabalho em pares na expectativa que, por esta via, conseguissem avançar: "Mas na altura optei por dar mais tempo porque pensei que eles realmente conseguissem, como houve para aí três miúdas que conseguiram. De resto..." (idem). Para além destas alunas, há outros elementos da turma, a quem se vai referindo ao longo da reflexão sobre a aula, que embora não tenham conseguido, por eles próprios, concluir o processo de justificação, conseguiram compreendê-lo. No entanto, tem dúvidas que para muitos outros esta justificação tenha sido inteligível, mesmo após a sua apresentação no quadro: "Se calhar, no final, acabou por se perder" (idem, p. 54). Interroga-se sobre a adequação da opção que tomou: "Agora não sei… De resto foi assim... Foi um bocadinho... Estendi-me um bocadinho demais"; (idem, p. 3); "Se calhar não devia ter feito isso... Pronto, lá está... Fazer, normalmente..." (idem, p. 48). Do seu ponto de vista, "até acaba por ser positivo para os que conseguiram" (idem, p. 3), mas questiona-se se também o terá sido para outros elementos da turma: "Para os que não conseguiram não sei, estás a perceber?" (idem). Na ficha de trabalho que preparou na sequência desta aula inclui o pedido de apresentação desta justificação, o que deixa transparecer a sua preocupação em avaliar as consequências, em termos da aprendizagem dos alunos, da actividade desenvolvida na aula.

Lidando com a emergência e resolução de desacordos

Os desacordos não tiveram uma expressão relevante na aula em análise. Este facto não significa, no entanto, a inexistência de à-vontade, pelo menos da parte de alguns alunos, para enunciarem publicamente pontos de vista divergentes em relação a outros apresentados por colegas. A divergência emergiu quando testaram a conjectura com ternos de números, usando os casos propostos pela professora, e focou-se nos resultados obtidos a partir dos cálculos efectuados. Por exemplo, quando Maria refere “Nesse aplicou-se e nesse não” (TA 14/03/02, p. 11), e a professora lhe indica “Então faz outra vez”, ouvem-se, quase em simultâneo, vozes dizendo “Aplicou, sim senhora” ou “Deu”.

A professora sabia que Maria “tinha-se enganado nas contas” (TST 15, p. 21) e, neste caso concreto, opta por ser ela própria a reencaminhá-la para os cálculos que tinha feito de modo a poder corrigi-los e não solicita, por exemplo, aos colegas que exprimiram vozes divergentes, que fundamentem a sua posição. Esta estratégia não traduz, contudo, a adesão de Anita à perspectiva de que os desacordos, na aula de Matemática, são algo a evitar ou que coloca no professor a inteira responsabilidade pela resolução dos que, eventualmente, aí poderão emergir. Esta ideia pode ser apoiada pela análise do que diz quando coloco a questão de se, nesta aula, teriam, ou não, sido expressos pontos de vista diferentes na sequência do teste da conjectura usando os ternos de números que tinha indicado:

> Não, não foi um desacordo em relação à validade da conjectura. Se por acaso tivesse sido um desacordo em relação a isso, a Maria até podia ter tido um papel na resolução, o que, neste caso, até era óptimo, mesmo que eu não o tivesse agarrado aí, embora depois pudesse... Mas se eu me tivesse apercebido depois poderia ter motivado mais. Mas acho que o “não deu” teve a ver com um erro de cálculo. (TST 15, p. 69)

Esta reflexão faz referência a uma intervenção — “não deu” — que me pareceu escutar quando fiz a transcrição de extractos da aula. No momento, havia várias outras quase simultâneas o que tornava muito difícil a sua perceptibilidade. A existir e se considerada conjuntamente com as restantes contribuições, ela poderia ser indiciadora da emergência de um desacordo sobre a validade da conjectura. Não estava, no entanto, segura de que tivesse surgido e partilhei as minhas dúvidas no grupo de pesquisa. Estas dúvidas foram reforçadas quando Anita indica não a ter ouvido na altura em que, previamente à sessão de trabalho, observou o registo vídeo da aula.

Tentámos compreender as interacções que ocorreram e o seu significado observando, conjuntamente e por diversas vezes, a gravação deste momento da aula. Foi esta observação — que nos levou a inclinarmo-nos para a inexistência da intervenção — e a troca de ideias daí resultante que originaram a reflexão de Anita acima incluída. Evocando as suas memórias da aula, elimina a possibilidade de ter surgido um desacordo focado na validade da conjectura, uma vez que se recorda que um “não deu”, dito nesta altura, foi dirigido a alguém que, “porque se tinha enganado nos cálculos” (TST 15, p. 69), “era para lhe dar uma coisa e deu outra” (idem).

As suas palavras revelam, simultaneamente, que se o desacordo tivesse emergido, não só não seria descartado, mas também que haveria lugar para os alunos desempenharem um papel diferente do de seguirem, meramente, as indicações do professor. Anita valoriza que, por iniciativa própria, apresentem ideias que contribuam para os desacordos serem ultrapassados, independentemente dela própria os “agarrar”, ou não, de imediato: “Até podias considerar que eles tentaram resolver por eles, o que era bom” (TST 15, p. 69). Era este papel que, do seu ponto de vista, Maria poderia ter desempenhado no caso do desacordo ter surgido.

Ensinando para e através da constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático

De modo a evidenciar aspectos significativos para a constituição de uma comunidade de discurso matemático, centro-me nesta secção na actividade desenvolvida, fundamentalmente, nos momentos de trabalho colectivo. Ao longo da aula, a demarcação entre as fases dedicadas a esta modalidade de trabalho e as relativas ao trabalho pares foi bastante fluida. Os contornos destas fases não foram nítidos o que dificultou a identificação dos momentos destinados a cada uma das modalidades. Anita, ao reflectir sobre a aula em análise cerca de dezasseis meses depois de a ter leccionado, refere, precisamente, esta característica: "Devia ter estado mais atenta à distinção entre os momentos de discussão com toda a turma e os de exploração da tarefa pelos alunos nos lugares (...) fui aos lugares durante a discussão" (E4, p. 17).

Procurando constituir uma comunidade de discurso matemático

Na aula em que foi explorada a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* a boa relação que Anita tem com os alunos é notória. Estes respeitam-na e a professora respeita-os também. O ambiente de trabalho é calmo e mesmo quando alguns alunos pareceram descentrar-se da tarefa, nunca o seu comportamento foi de molde a perturbar o trabalho dos colegas.

Anita procura que os alunos se sintam à-vontade para expressar as suas ideias e preocupa-se em proceder de forma a contribuir para que sintam que o errar é natural. Este modo de agir é, por exemplo, visível quando incentiva Renata, que fala em voz muito baixa e apenas para a professora, a apresentar à turma as conclusões a que chegou ao explorar a conjectura com ternos de números: "Não faz mal. Se não disseres bem não há problemas. A gente discute. Qual é o problema?" (TA 14/03/02, p. 12). Transparece, também, no gesto carinhoso que tem com Júlia quando constata que a resposta incorrecta verbalizada por esta aluna foi devida a um erro de cálculo feito ao testar a conjectura usando um dos ternos que apresentou (episódio *Com três só dá se forem primos).* Nas suas palavras "não foi por acaso que eu lhe fiz a festinha na cabeça" (E4, p. 35). Sabe que esta aluna, embora tenha um desempenho matemático muito bom, "fica muito perturbada quando erra" (idem) e o seu gesto "teve a ver com isso" (idem). Esta justificação, a par de vários outros comentários que foi fazendo, quer sobre as dificuldades dos alunos, quer sobre as suas características pessoais, traduzem que os conhece bem e que age tendo em conta este conhecimento.

Nos momentos de trabalho com toda a turma, o padrão de interacção dominante foi entre a professora e o(s) aluno(s). Estes respondem a questões de Anita ou a observações que lhes dirige e só muito pontualmente intervêm por sua iniciativa ou reagem a algo que os colegas dizem. Estas ideias são apoiadas pelas suas palavras quando sugiro que nos debrucemos sobre o papel do professor e dos alunos no discurso que existiu na aula: "Há sempre um vem para mim, vai para eles... (risos)" (Anita, TST 15, p. 63).

Esta dominância não significa, contudo, uma ausência de abertura para os alunos, por iniciativa própria, assumirem a palavra. Por exemplo, quando Telma a interpela sobre o significado dos registos que Maria faz no quadro relativamente à justificação da conjectura (episódio *Embora não seja com exemplo que se prove*), escutou-a com atenção e considerou com seriedade as questões que lhe eram colocadas. Não traduz, também, a não valorização das interacções entre os alunos. Por exemplo, reflectindo sobre a forma como, neste mesmo momento, respondeu à aluna, diz: "Aqui eu não lhe respondo mais porque estava a tentar que a Maria lhe dissesse e então opto por não... Faço-lhe uma cara, mas sem dizer muito mais, percebes?" (TST 15, p. 55).

A colocação de questões foi o principal meio de que Anita se serviu para fazer emergir ideias dos alunos. Estas são dirigidas a toda a turma ou a elementos particulares. Pontualmente, recorre, também, ao redizer as suas contribuições para alimentar a conversação e reforçar as que considera serem particularmente relevantes para o progresso da actividade. Por exemplo, quando procura que se pronunciem sobre a validade da conjectura para ternos de números, depois de ter sido apresentado um caso que a contraria, repete a expressão "para quaisquer", verbalizada por alguns alunos, expandindo-a — "Para quaisquer três números" — e também a avaliação enunciada: "Que é falso" (episódio *Olhem lá, eu digo que aqui é válido só para alguns?*).

As questões que colocou foram, nalguns casos, questões abertas através das quais procurou, por exemplo, que os alunos testassem a conjectura com ternos de números, justificassem ideias apresentadas, clarificassem o significado atribuído a expressões usadas — "O que queres dizer com concluíste?" — explicassem raciocínios seguidos, evocassem e descrevessem o que tinham feito ou reflectissem sobre as diferenças entre dois enunciados da conjectura. Noutros casos, os predominantes, as questões tiveram um carácter mais fechado do que as anteriormente referidas. Ou seja, o seu formato apelava a respostas particulares breves, por vezes, de carácter dicotómico, e visavam focar a atenção de certos alunos ou da turma em especificidades da actividade que estava a ser desenvolvida. Foi através deste tipo de questões que Anita procurou, por exemplo, ajudar Júlia a aperceber-se da incorrecção de uma ideia que tinha apresentado, salientar aspectos que permitiram tornar mais preciso o enunciado da conjectura formulada, averiguar o posicionamento dos alunos em relação à validade da conjectura para pares e ternos de números, reforçar que um caso que não verifica uma conjectura é suficiente para a invalidar e, no final da aula, conduzir o processo de justificação.

Perante as contribuições apresentadas, Anita procura compreendê-las e apoiar-se no que vai escutando para ajudar os alunos a progredir. Esta ideia transparece, por exemplo, em várias considerações que tece com a colega sobre o seu modo de trabalho habitual evocando memórias comuns de experiências de observação mútua de aulas: "Pois [Fazes as coisas fazendo questões continuamente, interagindo com eles, eles vão dizendo e vão fazendo as coisas (Rebeca)]. Isso é o meu normal... Vou tentando perceber o que dizem e assim vamos avançando" (Anita, TST 15, p. 49). Quando considerou que as ideias apresentadas, embora válidas e importantes de um ponto de vista matemático, podiam, se fossem aprofundadas na aula, contribuir para os alunos se dispersarem e, sobretudo, para os que têm mais dificuldades se perderem, optou por centrar a aula nos objectivos que tinha estabelecido e remeter para uma ocasião posterior a sua exploração.

Face a contribuições que traduziam que a conjectura, com ternos de números, apenas era válida se todos fossem primos, ou seja, uma resposta incorrecta, Anita assumiu o papel de encaminhar as alunas que as apresentaram para um exemplo que permitia evidenciar a incorrecção da ideia. Noutros casos, a confrontação com este tipo de respostas, originou a reformulação de perguntas antes colocadas de modo a torná-las mais precisas até os alunos verbalizarem ideias correctas: por exemplo, quando procurava que os alunos se posicionassem em relação à validade da conjectura para ternos de números depois de se terem confrontado com um caso que não a verificava. Além disso, quando Júlia referiu que a conjectura para pares de números era verdadeira porque se verificava para alguns casos, verbalizou que a justificação apresentada era insuficiente. As reflexões de Anita sobre a aula revelam, no entanto, que este modo de agir não a satisfez completamente. Por exemplo, lamenta ter deixado escapar a oportunidade de solicitar aos alunos que comentassem a resposta "para alguns é válido" apresentada por uma colega: "Escapou!.. (...) Mas acho que devia ter pedido" (TST 15, p. 46). Lamenta, também, que lhe tivesse escapado o "não chega" que se seguiu à justificação de Júlia: "Mas está aí outra dificuldade agora minha. Não devia ter-me escapado o "não chega", mas escapou... (risos) Podia ter dito só, por exemplo, "então eu ponho a seguinte questão"... Escapou... (risos). Há coisas que escapam..." (TST 35, p. 2).

Na aula em análise, nem todos os alunos se expressaram de forma audível. Casos houve em que alguns falaram num tom de voz de tal modo baixo que se tornava impossível serem escutados por quem não se encontrava muito próximo deles. Anita esforçou-se por alterar a situação. Solicitou-lhes, directamente, que falassem mais alto e afastou-se de alguns, tentando, por esta via, que elevassem o tom de voz. Nalguns casos foi bem sucedida, noutros nem tanto.

Problemas experienciados

Alguns continuam com as conjecturas, outros querem avançar para a ficha...

Uma fonte de dificuldades, para Anita, residiu na gestão de uma situação em que os interesses dos alunos, se bem que focados numa actividade matemática a que reconhecia valor, entraram em conflito com os objectivos pedagógicos que, num determinado momento da aula, informavam o seu modo de agir.

Subsequentemente a ter-lhes proposto que justificassem a conjectura formulada para pares de números, houve elementos da turma que investiram aqui os seus esforços. Outros, no entanto, dispersaram-se por actividades diferentes. Alguns destes tentam formular conjecturas explorando ternos de números, ou seja, tentam realizar na aula o trabalho que deveriam reservar para casa, e outros procuram resolver as questões, ainda não exploradas, incluídas na ficha de trabalho: "Alguns continuam com as conjecturas não sei do quê, outros querem avançar para a ficha não sei de onde (...) quer dizer... às tantas aquilo já era uma..." (TST 15, p. 39).

Nas palavras de Anita, "tenho que estar a vigiar isso tudo..." (TST 15, p. 39), ou seja, a apoiar os alunos para poderem progredir na justificação da conjectura e, ao mesmo tempo, a zelar para não se desviarem deste objectivo. O facto da ficha de trabalho incluir tarefas diferentes da que estava a ser explorada que eram mais mobilizadoras para alguns, dificultou, do seu ponto de vista, o trabalho: "Essa foi também uma dificuldade, a ficha ter outras tarefas" (idem). Na aula, procurando inverter esta tendência, "disse a alguns… Para a próxima corto a ficha e dou-vos só um bocado… (risos)" (idem). Do seu ponto de vista, esta é "uma técnica" (idem) a que pode recorrer, no futuro, para tentar evitar a dispersão dos alunos. Uma outra dificuldade derivou da actividade de formulação de conjecturas com ternos de números despertar mais interesse a alguns alunos, que "insistem mesmo em querer ficar nas conjecturas" (TST 15, p. 6), pelo que não foi fácil desviar a sua atenção para a actividade de justificação:

> Aqui a dificuldade tem a ver com o conseguir que a atenção dos alunos se foque na análise de uma conjectura que se pretende analisar, neste caso era para irem

> para a prova, quando surgem outras que lhes despertam mais interesse. (TST 35, p. 8)

Tal como fez durante a fase da aula em que os alunos testam a conjectura formulada com ternos de números, também nesta altura, a "opção" (TST 15, p. 20) de Anita foi "tentar que eles não se mantivessem na formulação das conjecturas relativamente ao caso dos três números" (idem). Esta opção, que pode ser interpretada como um recurso de que se serviu para resolver um problema com que se confrontou, enraizou-se nas mesmas preocupações que presidiram à anterior decisão. Manter a atenção dos alunos centrada num aspecto, o que teria vantagens, em particular, para que os usualmente têm mais dificuldades: "Tentavam encontrar conjecturas para aquilo que mandei para trabalho de casa (...) com medo que eles se desviassem muito do resto (...) tentei focá-los numa coisa, porque às tantas os outros já não sabem bem o que andam a fazer" (idem, pp. 20-1). Além disso, criar condições para os alunos aprofundarem, como desejava, os raciocínios que faziam, o que poderia ser facilitado pela existência de um tempo de reflexão mais longo proporcionado, em especial, pela instituição desta actividade como trabalho de casa: "Basta que sejam primos entre si dois a dois. (...) E eles estavam só nos primos e eu queria que eles fossem indo, no caso dos três números e não ficassem só aí" (idem, p. 21)

Eles estavam muito calados, mais do que o habitual

O papel do professor na aula de Matemática não deve ser, segundo Anita, o de alguém que faz, para os alunos verem, aquilo que estes devem aprender e, na sequência, lhes pergunta se o entenderam, ou não: "Não é chegar ali fazer eu e agora passem e não sei quê, ou perceberam e não sei quê... Não faço isso" (TST 15, p. 47). Referindo-se ao seu modo habitual de trabalhar nas aulas diz "não sei trabalhar de outra maneira sem ser eu a perguntar. Nem gosto" (idem). É com base nas contribuições que vai ouvindo e nos objectivos que visa, que vai delineando as interacções que estabelece com os elementos da turma e que a aula se vai desenvolvendo. Perspectivar deste modo o ensino da Matemática pressupõe que os alunos participam no discurso da aula, o que passa, antes de mais, por expressarem publicamente as ideias que têm. Remeterem-se ao silêncio é a pior dificuldade com que pode confrontar-se: "Eu acho que a maior dificuldade é, realmente, quando os alunos não falam… Essa é logo a pior que pode acontecer. Essa é a maior, sem dúvida (risos)" (E2, p. 6).

Um dos problemas que Anita enfrentou na aula em análise, derivou, precisamente, dos alunos estarem "muito calados, mais do que o habitual" (TST 15, p. 59): "Nesse dia até eu estava nervosa, porque eles estavam tão sossegados... Estavam mais sossegados do que o habitual ainda" (idem, p. 6). Por diversas vezes, refere que este comportamento pode ser resultante da presença da câmara de filmar: "Estes também participam mais se a câmara não estivesse lá…" (idem); "têm lá uma câmara e não se conseguem esquecer sempre disso" (idem, p. 44). Equacionamos, em conjunto, várias possibilidades para diminuir os inconvenientes relacionados com a gravação em vídeo das aulas. Anita considera, contudo, que, por enquanto, é preferível não alterar o que tínhamos acordado — "tens que ir normalmente" (idem, p. 44) — e destaca que em anteriores ocasiões a câmara não foi um elemento tão inibidor: "Mas não sei se te lembras, das outras vezes eles até falavam… Mas desta vez não falaram tanto…" (idem, p. 42).

O facto dos alunos participarem menos na aula do que o habitual, limitou as possibilidades de poder usar as suas contribuições como recursos para ajudar a turma a progredir nas tarefas que lhes propôs. Um exemplo paradigmático desta situação é o caso de Júlia:

> Ela [Júlia] já tinha dito a mim, e só a mim, exactamente aquela relação que eu pretendia que eles atingissem com o exemplo generalizável. Daí eu ter desabafado no final "pois, porque ela não disse nada" (…) disse-me praticamente ao ouvido, porque fala baixinho. Eu estava lá ao pé. (…) só que não queria dizer (E2, p. 5).

Enquanto circulava pela sala acompanhando o trabalho de pares dos alunos, Anita constata que Júlia descobriu um processo de justificar a conjectura que ia ao encontro do que pretendia que os alunos fizessem. Apercebe-se, ainda, pelas explicações da aluna, que sobretudo a partir de determinada altura, compreende, realmente, o porquê da relação: "Tanto que a Júlia acha depois óbvio, percebes? A maneira como ela me fala, apesar de não se ouvir, ela acha óbvio" (TST 15, p. 32). Solicita-lhe que partilhe o seu raciocínio com os colegas, mas Júlia "não quer falar" (TA 14/03/02, p. 16). Junto da aluna, procura convencê-la a alterar o seu comportamento, embora sem recorrer à autoridade que detém. Perante a resposta "Não consigo (*rindo-se*)" (Júlia, TA 14/03/02, p. 17), recorre ao humor para, sem a constranger, insistir na partilha: "Anita *(rindo-se)*: Tens medo? *(abre o bolso do casaco numa simulação de que se a resposta for afirmativa a aluna se pode aí esconder)*"; Júlia (*rindo-se*): Não!" (idem).

No entanto, Júlia permanece inflexível. Até ao final da aula, Anita manteve a "esperança" que o seu comportamento mudasse: "Sabes, eu estava sempre naquela esperança que ela eventualmente quisesse dizer (risos). Era uma esperançazinha. Podia ser que ela mudasse" (TST 15, p. 32). No entanto, "ela não quis mesmo" (idem), o que impediu que outros colegas da turma, que lutavam com dificuldades, pudessem usufruir dos benefícios que poderiam advir dos contributos que esta aluna poderia ter dado para essas dificuldades serem ultrapassadas.

Só que fala muito baixinho e depois não diz mais alto …

A par dos alunos estarem "muito calados", o discurso da aula foi, também, constrangido porque alguns usaram para comunicar raciocínios feitos um tom de voz pouco audível pela generalidade dos colegas. Este foi outro dos problemas com que Anita teve que lidar e que, em particular no caso de Renata, não conseguiu que fosse ultrapassado como desejava: "Só que fala muito baixinho e depois não diz mais alto... É um problema..." (TST 15, p. 41). O episódio *Ninguém te ouve!!...* ilustra as várias tentativas feitas para Renata se exprimir de modo a que os colegas a ouvissem e as estratégias adoptadas para que pudessem ter acesso à sua descoberta.

Ninguém te ouve!!…

1. Renata (*em voz muito baixa*): Porque…
2. Anita: Porque... Diz, diz (*faz um gesto incentivando-a a prosseguir*).

3. Renata *(em voz muito baixa)*: Porque quando estes três números são *(??) (o resto da intervenção não é perceptível)*
4. Anita: (*para a Renata falando com voz meiga*): Tens que falar um bocado mais alto se não a gente não te consegue ouvir...

A Renata fala para a Anita em voz muito baixa. Não é perceptível o que diz. A professora responde-lhe:

5. Anita: Não faz mal. Se não disseres bem não há problema. A gente discute. Qual é o problema?

A Renata prossegue em voz muito baixa. Não é perceptível o que diz.

6. Anita (*num tom de voz meigo mas de quem lamenta o facto*): Ninguém te ouve!!...
7. Cristina: Não te ouço...
8. Anita *(para a Renata):* Ela não te ouve... (*afastando-se da aluna*) Força! Diz lá.
9. Anita (*aproxima-se, de novo, de Renata*): Tu até já tinhas... *(baixa o tom de voz e num tom de cumplicidade parece estar a relatar-lhe o trabalho que ela tinha feito)*.

A Renata continua a falar num tom de voz muito baixo. (...)

10. Anita *(para Renata, afastando-se):* Porque é que desconfiaste daquela, diz lá... O que é que encontraste para aí no teu caderno?

A Renata eleva ligeiramente o tom de voz mas este mantém-se muito baixo. A professora escuta-a, vai acenando afirmativamente e pede-lhe para ir ao quadro explicar o que tinha feito.

11. Anita *(para a turma):* É assim, a vossa colega já fez os tais três que estão lá em baixo e agora fez aquele: 2,4,6.

A Renata, no quadro, decompõe em factores primos o 2, 4 e 6 (...)

12. Anita *(para a Renata):* E então? O que é que tens num lado, o que é que tens no outro e daí o que é que aconteceu?

A Renata não responde. Continua a fazer registos no quadro. (...)

13. Anita: Resumindo e concluindo. O que é que aconteceu com aqueles três números? Umh?

A Renata começa a responder numa voz muito baixa dirigindo-se à professora que lhe pede que fale mais alto porque "não se consegue ouvir". A aluna sobe ligeiramente o tom de voz (...)

14. Anita *(para a turma):* Olhem lá, o que é que aconteceu aqui?

(TA 14/03/02, pp. 11-3)

Este episódio surge quando Anita solicita a Renata que justifique porque afirma que a conjectura com ternos de números não é válida. Sabe que esta aluna fica embaraçada quando os colegas, procurando escutar o que diz, focam nela a sua atenção: "Calam-se completamente [os colegas, para poderem ouvir Renata]. Ela fica toda corada e atrapalha-se. Já chegou ao ponto de dizer "Ai!". Se os outros se focarem, todos nela...” (TST 35, p. 6). Quando a ouve iniciar, timidamente, a justificação, procura incentivá-la a prosseguir (§2) mas o seu tom de voz mantém-se muito baixo (§3). Anita só consegue aperceber-se do que diz porque se encontra muito próxima do seu lugar:

> Ela [Renata], realmente, diz-me a justificação, mas diz-me só a mim. O que ela faz é encontrar um caso e diz: *Experimentei com três números, só um é que era primo e não deu e portanto a propriedade não é válida para todos os casos*. (TST 15, p. 41)

Falando-lhe meigamente, começa por lhe chamar, explicitamente, a atenção para a necessidade de falar “mais alto” para todos poderem ouvi-la (§4, §6) e usa a intervenção de uma colega (§7) como um recurso para destacar esta necessidade (§8). Preocupa-se, também, em ajudá-la a lidar com os riscos inerentes à partilha de ideias privadas (§5) e a ultrapassar eventuais inseguranças quanto ao conteúdo do trabalho que realizou (§9). Além disso, tendo consciência de que a auditório que Renata visa com as suas intervenções é constituído pela professora, a partir de determinada altura, começa a afastar-se da aluna (§8, §10), tentando, por esta via, que ela se expresse de forma mais audível: “Vou lá para o fundo mesmo... Mas desta vez não deu... Já só me faltava fazer o pino!... (risos)” (TST 15, p. 42).

Todos estes movimentos, a par da entoação que usa para se dirigir a Renata, podem ser interpretados como meios a que Anita recorre para gerir uma situação em que estavam em jogo dois objectivos que, nalgumas ocasiões de que esta é um exemplo, entram em conflito. Por um lado, ensinar à turma, através de Renata, que as contribuições que se apresentam devem ser verbalizadas de modo a que todos, e não apenas ela própria, possam ouvi-las e, por outro lado, evitar que um aluno se sinta excessivamente perturbado e constrangido com a exposição pública: “Quase que lhe vinham as lágrimas aos olhos a falar quando estava sentada. Não foi muito, mas um bocadinho, percebes? Estava envergonhada” (TST 15, p. 3).

Nenhuma das estratégias adoptadas por Anita dá grandes frutos. Inflectindo o modo de agir, decide solicitar a Renata que vá ao quadro explicar a descoberta feita:

> Eu depois pedi-lhe para ela [Renata] ir ao quadro para ver se ela elevava o tom de voz, um bocado a forçar, percebes? Eu fiz isso com esperança que, às vezes, pudesse dar assim uma situação em que ela se fizesse ouvir... Como estavas tu, estava a câmara... Um bocado com a esperança que ela tivesse uma reacção ao contrário, percebes? Nunca se sabe, era tratamento de choque. Não resultou. (TST 35, p. 6)

Como as palavras de Anita evidenciam, apesar das suas expectativas, a situação pouco se altera: "Ela continua na mesma. Continua a falar muito baixinho e para mim. Eu chamo-lhe a atenção para isso, ela parece que até se esforçou mas não conseguiu" (TST 35, p. 6). Nas suas palavras, "às tantas eu interrompi e comecei a falar porque a miúda estava mesmo atrapalhada" (TST 15, p. 3). Ou seja, não vislumbrando outra alternativa para levar Renata a exprimir-se mais audivelmente —"Teve que ser. Como é que eu podia obrigar mais a miúda a falar mais alto?" (TST 35, p. 6) —, opta por assumir ela própria o papel de "explicar o que ela tinha feito" (idem). Existir uma justificação do tipo daquela que, em privado, Renata lhe tinha apresentado, isto é uma justificação centrada no porquê da refutação da conjectura para ternos de números, era essencial para a aula poder prosseguir no rumo que tinha delineado.

Renata é uma aluna que "argumenta muito bem" (Anita, E2, p. 5), que tenta corresponder às solicitações que lhe são feitas e que se empenha nas tarefas que são propostas. Se o que diz pudesse ser escutado pelos colegas, estes poderiam confrontar o que ouviam com o que pensavam, poderiam interpelá-la e a professora poderia apoiar-se nas suas contribuições para ajudar a turma a evoluir na aprendizagem da Matemática. Só que Renata "fala baixinho" e dirige-se apenas à professora. Em particular, a comunicação não audível, pelos alunos, das contribuições que apresentam, restringe os recursos do ambiente de trabalho tanto em termos de ensino como de aprendizagem. Limita as oportunidades dos elementos da turma confrontarem entre si pontos de vista, concordarem ou discordarem de ideias enunciadas e defenderem posições que assumem. Além disso, dificulta o alargamento, para lá do professor, da responsabilidade pela avaliação da actividade matemática da aula. Todos estes aspectos são valorizados por Anita que se vê, assim, confrontada com o desafio de como ajudar, não só Renata, mas também os colegas, a compreenderem que uma das responsabilidades que têm é falarem de um modo que possa ser ouvido por todas as pessoas que constituem a turma.

É muito difícil eu conseguir pôr um a interagir com outro

No âmbito da reflexão sobre a aula em que foi proposta a tarefa *Máximo divisor comum: Que relações?*, propus que analisássemos o papel dos alunos no discurso e que se usasse esta análise para perspectivar o trabalho futuro de modo a promover e facilitar o seu envolvimento em actividades de argumentação matemática. Esta proposta, que mereceu a adesão imediata de Anita e de Rebeca, originou uma troca de ideias que fez emergir duas questões com que ambas se debatem e preocupam: conseguir que os alunos interajam entre si a propósito das contribuições apresentadas e deslocar a fonte de legitimação das ideias da autoridade do professor ou do manual para a evidência matemática. Simultaneamente, contribuiu para iluminar alguns dos problemas com que Anita se confronta quando, em particular, procurar incentivar as interacções entre os alunos e ajudá-los a descentrar-se de si própria.

Debruçando-se sobre as interacções que existiram na aula, Anita observa que "há sempre um vem para mim, vai para eles... (risos)" (TST 15, p. 63). Considera que "era bom!…" (idem, p. 61) que, pelo menos nalgumas ocasiões, os alunos tivessem a iniciativa de justificar as contribuições que apresentam. Refere que se focam muito em si própria quando intervêm — "têm a mania de responder para mim" (idem, p. 66) — e que vários, em particular alguns dos que têm um bom desempenho matemático, "não valorizam o que os outros dizem" (TST 35, p. 3). Sente, além disso, que esperam que seja ela a decidir sobre a correcção ou incorrecção das ideias que apresentam: "É o professor quem deve dizer se está certo ou não está certo..." (TST 15, p. 64). Esta concepção, do seu ponto de vista, é "muito difícil de destruir" (idem), tal como lhe é difícil conseguir que os alunos conversem entre si, analisando criticamente as ideias uns dos outros, questionando-as, se acharem que é de o fazer, e fundamentando as posições que assumem:

> Mas é muito difícil eu conseguir pôr um a interagir com outro. Mas lá está, é a tal cultura... E então estes que são ferrenhos nestas coisas!… (…) É [para os alunos, a validação do conhecimento matemático depende apenas da autoridade que o professor detém na aula]. Mas isso vem tão enraizado, tão enraizado, que quase que eles acham esquisito que seja o contrário, percebes? (…) Vem enraizado. Também vem de nós mas vem deles também, compreendes? Não te esqueças que eles têm o tal percurso. (TST 15, p. 64)

Na perspectiva de Anita, por vezes os alunos, entre os quais inclui alguns da sua turma, têm um percurso escolar que os conduz a “uma cultura agarrada a determinados tabus” (TST 15, p. 65). A este propósito evoca uma conversa tida com uma colega sobre uma ficha de trabalho através da qual Anita tentava que os alunos “descobrissem as coisas” (idem) salientando o comentário que ouviu: “dizia que se ela fizesse isso na turma dela (…) os alunos quase desconfiariam que ela não sabia, percebes? Portanto, cuidado…” (idem). Evoca, também, um episódio que se passou com uma das suas alunas: “Só para tu veres. Foi ver ao livro e disse *está aqui no livro, é verdade* (risos). Agora vê lá... Ainda não te tinha contado... (…) É um dos tabus...” (idem, p. 67).

Os referidos tabus fazem, segundo Anita, com que os alunos tenham “relutância” (TST 15, p. 66) em justificarem uns para os outros o que dizem e em descentrarem-se de si própria ou do manual enquanto fontes únicas de certificação dos resultados ou ideias matemáticas. Esforça-se por alterar a situação: “Estou sempre tentando mudá-los, moldá-los, no fundo, para aquilo que a gente quer, mas a cultura...” (idem, p. 65). No entanto, sente que não é fácil. Passa por encontrar formas de trabalhar com os alunos que permitiam “destruir os tais tabus” (idem, p. 62), um processo que “leva muito tempo” (idem) e que requer, em particular, que ela própria aprenda a lidar com os sentimentos que as reacções daqueles que relutam em enveredar por este caminho lhe suscitam: “Há sempre esse *feeling* [estranhar a atitude e a reacção dos alunos] por trás, percebes? E claro que eu não fujo dele por causa disso, mas sente-se um bocadinho” (idem, p. 65).

Tem muito valor aquele caminho que os ajudo a percorrer, embora, se calhar, se eles o conseguissem percorrer sozinhos ganhassem mais

Como anteriormente referi, na aula em análise, Anita alterou o seu modo habitual de trabalhar com os alunos. Usualmente, quando vê que se confrontam com dificuldades, dá-lhes algum tempo para pensarem e se vê que não as conseguem ultrapassar tenta ajudá-los “dando dicas” (TST 15, p. 27), ou seja, apresentando “pequenas ajudas que podem permitir avançar” (E4, p. 9) mas tentando evitar fazer ela própria o trabalho que pretende que os alunos façam: “são coisinhas pequeninas. Não é resolver as coisas por eles. São niquinhas” (idem).

Nas comparações que, recorrentemente, faz com o trabalho desenvolvido com outra turma a propósito da mesma tarefa, sublinha que aí interagiu mais com os alunos, colocou-lhes mais questões, assumiu mais o controlo da actividade — “tomei mais pulso” (TST 15, p. 7) — e, assim, foi-os fazendo “subir os degraus” (idem, p. 15). Ou seja, através das dicas que apresentou e das intervenções que fez, estruturou a participação dos alunos, amparou as tentativas que iam fazendo para realizarem a tarefa e, na medida em que os foi ajudando a ultrapassarem dificuldades, simplificou o seu papel. Questiona-se, no entanto, se esta via não terá constrangido uma real apropriação da necessidade da prova da conjectura: “Até que ponto é que os outros [referência à outra turma] comigo a fazê-los subir os degraus tiveram tempo de se apropriarem mesmo dessa necessidade?” (TST 15, p. 15). É que, do seu ponto de vista, embora quando prepara as aulas pense “muitas vezes logo nesse tipo de interacção com eles” (idem, p. 37), por um lado, este modo de trabalhar tem valor e permite que a actividade progrida, mas por outro lado, “às vezes não deixa caminhar sozinho” (idem, p. 37):

> Interagi mais… [referência à outra turma] Mas, por outro lado… Repara lá. É assim. O interagir é bom e é importante e tu vês... Por outro lado, também o eles subirem os degraus também é importante, percebes? E eu não sei... Lá está. Subirem os degraus sozinhos e aqui sou sempre eu, às vezes, a ver, a ajudar. Também não sou sempre, percebes? Mas dei-lhes menos tempo... (TST 15, p.7)

Ao colocar questões aos alunos, Anita não visa, apenas, ajudá-los a pensar de modo a irem progredindo nas tarefas que têm em mãos. Tem também a expectativa, de que participando nas interacções, possam interiorizar o próprio processo de questionamento que procura modelar e que, assim, comecem a colocar a si próprios perguntas do tipo daquelas com que os confronta: "Eu faço tantas vezes, que eles já deveriam conversar com eles assim... Mesmo com eles... Mesmo que não fosse com os outros, com eles..." (TST 15, p. 48). Tal como aconteceu na aula em análise, constata, no entanto, que a realidade, por vezes, não corresponde às suas expectativas e inquieta-se porque não compreende a razão da situação:

> Porque eu não levo tanto tempo, normalmente, a tentar assim... Mas depois como sou eu que dou muitas dicas, acho bem, ajudo-os a pensar, mas ao mesmo tempo, noutras situações análogas eu continuo a ter, às vezes, que continuar a fazer o mesmo percurso. Estás a perceber? (…) mas continuo com um certo *feeling* que acho que eles deviam já começar-se a perguntar a eles próprios, neste momento, estás a perceber? (…) E não sei porque é que isso não acontece!… (TST 15, pp. 47-8)

Todas estas interrogações prendem-se com uma questão com que Anita parece confrontar-se ao longo do trabalho de preparação e gestão de todo o ensino, e não apenas com o que, em particular, realizou para e nesta aula: Como apoiar todos os alunos no trabalho que realizam sem constranger o desenvolvimento da autonomia matemática que pretende que tenham e, neste processo, não negligenciar os que sente terem mais dificuldades? Considerando que quando coloca questões à turma para ajudar os alunos a avançar há alguns que são mais rápidos a responder e que "acabam por galgar degraus (…) e há outros que ficam para trás", (TST 15, p. 10) quis que estes últimos, nomeadamente no âmbito da justificação da conjectura formulada para pares de números, também tivessem a oportunidade de "subir um bocadinho": "E se calhar, se fosse de outra maneira, alguns até subiam um bocadinho... É esse problema" (idem). Quis possibilitar que todos tivessem a oportunidade de "subirem os degraus" ao seu próprio ritmo, de se debaterem com as dificuldades que lhes surgiam, de tentarem ultrapassá-las por eles próprios, pois se conseguissem percorrer sozinhos o percurso de justificação talvez "ganhassem mais":

> O que é que eu fiz, por exemplo, no 8º C? [a outra turma que lecciona] Para comparar. Dei a dica e interagi. Mas considero que é importante, lá está... Nunca... Tem muito valor aquele caminho que eu os ajudo a percorrer e não sei quê... embora, se calhar, se eles conseguissem percorrê-lo sozinhos ganhassem mais. Mas depois não podemos porque não temos tempo... Estás a perceber? Mas seria óptimo... É assim. Se tu me desses um espaço só para fazer isso, assim essas coisas, eu gostaria imenso, mesmo com o tempo todo. Se não tivesse limitações. Dando menos dicas e mais devagar, percebes? Eu gostava... Mas isto é um dilema... Grande, mesmo! (…) Encontrar um equilíbrio é difícil... (risos) (TST 15, pp. 49-50)

A opção tomada durante a aula — "Dar muito tempo para pensarem apostando que iam lá sozinhos" (TST 15, p. 20) — parece constituir o modo que, nesta ocasião, adoptou para lidar com a referida questão. Pode, simultaneamente, considerar-se que a forma como geriu a parte da aula focada na justificação da conjectura foi uma experiência que quis fazer: "Aqui, no fundo, eu quis testar para ver até onde é que eles vão sozinhos, percebes? Apostei nisso" (TST 15, p. 57). O que parece ter motivado a experiência é a convicção de que, pelo menos em determinadas circunstâncias, o tempo é o factor chave para os alunos progredirem mesmo que se confrontem com dificuldades e o professor apenas assuma o papel de regulador da actividade que desenvolvem:

> A opção de ter dado mais tempo (…) é provocada por uma convicção que eu tinha (...) A convicção de que se lhes desse tempo suficiente eles eram capazes de lá ir com pouca intervenção da minha parte. (Anita, TST 35, p. 10)

Embora pense que este processo "é que era interessante" (TST 35, p. 10), Anita salienta que a sua convicção "sai completamente arrasada" (idem) no final da aula, pois, com muito poucas excepções em que se destaca Júlia, "vi que mesmo dando-lhes muito tempo, eles não foram capazes" (idem). Constata que "continuam a agarrar-se os bons, os médios e os mais fracos não vão. Isso é sempre... Isso é verdade, infelizmente é assim..." (TST 15, p. 57). Considera que "podia ter sido oportuno" (idem), a partir de determinada altura, seguir o processo de trabalho usual, ou seja, interagir com os alunos ajudando-os a avançar através das "dicas" que apresentasse. Quando a interpelo sobre o que fazer, no futuro, tendo em conta a experiência vivida, diz: "É ser um bocadinho mais rápida, é dar dicas quando eles estão com dificuldades... (risos) Mesmo que tenha grandes expectativas, não é?

Mesmo que tenha..." (TST 15, p. 50). Tendo em conta estas reflexões, poder-se-á colocar a hipótese da vivência da situação ter trazido a Anita um acréscimo de consciência para o facto do tempo que se concede aos alunos para trabalharem ao seu próprio ritmo, embora seja um aspecto importante que deve ser tido em conta na gestão do ensino, poder não ser, em vários casos, suficiente para avançarem na aprendizagem da prova matemática e, em geral, da Matemática.

A propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas*

A tarefa *À procura de dízimas finitas* foi apresentada por Anita em 13/01/03. Nesta data tinham passado cerca de catorze meses desde o início do projecto de colaboração. Entretanto a colega tinha explorado esta tarefa e as sessões de reflexão sobre estas aulas tinham já decorrido. Dadas as características da tarefa e a observação das aula da colega, Anita intuía que poderia originar boas oportunidades dos alunos se envolverem em actividades de argumentação matemática. Simultaneamente, considerava que se poderia articular, naturalmente, com os temas que planeava trabalhar no momento: "A própria tarefa estava integrada curricularmente nos conteúdos que eu ia dar na altura. Aquela propriedade das dízimas vinha mesmo a calhar. Esta é uma preocupação que temos tido sempre. Articular as tarefas com os conteúdos curriculares mais específicos" (TST 41, p. 2, 07/02/03).

A análise das aulas leccionadas pela colega com a mesma tarefa, fez sobressair a importância dos alunos terem uma boa compreensão do significado de dízima finita, de fracção decimal e da representação algébrica deste tipo de fracções, aspectos relevantes para poderem descobrir a prova algébrica de uma das conjecturas que Anita esperava que formulassem. Esta troca de ideias leva-a a decidir dedicar uma atenção especial a estes aspectos previamente às aulas que dedicaria à sua exploração quando trabalhasse com a turma os tópicos dízimas finitas e infinitas, periódicas e não periódicas. A tarefa poderia constituir, segundo Anita, uma boa possibilidade de encerramento e sistematização da actividade desenvolvida a este propósito.

Panorama geral sobre as aulas

A turma envolvida no projecto trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas* durante três tempos lectivos com a duração de 90 minutos cada. Na fase da preparação das aulas, Anita considerou que duas poderiam bastar para a exploração e discussão. Imaginou que na primeira, depois de analisar se os alunos "tinham algumas dúvidas de interpretação" (TST 41, p. 6), formulariam conjecturas, trabalhando em pares, e que cerca de 40 minutos antes da aula terminar "recolhia as conjecturas" (idem) e, em conjunto, veriam "as que eram refutadas ou não e porquê" (idem, p. 7). A segunda aula seria dedicada à "prova, eventualmente, a discussão de alguma conjectura que não tivesse sido analisada na aula anterior, e depois a reflexão sobre as limitações da máquina de calcular, etc." (idem, p. 7). Como "principais objectivos" (idem, p. 2) tinha estabelecido que os alunos "pesquisassem, fizessem experiências, que depois argumentassem em relação às conjecturas que formulassem e que, por último, chegassem a uma prova" (idem). Além de ter explorado a tarefa do ponto de vista matemático, tinha, também, preparado algumas sugestões a apresentar no decurso do acompanhamento do trabalho de pares, caso considerasse que havia vantagens em o fazer, inspirando-se, nomeadamente na troca de ideias que ocorreu no grupo de pesquisa a propósito das aulas da colega:

> Eu explorei a tarefa, pensei em algumas possibilidades relativamente ao que podia acontecer, fiz a demonstração, pensei e levei, entre aspas, na manga sugestões para o caso de não surgir nenhuma conjectura, porque lembrava-me da turma da Rebeca numa altura se ter dispersado (...) Caso fosse necessário tinha pensado sugerir que organizassem os dados numa tabela e depois dar mais 5 ou 10 minutos. (TST 41, p. 6)

Só que, nas suas palavras, "não fiz nada disso" (TST 41, p. 7). No decurso da actividade da aula, deu-se conta que, contrariamente ao que esperava, havia ainda alguns problemas com a noção de conjectura — nomeadamente com a apropriação da ideia de que as conjecturas têm um carácter provisório e que esta especificidade não lhes diminui o valor — e dificuldades relacionadas com a utilização correcta do conceito de contra-exemplo. Face a esta situação, opta por dedicar uma atenção particular a estes aspectos, acrescentando, assim, aos objectivos visados, novos objectivos, fruto das circunstâncias concretas com que se depara: "Eu quando planifiquei as aulas pensei que essas questões estavam mais resolvidas. Quando vi que essas noções não estavam consolidadas, tomei essa opção, introduzi esses objectivos, digamos assim" (TST 41, p. 5).

Em qualquer das aulas, houve momentos em que os alunos trabalharam em pares — trocando, por vezes, impressões com colegas de outros pares sentados proximamente — e outros momentos de trabalho colectivo em que eram, conjuntamente, analisadas e discutidas ideias provenientes do trabalho de pares ou em que a professora interagiu com os alunos de modo a produzir a prova algébrica de uma das conjecturas formuladas. Estas modalidades de trabalho interpenetraram-se, ou seja, durante as fases de discussão foi frequente a existência de momentos curtos em que os alunos trabalharam em pares, por indicação de Anita, na sequência dos quais era retomado o trabalho com toda a turma.

Aula de 13/01/03

Estruturalmente, esta aula tem três partes principais. A primeira foi muito breve. Depois de escrever o sumário no quadro — Tarefa *À procura de dízimas finitas* — Anita distribui uma ficha de trabalho com o enunciado, recomenda aos alunos que o leiam com atenção e que explorem a primeira parte. Certifica-se, também, que têm máquinas de calcular e destaca a importância de fazerem registos sobre o trabalho que realizam. Na segunda parte da aula, a mais longa, os alunos trabalham, empenhadamente, em pares analisando fracções do tipo 1/n, seleccionando as que originam dízimas finitas e formulando conjecturas com base nas suas observações. Na terceira parte, iniciada cerca de 30 minutos antes do final da aula, a actividade começa por se centrar na apresentação, pelos alunos, das conjecturas formuladas e seu registo, no quadro, pela professora. No conjunto são comunicadas seis conjecturas que vêm a originar cinco pela fusão de duas. Em seguida, a ênfase do trabalho desloca-se para a análise das duas primeiras conjecturas registadas, visando tomar decisões sobre a sua validade ou não. Porque a segunda originou muitas dúvidas de interpretação, uma parte substancial da actividade da turma centrou-se, nesta fase, na clarificação e compreensão do seu enunciado. Quando a aula está muito perto do final, Anita decide interromper a discussão relativa à validade desta conjectura e solicita aos alunos que prossigam o trabalho em casa. Indica que devem, também, pensar na segunda parte da ficha de trabalho e apresenta uma "sugestão para vos ajudar a fazer a análise de uma conjectura" (TA 13/01/03, p. 14): "Vão olhar para o denominador de cada uma delas [fracções que originaram dízimas finitas] e vão tentar decompô-lo em factores primos, para ver se descobrem alguma particularidade" (idem). Uma vez que pretendia prosseguir a discussão das conjecturas, tal como tinham sido formuladas, solicita a uma aluna o empréstimo dos registos feitos: "Da primeira para a segunda aula tomei uma opção que foi pedir a um aluno que tivesse passado para me emprestar a folha para registar as conjecturas num acetato como estavam e depois poder discutir" (TST 41, p. 6).

Aula de 16/01/03

Nesta aula podem distinguir-se duas partes principais. A primeira, que ocupou a maior parte do tempo, inicia-se com a projecção de um acetato, organizado por Anita com base nos registos da aluna, em que estão escritas todas as conjecturas apresentadas na aula anterior excepto a de Maria[62] que não era perceptível nestes registos. Esta conjectura é acrescentada, mais tarde, pela mão desta aluna. Globalmente, o trabalho desenrola-se através de um conjunto de ciclos constituídos por três etapas. São elas a (a) leitura de uma das conjecturas, (b) a sua análise e

[62] Embora as conjecturas sejam provenientes do trabalho de pares e, por isso, da autoria, em princípio, de dois alunos, por facilidade de escrita, utilizo, para as diferenciar, o nome de apenas um dos seus autores. É plausível considerar que, nalguns casos, esta autoria seja partilhada por mais do que dois elementos da turma, uma vez que houve troca de ideias entre colegas de mesas próximas.

discussão (c) e a tomada de posição relativamente à sua validade: conjectura refutada pela indicação de um ou mais contra-exemplos ou conjectura que resistiu a todas as tentativas de refutação feitas. Neste âmbito, foi provada a conjectura de Maria a partir da sua verificação por todos os casos referidos no enunciado.

A segunda parte da aula foca-se, em primeiro lugar, na apresentação, feita por um aluno, das regularidades que descobriu nos denominadores das fracções do tipo 1/n que originam dízimas seguindo a sugestão apresentada pela professora no final da aula anterior. Em segundo lugar, na formulação, pela turma, de uma conjectura que as tivesse em conta. O registo, no quadro, do enunciado da conjectura só é terminado, pelo aluno, muito perto do final da aula e é sobre o toque de saída que Anita indica o trabalho que deve ser realizado em casa:

> Vão pensar nestas que não refutámos em relação à segunda questão. E eu quero ver por escrito a vossa opinião em relação à segunda questão (...) Temos conjecturas que resistiram. (...) é escrever qualquer coisa sobre como é que poderiam provar... já que resistiram... ou não. (TA 16/01/03, p. 18).

Posteriormente, através das questões que coloca, clarifica que as conjecturas que devem ser usadas para explorar a segunda parte da tarefa são uma não refutada cujo enunciado contempla a generalidade das fracções do tipo 1/n e não apenas algumas delas (conjectura de Roberto) e a que acabou por ser escrita no quadro. A formulação desta última, é posteriormente, simplificada, ficando registado o seguinte enunciado: "As dízimas finitas são aquelas em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos $2^n x 5^m$ com n,m $\boxed{}$" (TA 16/01/03, p. 18) (conjectura "c. pot.")[63].

Aula de 20/01/03

A exploração da tarefa *À procura de dízimas finitas* foi dada por concluída, na aula, no final dos 90 minutos. Anita começa por averiguar se os alunos realizaram o trabalho que lhes propôs no final da aula de dia 16. Constata que muitos não o

63 Na aula de dia 20/1/03 este enunciado foi ligeiramente reformulado, pela turma, de modo a torná-lo mais preciso. Em qualquer dos casos, designarei esta conjectura por "c. pot.".

fizeram e que alguns dos que sobre ele se debruçaram pouco progrediram. Regista no quadro, por indicação de elementos da turma, a conjectura de Roberto e a "c. pot." e solicita que, em trabalho de pares, investiguem se elas se mantêm quando se consideram fracções com numeradores diferentes de 1. Foi esta actividade, que corresponde à segunda parte da tarefa incluída na ficha de trabalho, e a discussão colectiva de vários casos apresentados como possíveis contra-exemplos para a conjectura "c. pot.", que ocuparam a primeira parte da aula.

A segunda parte centra-se no aperfeiçoamento da conjectura "c. pot." de modo a contemplar fracções do tipo k/n com n número natural e k número inteiro. A ideia de simplificar as fracções que não estão na forma irredutível surge por iniciativa de uma aluna, ainda na primeira parte da aula. É apoiando-se nesta ideia, na análise de alguns exemplos e em sugestões dos alunos, que Anita regista no quadro o enunciado de uma nova conjectura: "As dízimas finitas são aquelas que resultam de uma fracção irredutível em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos $2^n x 5^m$ com n,m $\square$" (TA 20/01/03, pp. 11-2) (conjectura "c. pot. f.i.").

A última parte da aula inicia-se quando desafia os alunos a provar esta conjectura. Numa primeira fase, a actividade desenvolvida em pequenos momentos de trabalho de pares e colectivamente, centra-se na transformação de um caso particular de uma fracção do tipo $k/2^n x 5^m$, com $k \neq 1$ numa fracção decimal. Numa segunda fase, Anita tenta que os alunos, inspirando-se nesta actividade, apresentem ideias que permitam a produção de uma prova algébrica da conjectura, um dos objectivos que visava. O final da aula chega quando a turma, partindo de $k/2^n x 5^m$ e supondo n>m, conclui que esta fracção é equivalente a $k x 5^{n-m}/10^n$. Como trabalho escrito, a entregar posteriormente, Anita solicita que realizem a prova considerando o caso n<m e que, além disso, "vão provar o recíproco disto, ou seja, (...) nós vimos que as dízimas são estas e eu quero saber é se toda a dízima finita também se reduz àquela forma (TA 20/01/03, pp. 24-5).

Analisando o conjunto das três aulas, Anita refere que "se calhar devia dar mais atenção" (DEA, 25/02/03, p. 3) ao trabalho de casa, em particular, ao tempo que reserva, no final da aula, para o indicar: "Olhando para trás parece que o faço a 'correr'" (idem). Considera que esta razão não explica o facto dos alunos não o terem feito: "não digo que foi por isso que não o fizeram" (idem). Pensa, no entanto, que de futuro importa gerir o tempo da aula de modo às indicações não serem apresentadas apressadamente: "Reservar mais tempo no final da aula, quando pretendo pedir que façam algo em casa" (idem).

Ao fazer o balanço da globalidade da actividade desenvolvida e dos objectivos que a orientavam, Anita indica que se justificou ter investido mais um tempo lectivo, do que o inicialmente planeado, na exploração da tarefa: "Depois vieram a ser três [aulas] mas justificou-se" (TST 41, p. 2). Nas suas palavras, "consegui que formulassem conjecturas, consegui que as argumentassem e defendessem, esforcei-me bastante por pôr a Júlia sem ser perdida". Salienta, contudo, que "Tinha mais objectivos em termos de prova e limitações da calculadora que não cheguei a atingir" (DEA, 25/02/03, p. 3).

Anita não se debruça sobre as razões que a levaram a decidir não prolongar a exploração da tarefa para uma nova aula, equacionando o seu trabalho de modo a ter em conta os objectivos que considerou não ter atingido. Uma hipótese explicativa poderá ser a de ter sido ultrapassado o período de tempo que pensava dedicar-lhe e este prolongamento entrar em conflito com a sua planificação curricular. Aceitando esta hipótese, poder-se-á conjecturar que a opção de remeter para trabalho futuro alguns dos aspectos que pretendia abordar nestas aulas, foi a solução que encontrou para lidar com este conflito e não deixar cair no esquecimento uma vertente da actividade matemática — a questão da prova — que considera ser importante. Esta opção, não teve, no entanto, os frutos que esperava. A análise dos trabalhos dos alunos revelou a Anita que a quase totalidade daqueles que o entregaram apenas se debruçou sobre a prova considerando o caso $m>n$. Esta situação leva-a a reafirmar a importância de dedicar uma atenção mais cuidada à proposta dos trabalhos que os alunos devem fazer em casa:

> Há uma coisa que eu não escrevi aqui, mas com que se calhar devia ter mais cuidado: é quando mando os trabalhos para casa. Devia ser mais clara. Aquele trabalho que eu pedi para fazerem em casa no final da última aula em que explorámos a tarefa das dízimas finitas, acho que os alunos não perceberam. (E3, p. 98, 18/03/03)

Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas

A actividade de formulação e avaliação de conjecturas percorreu as três aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas* e ocupou a maior parte do tempo dedicado a esta tarefa. Organizo esta secção em três subsecções. Dedico a primeira ao trabalho realizado por Anita no âmbito do acompanhamento do trabalho de pares localizado na segunda parte da aula de dia treze, altura em que os alunos formularam a maior parte das conjecturas que vieram a ser discutidas na turma. Em segundo lugar, debruço-me sobre os principais momentos existentes ao longo das três aulas em que a actividade se focou, fundamentalmente, na partilha de conjecturas formuladas pelos pares de alunos ou em que a turma se envolveu, conjuntamente, na construção de um enunciado. Uma vez que o aperfeiçoamento de conjecturas se entrelaçou, fortemente, com a avaliação da sua validade tendo em vista evitar a sua refutação por casos destacados pela professora ou exemplos propostos pelos alunos, integro a análise deste aspecto na terceira subsecção intitulada *Lidando com a avaliação de conjecturas.*

Acompanhando o trabalho de pares durante a formulação de conjecturas

O trabalho de pares conducente à formulação de conjecturas foi, prioritariamente, acompanhado por Anita e, em casos pontuais, por mim. As intervenções da professora junto dos alunos, embora diversificadas, mantiveram um traço em comum: não os substituir no essencial da actividade matemática que pretendia que realizassem. Ou seja, depois de se certificar que os vários pares compreenderam a tarefa, clarificando, quando necessário, o significado do seu enunciado a partir de questões que lhe eram colocadas, deixou a cargo dos alunos a escolha de casos particulares de fracções do tipo 1/n, a sua transformação em dízimas, a identificação das que são finitas, a análise de regularidades existentes nos denominadores das fracções que as originam e a construção de um enunciado que traduza as regularidades descobertas.

Durante este processo, Anita escutou os alunos, procurando compreender os raciocínios que iam fazendo, e estimulou-os a prosseguirem o trabalho. Por exemplo, quando um dos pares (Roberto e colega) lhe diz que fez vários testes à conjectura que formulou e que não conseguiu encontrar nenhum contra-exemplo, depois de analisar o seu trabalho, indica-lhes que investiguem se ela se mantém para fracções com numeradores diferentes de 1, ou seja, que iniciem a exploração da segunda parte da tarefa (ROA, 13/01/03, p. 3).

Algumas das interacções entre Anita e os alunos centraram-se no conteúdo das ideias ou questões que lhe são apresentadas. Por exemplo, clarificou aspectos matemáticos relacionados com o significado de dízima finita ou infinita periódica e não periódica e sugeriu que observações feitas para fracções cujos denominadores eram números naturais pertencentes a conjuntos limitados (por exemplo, até 20) fossem analisadas noutros conjuntos e se tentassem tornar mais gerais. Outras focaram-se, sobretudo, no processo de discurso. Através das intervenções feitas, procurou, em particular, que partilhassem entre si as ideias que surgiam de modo a complementarem-nas e/ou a ultrapassarem desacordos (ROA 13/01/03, pp. 2-3). Houve interacções que se prenderam, também, com os registos da actividade desenvolvida. Por exemplo, ajudou alguns elementos da turma a organizarem os exemplos que iam explorando e as descobertas que iam fazendo. Além disso, incentivou, sistematicamente, todos os alunos a fazerem registos pormenorizados das suas explorações e conjecturas para que melhor pudessem analisá-las, criticamente, durante o trabalho de pares e/ou discuti-las com a turma. Havia elementos da turma que negligenciavam este aspecto pelo que a maior parte das intervenções de Anita durante esta fase da aula, teve por objectivo que se apercebessem da sua necessidade e importância (ROA, 13/01/03, p. 3). Esta insistência deu os seus frutos. Na reflexão escrita elaborada por Anita sobre o trabalho realizado nas aulas em análise, incluiu nos "aspectos mais conseguidos" (DEA 25/02/03, p. 2) o "pedir para registarem todo o trabalho desenvolvido, quer refutassem, quer não, as conjecturas a que chegaram (evitar o faz, refuta, apaga)" (idem).

Quando equacionou na fase de preparação das aulas a sua actuação durante o trabalho de pares, Anita colocou a hipótese de apresentar uma sugestão à turma caso não surgisse, a partir dos alunos, conjectura alguma: "Tinha pensado, no caso deles não conseguirem formular nenhuma conjectura, dar a tal sugestão de decompor os denominadores em factores primos e dar, a seguir, mais 10 ou 15 minutos para ver que conjecturas saíam" (TST 41, p. 6). Ao acompanhar este trabalho, dá-se conta, não só de que a generalidade dos elementos da turma estão entusiasmados com a tarefa e com o que vão descobrindo, mas também que a sua actividade está a originar conjecturas variadas. Constata, ainda, que "alguns já estão bastante adiantados, nomeadamente o Roberto" (TST 41, p. 10). Decide, assim, não apresentar a referida sugestão. Ao considerar que chegou o momento de dar por concluído o trabalho de pares, opta por centrar a actividade da turma na partilha das conjecturas já formuladas: "E eu opto por eles apresentarem as conjecturas porque se lhes dou, nesta altura, a dica, eles já não largam as experiências" (idem).

Na primeira aula, Anita "estava com a ideia de apanhar todas as conjecturas e dar valor a todas" (TST 41, p. 15). A valorização das conjecturas formuladas pelos alunos, independentemente da sua validade, é uma ideia que retoma, em várias ocasiões, à medida que vai reflectindo sobre as aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*. É no valor que lhes pretende atribuir que parece enraizar-se a opção tomada. Face à intuição de que a exploração de casos particulares de fracções que originam dízimas finitas, usando a sugestão de decompor em factores primos os seus denominadores, poderia, ao mobilizar mais os alunos, remeter para plano secundário as conjecturas que tinham descoberto, adia, para mais tarde, a apresentação dessa sugestão. Privilegia os caminhos que, por iniciativa própria, os alunos decidiram seguir, dando-se, assim, início a uma nova fase da aula centrada na apresentação e análise das conjecturas surgidas.

Lidando com a apresentação e formulação de conjecturas

Nesta subsecção centro-me, em primeiro lugar, no modo como a Anita lidou com a enunciação pública das diversas conjecturas formuladas durante o trabalho de pares na aula de dia 13. Por vezes, refiro aspectos relativos ao trabalho que realizou noutras ocasiões quando considero que as opções tomadas nesta fase se mantiveram e orientaram o seu modo de agir subsequente. Em segundo lugar, foco-me na actividade desenvolvida na turma quando Anita, tentando capitalizar as descobertas feitas por um aluno a partir da sugestão referente à decomposição em factores primos dos denominadores das fracções que originam dízimas finitas, procura que, em conjunto, seja construído o enunciado da conjectura "c. pot.".

Gerindo a partilha das conjecturas formuladas pelos alunos

A análise da globalidade do trabalho que Anita realizou com os alunos durante a fase de apresentação das conjecturas que formularam a partir de fracções do tipo 1/n, permite evidenciar que foi, fundamentalmente, orientado por dois tipos de objectivos: (a) recolher e valorizar todas as conjecturas que emergissem e (b) registar no quadro o seu enunciado, remetendo para uma ocasião posterior, a discussão de excepções e/ou aperfeiçoamentos e também a sua validade. A figura 9 constitui uma representação da macroestrutura da actividade que, neste âmbito, foi desenvolvida.

Anita inicia a fase de apresentação das conjecturas solicitando aos alunos que indiquem "uma conjectura ou várias, independentemente de resistirem ou não a tentativas de falsificação" (TA 13/01/03, p. 1). No início da aula tinha-lhes pedido "para registarem as conjecturas todas, mesmo que depois as abandonassem" (TST 41, p. 10) e através desta intervenção que, nas suas palavras, constitui "uma opção" (idem), pretende "valorizar a actividade de formulação de conjecturas independentemente da sua validade. É para tornar esta ideia mais clara, para mostrar a sua importância" (idem).

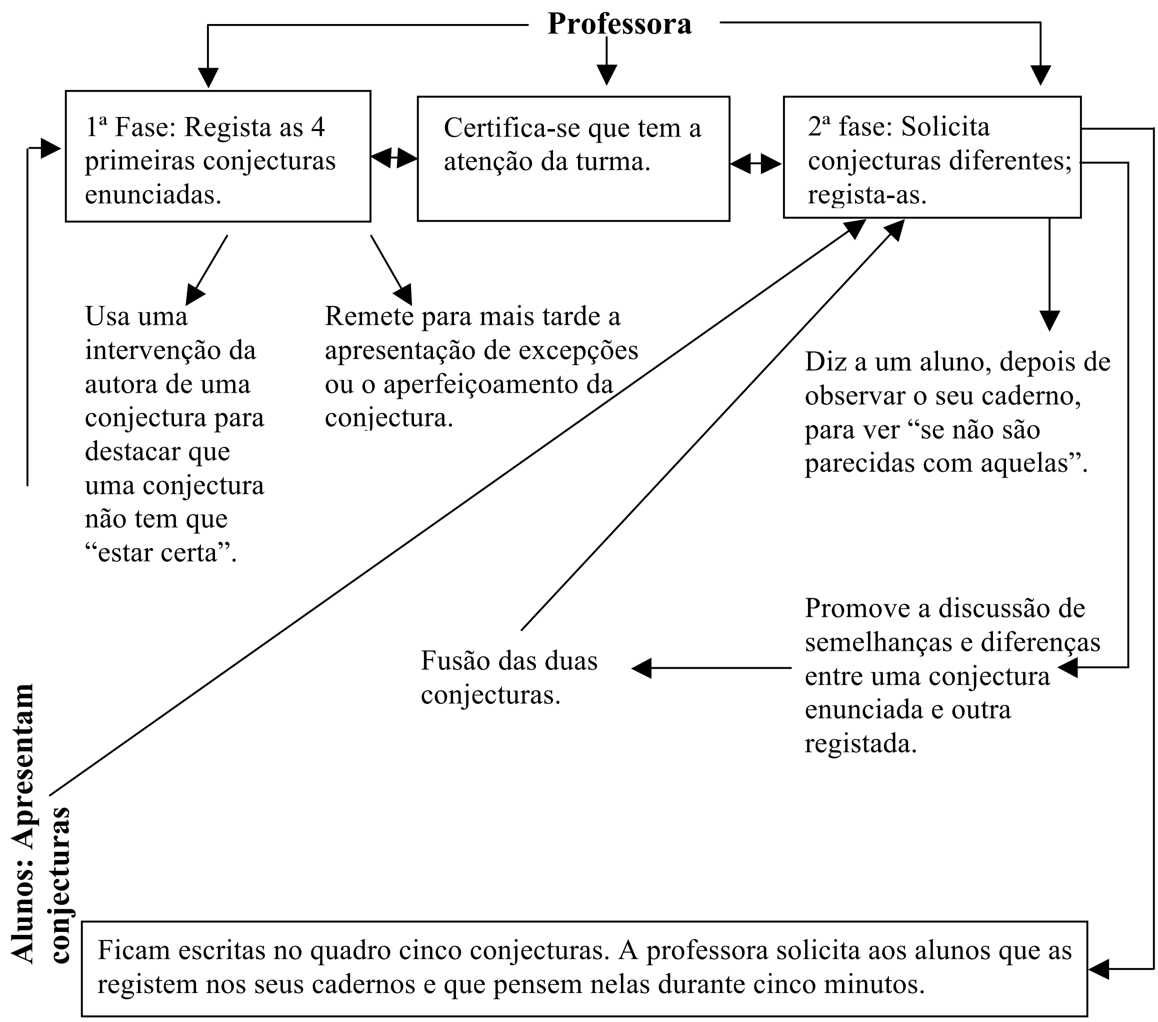


Figura 9: Apresentação de conjecturas na aula da Anita: Macroestrutura da actividade desenvolvida

Ao começar a fazer o registo no quadro da primeira conjectura a partir do que uma das suas autoras lhe vai ditando, apercebe-se que alguns elementos da turma parecem mais interessados em prosseguir a actividade anterior do que em participar no trabalho colectivo. Interrompe o processo de escrita e procura que todos se foquem no que vai ser apresentado: "Parem lá agora. Atenção! Diz lá" (TA 13/01/03, p. 1). Apenas prossegue quando considera que captou a atenção dos alunos.

Intervenções deste tipo foram feitas noutras ocasiões ao longo de toda a actividade de apresentação de conjecturas. Anita preocupa-se, não só, em criar as condições necessárias para que os enunciados sejam tornados públicos, como também em incentivar todos os elementos da turma a escutarem as ideias que são comunicadas para que possam compreendê-las, compará-las com raciocínios que fizeram e, mais tarde, discuti-las. Quando se dá conta que alguns alunos, enquanto os colegas enunciam as suas descobertas, prosseguem com a exploração de fracções visando aperfeiçoar as suas próprias conjecturas, procura, através das intervenções que faz, inflectir a situação de modo a trazer para primeiro plano a importância da escuta atenta: "entretanto há alguns que estão a querer continuar com as experiências porque querem melhorar, aperfeiçoar as suas conjecturas. E eu tento que eles ouçam os outros" (TST 41, p. 24). Este modo de agir foi recorrente e transversal aos vários momentos de trabalho colectivo. "Estar atenta a experiências/explorações 'independentes' do trabalho da turma durante a fase de discussão" (DEA, 25/02/03, p. 2) é um dos aspectos que Anita considera ter sido "mais conseguido" (idem) nas aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*.

Porque considera que a "turma é muito competitiva" (TST 41, p. 16) e os alunos "um bocado picuinhas", nesta ocasião adopta a disposição dos seus lugares na sala como critério organizador da apresentação. Começa, assim, pelos que estão sentados à primeira mesa da fila mais à esquerda e vai percorrendo, ordenadamente, todas as filas:

> Eu tinha uma noção, quando andei entre os alunos, de quais eram as conjecturas que tinham sido formuladas e de quem as tinha formulado, mas optei por ir pedindo as conjecturas por ordem para não fazer distinção entre eles. A ideia que me veio à cabeça foi pedir por ordem a todos. Como são um bocado picuinhas... (TST 41, p. 16)

Seguindo este critério, a apresentação das conjecturas decorre em duas fases. Numa primeira, Anita regista no quadro os enunciados indicados por um dos alunos de cada um de quatro pares. Em dois casos, remete para mais tarde a discussão de alguns aspectos que referem. Noutro procura tornar mais inteligível o conceito de conjectura e destacar o valor da actividade de formulação de conjecturas apoiando-se na intervenção de um elemento da turma. Na segunda fase, solicita a apresentação de conjecturas diferentes das já registadas. A opção é, por um lado, circunstancial: "Porque não tinha quadro... (risos). Tinha que fazer opções..." (TST 41, p. 25). Simultaneamente, considera que seguir por esta via é uma boa estratégia "porque eles habituam-se a distinguir e a comparar" (idem). Esta decisão proporciona a abertura para a turma analisar o que duas conjecturas têm em comum e o que as diferencia, o que origina uma nova conjectura resultante da fusão destas. No final de toda esta actividade ficam escritas no quadro cinco conjecturas que os alunos registam nos seus cadernos.

A observação e análise de alguns dos episódios de ensino localizados durante a partilha de conjecturas, bem como de reflexões de Anita, permitem ilustrar algumas das intenções que orientaram o seu modo de agir e compreender onde se enraízam algumas das opções que tomou. Contribuem, também, para iluminar o tom que procurou imprimir à actividade colectivamente desenvolvida noutros momentos em que tentava que os alunos tornassem públicas as conjecturas e/ou regularidades identificadas. Com estes propósitos incluo, em seguida, três episódios: *É uma conjectura, é uma conjectura!!!*, *Depois quando nós formos discutir vamos ver* e *Não liguem àquela, por enquanto, está bem?* Os dois primeiros localizam-se na primeira fase de apresentação das conjecturas e o terceiro após a segunda fase.

É uma conjectura, é uma conjectura!!!

1. Alda: As dízimas finitas podem ser 1 a dividir por alguns números pares e alguns múltiplos de 5. Há excepções. Temos aqui alguns exemplos.

A Anita regista no quadro: "As dízimas finitas podem ser 1 a dividir por alguns números pares e alguns múltiplos de 5".

2. Anita *(dirigindo-se à Alda)*: Depois quando a gente discutir entram essas coisas, está bem? Júlia tens alguma coisa a acrescentar a esta, em relação a essa forma que tu tinhas aí? Como é que é?
3. Júlia: Tenho, mas acho que não está muito certo.
4. Anita: É uma conjectura, é uma conjectura!!! *(ênfase)*
5. Júlia: Está bem, pronto. Eu sei que é uma conjectura. Uma fracção do tipo 1/n em que *n* é... pode ser... em que *n* é… isto agora é uma grande confusão, vamos lá ver como é que eu hei-de dizer isto…
6. Anita: Estás a improvisar, vá…
7. Júlia: Em que é *n* um múltiplo de 2…
8. Colega da Júlia: Um múltiplo par.
9. Júlia: Um múltiplo par, vá, menos os múltiplos de 3, ou múltiplos de 5…
10. Anita: Este menos é em relação a…

11. Júlia: É em relação aos números pares. Ou múltiplos de 5 menos os múltiplos de 15 e menos os números primos dão dízimas finitas.

Enunciado registado no quadro: "Uma fracção do tipo 1/n em que n é um múltiplo par menos os múltiplos de 3, ou múltiplos de 5 menos os múltiplos de 15 e menos os números primos dão dízimas finitas".

12. Anita: É assim… Quem é que tem mais conjecturas? Em primeiro lugar há uma coisa importante. Quando eu peço conjecturas… A Júlia está muito preocupada a dizer que não está certo. Se eu peço conjecturas…
13. Aluno: É para discutir depois…
14. Anita: Uma conjectura tem que estar certa?
15. Alunos vários: Não.
16. Anita: O que é que acontece a uma conjectura quando é sempre verdadeira?
17. Aluna: É uma conclusão.
18. Anita: É já uma conclusão. Portanto, conjectura como conjectura... Depois nós discutimos, mas ela como conjectura tem a sua própria quê?
19. Alunas: Opinião…
20. Anita: Opinião ou importância no processo, digamos assim. Maria, conjecturas?

(…)

(TA 13/01/03, pp. 1-2)

É com este episódio onde se revela o enunciado de duas das conjecturas formuladas, que se inicia a partilha das conjecturas. Ambas são escritas no quadro tal como as suas autoras as enunciam. Esta característica é comum à generalidade dos registos dos restantes enunciados. Quando Anita considera que há aspectos na formulação que poderão ser pouco inteligíveis ou ambíguos, interpela os seus autores visando tornar mais claras, para si própria e para a turma, as ideias apresentadas (por exemplo §10). É na sequência desta clarificação que a conjectura é escrita.

Observando a intervenção subsequente ao registo da conjectura de Alda (§2), constata-se que Anita remete para a fase da discussão a apresentação dos exemplos que esta aluna diz ter encontrado, com a colega, como constituindo excepções à sua conjectura. Ao reflectir sobre a aula, Anita não se pronuncia, em particular, sobre o porquê desta indicação. Poder-se-á considerar, no entanto, que se relaciona com a sua agenda para a fase da discussão das conjecturas e, em especial, com a intenção de proporcionar algum tempo aos colegas para reflectirem sobre esta e outras conjecturas antes de passarem à análise conjunta.

O traço mais marcante do episódio *É uma conjectura, é uma conjectura!!!* prende-se com o conceito de conjectura (§4, §12, §14, §16, §18, §20). Se a intervenção referente ao §4 se foca, por um lado, no significado deste conceito, por outro lado não é independente do conhecimento de Anita sobre a aluna que expressou a ideia que lhe deu origem (§3). Comentando esta intervenção refere:

> A Júlia diz *Está bem, pronto. Eu sei que é uma conjectura* [§5] porque ela antes tinha dito que tinha alguma coisa a acrescentar, mas que achava que não estava muito certo. Estás a ver? Por isso é que eu disse: *É uma conjectura, é uma conjectura* [§4]. É para destacar que uma conjectura não tem que estar certa. Tem a ver com o significado de conjectura. Mas ela quer é a perfeição!!!!... Ela acha que tem que ser perfeita, sei lá... (TST 41, p. 11)

Júlia é uma aluna cujo modo de estar na aula de Matemática e, em geral, o que pressente sobre o seu modo de ser, preocupam, particularmente, Anita. A ideia que sobre ela expressa nesta reflexão — "quer é a perfeição (...) acha que tem que ser perfeita" — é retomada em várias sessões de trabalho em que nos debruçámos sobre as suas aulas e originou, frequentemente, a discussão de estratégias que pudessem contribuir para ajudar esta aluna a aprender a assumir os riscos inerentes à actividade de formulação de conjecturas ou a contribuir com as suas ideias para o trabalho conjunto, mesmo não tendo a certeza da sua correcção ou exprimindo-as de uma forma titubeante.

Esta preocupação com Júlia não traduz, no entanto, que a professora a favoreça relativamente aos colegas: "Não é que eu privilegie a Júlia, atenção, não é nada disso" (TST 41, p. 14). Só que sabe, porque a aluna já o verbalizou em diversas ocasiões, que ela "não gosta de dar tiros no escuro. Ela tem essa maneira de estar" (idem, p. 3). Considera, além disso, que embora partilhe com os colegas algumas características, como é o caso da competitividade nem sempre saudável na turma, tem interesses e existem aspectos na sua personalidade que a tornam diferente dos restantes elementos: "É uma maneira de estar diferente. A Júlia é diferente" (idem, p. 3). O significado que atribui a este modo de estar e de ser diferente, pode ser iluminado pelas comparações que estabelece entre Júlia e outros alunos da turma:

> Enquanto que os outros são competitivos mas, pronto, se errarem assumem e vão para a frente... por exemplo, o Roberto quando estava no quadro a explicar até deu uma fífia, os outros riram-se mas ele conseguiu superar, não se deixou afectar por isso, com a Júlia as coisas não são bem assim... (TST 41, p. 3)

> Eles não chamam nomes uns aos outros nem nada, mas o tom, a maneira de estar... há uma competitividade pouco sã, às vezes... Acho que há pouca tolerância em relação ao erro dos outros... Por exemplo, enquanto que se for a Tita a falar, aguenta-se e reage e não sei quê, não se deixa afectar muito... a Júlia já não é assim. (...). Mas ela não se devia deixar levar por isso, porque tem todas as potencialidades e demonstra saber. É uma miúda com muitas capacidades, mas ao mesmo tempo sente-se. Pode ter a ver com a educação dela. (TST 41, p. 4)

Ao escutar, "mas acho que não está muito certo" (§3), intuindo que subjacente a esta resposta poderá existir uma sobrevalorização da perfeição que pode paralisar Júlia pelo receio excessivo que tem do erro, Anita procura, antes de mais, através da ênfase que coloca na palavra "conjectura", apelar às memórias da turma para a ajudar a assumir os riscos inerentes a qualquer exposição pública de pensamentos privados. Em muitas outras aulas, esta designação foi usada para significar uma afirmação de carácter provisório e, por isso mesmo, susceptível de discussão e alteração. A resposta de Júlia — "Está bem, pronto. Eu sei que é uma conjectura" (§5) — e, posteriormente, a intervenção de vários outros alunos (§13, §15), parecem revelar que, pelos menos alguns elementos da turma, conhecem este significado. Através deste modo de agir, Anita está, simultaneamente, a ensinar não só Júlia, mas também outros colegas, que na aula de Matemática não é a correcção de uma resposta que, por si só, determina o valor do trabalho que é realizado.

A intervenção "É uma conjectura, é uma conjectura!!!" dá os seus frutos e Júlia inicia a apresentação de um enunciado. Fá-lo de uma forma muito hesitante e o que diz revela que está insegura quanto ao modo de expressar as descobertas feitas. Anita incentiva-a a prosseguir usando, em particular, a expressão "estás a improvisar" (§6). Improvisar significa fazer algo adaptando o que existe, construir ou criar, de repente, sem preocupação ou plano prévio. A professora sabe, através do acompanhamento do trabalho de pares, que as anotações de Júlia estão "numa simbologia dela, codificado à sua maneira (...) digamos assim, era um grafismo" (TST 41, p. 11). Neste contexto, poderá supor-se que através da referida expressão, Anita tenta, implicitamente, transmitir a Júlia a ideia de que é possível e legítimo criar, no momento, um discurso que lhe permita descrever o que descobriu, mesmo que não seja tão bem articulado ou correcto como o que poderia resultar se se apoiasse numa preparação anteriormente feita. Nesta medida, poder-se-á supor que foi um recurso de que se serviu para ajudar a aluna, que sabe ser excessivamente perfeccionista, a enfrentar a sua insegurança.

Uma vez concluído o registo das ideias apresentadas por Júlia, a direccionalidade das intervenções de Anita muda. Passam a ter como audiência privilegiada, não esta aluna em particular, mas a globalidade da turma. O relato da resposta que considerou problemática (§12) é o meio de que se serve para focar aí a atenção dos alunos e para iniciar um conjunto de interacções através das quais procura dar visibilidade à provisoriedade inerente ao próprio conceito de conjectura e destacar o valor que pretende que os alunos lhe reconheçam: "É para valorizar as conjecturas, mesmo que depois sejam refutadas [referência a §12]. Depois um aluno diz*: "É para discutir depois…"* [§13] Este já percebeu. Depois, a seguir, reforço" (TST 41, p. 11).

O episódio *É uma conjectura, é uma conjectura!!,* no seu conjunto, permite elucidar como Anita nesta ocasião, tal noutras posteriores, procurou "rentabilizar as situações de sala de aula relacionadas com o valor das conjecturas enquanto tal" (DEA, 25/02/03, p. 2). As intervenções que fez a este propósito, localizadas nas duas primeiras aulas em que foi explorada a tarefa, surgiram a partir de contribuições apresentadas pelos alunos, quando considerou que, de algum modo, poderiam traduzir ou conduzir a uma desvalorização de algumas das conjecturas formuladas.

Por exemplo, na aula de dia 16, quando alguns elementos da turma fazem intervenções sobre o enunciado da conjectura de Júlia[64] que parecem denotar que

[64] Uso a expressão "conjectura de Júlia" para designar o enunciado que foi submetido à discussão na turma. Como ilustrarei, nomeadamente na tabela 10 que incluo na subsecção *Gerindo o processo de avaliação de conjecturas formuladas pelos alunos*, este enunciado é, parcialmente, diferente do que Júlia apresentou nos momentos da aula correspondentes ao episódio *"É uma conjectura, é uma conjectura!!"*.

estão a pôr em causa o modo que esta aluna adoptou para descrever as regularidades que descobriu nos denominadores das fracções que originam dízimas finitas, Anita diz: "Não faz mal, ela podia ter arranjado aqui uma maneira de cortar uma coisa que lhe desse jeito desde que apareçam ali os outros que lhe faltam" (TA 16/01/03, p. 2). A mensagem que está a pretender transmitir através desta intervenção é "qual é a diferença? A Júlia pode fazer isso" (TST 41, p. 36). Agindo deste modo, não só legitima a formulação adoptada por esta aluna, como ensina à turma que, em particular, no processo de formulação de conjecturas todos os raciocínios são válidos desde que permitam atingir o objectivo visado e tenham sentido em termos matemáticos.

Ainda na aula de dia 16, quando um aluno parece querer ultrapassar a discussão de uma conjectura, Anita não só não o permite, "porque todas têm importância, não é?" (TA 16/01/03, p. 9), como dirigindo-se à turma diz: "Não se esqueçam que as conjecturas são todas válidas" (idem). Esta indicação suscitou uma reacção de estranheza numa aluna, natural tendo em conta o significado que é atribuído na turma à palavra "válida" no âmbito do trabalho com conjecturas: "Cristina: Todas válidas?!…" (idem). Anita usa a oportunidade, em primeiro lugar, para clarificar o que, no contexto particular, entende por "válidas": "Não estava muito claro o que eu queria dizer e tive que esclarecer o que queria dizer com a palavra 'válidas'" (TST 41, p. 39). Em segundo, para destacar a importância da actividade de formulação de conjecturas através do que designa por "conversa relacionada com o trabalho dos matemáticos" (idem, p. 40). Referindo-se, especificamente, a esta "conversa", que apresento em seguida, diz "há aqui outra vez a tal opção de valorizar as conjecturas enquanto tal" (idem, pp. 39-40):

> Válidas no sentido daquilo que nós pretendemos, em termos da questão. Válidas em termos de verdadeiras já é outra coisa, atenção. Válidas enquanto trabalho, enquanto vocês observam qualquer regularidade ou particularidade e formulam uma determinada conjectura fundamentada naquilo que estiveram a analisar. Nesse aspecto são válidas para o dia-a-dia e para a pergunta em questão. Depois a validade, mesmo, matemática, depende, não é? Mas em todo o caso vocês próprios, aliás, estão a tentar fazê-lo… O que é que vocês estão a tentar fazer às vossas conjecturas? (...) Completá-las [repete a contribuição de uma aluna], aperfeiçoá-las... A partir de coisas que vêem, estão, no fundo, a tentar chegar a uma coisa que não consigam falsificar. E é mesmo assim que se faz a

> Matemática. As pessoas não tropeçam num algoritmo qualquer e olha é isto. Não. Primeiro vêem as coisas e depois tentam primeiro arranjar uma conjectura, porque ainda não provaram, que lhes pareça que não conseguem falsificar. Às vezes têm que mudar de processos, depende… mas começam a desconfiar de que aquilo realmente é válido ou que há qualquer coisa ali e depois, sim, conseguem provar. Não é ao contrário. Posso passar à outra conjectura? (TA 16/01/03, pp. 9-10)

O episódio *Depois quando nós formos discutir vamos ver* é sequencial a *É uma conjectura, é uma conjectura!!*. Permite revelar uma das opções tomadas por Anita durante a apresentação das conjecturas e que, na generalidade dos casos, manteve durante a sua análise: não permitir o aperfeiçoamento de conjecturas enunciadas.

Depois quando nós formos discutir vamos ver

(...)

21. Maria: Entre 1 e 1/100 são dízimas finitas aquelas que têm como base múltiplos de 10 exceptuando os múltiplos de 30, 60, 70 e 90.

A professora inicia o registo no quadro: "Entre 1 e 1/100 são dízimas finitas aquelas". Pergunta à Maria o que "o que querem dizer com 'têm como base'". A aluna indica que são os denominadores das fracções. Quase simultaneamente há outra aluna que refere que os números indicados são múltiplos de 15. Maria prossegue dizendo:

22. Maria: São aquelas que têm como denominadores os múltiplos de 10 menos os múltiplos de 15.

Enunciado registado no quadro: "Entre 1 e 1/100 são dízimas finitas aquelas que têm como denominador os múltiplos de 10 menos os múltiplos de 15".

23. Anita: Mais conjecturas...
24. Maria e colega: Sôtora, o 70 não é múltiplo de 15.
25. Anita: Umh?
26. Maria: Os números que eu tenho aqui são o 30, 60, 70 e 90 e o 70 não é múltiplo de 15.
27. Colega de Maria: Pois...
28. Anita: *(abanando as mãos)* Depois quando nós formos discutir vamos ver. *(aponta para o Tomás para que este indique a conjectura formulada).*

(TA 13/01/03, p. 3)

Ao escutar a contribuição de Maria, o primeiro movimento de Anita centra-se na clarificação do enunciado apresentado. A questão que coloca — "o que querem dizer com 'têm como base'" — permite torná-lo não ambíguo e contribui para o seu significado ser mais inteligível para a turma. Numa primeira fase, Maria parece aderir à ideia apresentada por uma colega que observa que os números indicados são todos múltiplos de 15. Com efeito, prossegue a enunciação da conjectura alterando o que anteriormente tinha dito (§21, §22). É esta nova formulação que Anita regista no quadro. Só que Maria apercebe-se que, afinal, um dos exemplos que usou para obter a conjectura não é múltiplo de 15 (§24, §26), no que é apoiada pela colega com quem trabalhou (§27). Embora sem o dizer desta forma, o que as alunas fazem é refutar a conjectura que Maria acabou de enunciar. Implicitamente, as suas palavras parecem traduzir a vontade de aperfeiçoar o que antes tinha sido dito de modo a evitar que a conjectura seja falsa. Esta ideia é apoiada quando se tem em conta que Maria quando acrescenta, na aula de dia 16, a sua conjectura ao acetato preparado pela professora, retoma a primeira formulação que comunicou em que a expressão "que têm como base" é substituída por "que têm por denominador"[65].

Anita remete as ideias apresentadas para a fase de discussão (§28) e não altera o enunciado já registado no quadro. Esta opção mantém-se durante toda a fase de apresentação de conjecturas, como é, por exemplo, ilustrado pelo episódio *Não liguem àquela, por enquanto, está bem?*.

Não liguem àquela, por enquanto, está bem?

1. Júlia: Sôtora, eu tenho uma maneira de dizer que é mais fácil.
2. Anita: Diz lá *(escreve no quadro 6).*
3. Júlia: 1 sobre. Agora ponha por baixo múltiplos pares menos os múltiplos de números primos *(a professora regista no quadro a seguir a 6: 1/múltiplos pares menos os múltiplos de números primos)*.
4. Júlia: E agora é aquela coisa: múltiplos de 5 menos os múltiplos de 15.
5. Anita *(para a Júlia):* Mas olha lá tu estás a querer dar uma coisa diferente desta ou estás a querer escrevê-la de outra maneira? Diz-me lá.
6. Júlia: É aquela mais outras coisas que ali estão mal.
7. Anita: Ai!… 1 a dividir por múltiplos pares menos os múltiplos de números primos.

65 Uso a expressão "conjectura de Maria" para designar a conjectura que foi discutida na turma. O enunciado é referido na tabela 10 incluída neste capítulo.

8. Aluna: O que é isso?
9. Aluna: Isso é o mesmo sôtora.
10. Anita: Não liguem àquela, por enquanto, está bem? *(aponta para o registo a que atribuiu o número 6)*. Fixem-se é numa a uma e analisem-na.

(TA 13/01/03, p. 6)

A numeração das conjecturas escritas no quadro foi feita de acordo com a ordem de apresentação. O número atribuído à enunciada por Júlia foi o 2. No momento em que este episódio surge, estavam escritos cinco enunciados, o último dos quais apresentado por alunos localizados na fila que, de acordo com a opção tomada para organizar a partilha, foi deixada para o final. Quando escuta a intervenção de Júlia (§1), Anita parece interpretá-la como constituindo a apresentação de uma nova conjectura, como denota a numeração que atribui ao registo que começa a fazer (§2, §3). Constata depois que, afinal, o que esta aluna pretende é melhorar a que tinha indicado, fruto de se ter apercebido da existência de incorrecções (§5, §6). Suspende o processo de escrita, não incluindo no registo que fazia os aspectos indicados por Júlia, contemplados no enunciado antes apresentado (§4). Simultaneamente, assinala à turma que não tenha em conta este registo (§10). Assim, a conjectura que é remetida para a fase de avaliação é a primeira que Júlia enunciou e não aquela que provinha dos aperfeiçoamentos que desejava fazer.

A decisão de não permitir a alteração das conjecturas formuladas para fracções do tipo 1/n quando os alunos manifestaram o desejo de o fazer de modo a evitar a sua refutação por contra-exemplos que encontravam, não foi, para Anita, simples de manter. Subjacentes a esta decisão estão razões de vária ordem que referirei na subsecção *Lidando com a avaliação de conjecturas*.

A segunda fase da apresentação de conjecturas inicia-se após o registo da de Tomás, que Anita, seguindo o padrão adoptado, regista no quadro tal como lhe é ditada: “1 a dividir por todos os múltiplos de 2 e 5 dá dízimas finitas. Os múltiplos coincidentes com múltiplos de 3 ou de 7 dão dízimas infinitas” (TA 13/01/03, p. 3). Quando um outro aluno refere ter outra conjectura, a professora solicita à turma que sejam indicadas apenas as diferentes das já enunciadas. Observa por breves instantes o caderno deste aluno e incentiva-o a comparar as suas descobertas com as conjecturas já registadas no quadro: “Vê lá se não são parecidas com aquelas” (TA 13/01/03, p. 3). Aguarda alguns momentos e dá a palavra a um novo par, destacando, através do recurso à palavra “diferentes” e do tom de voz que usa, que não devem repetir o que já foi apresentado. Renata, uma das alunas que interpelou, refere terem acrescentado excepções à conjectura de Tomás, e a professora solicita-lhe que indique a que formularam “no conjunto” (idem): “Renata: Dão origem a dízimas finitas as fracções cujos denominadores são múltiplos de 2, 4 e 5 à excepção dos que também são múltiplos de 3, 7, 11 e 13” (idem, p. 4).

Tanto Renata como Tomás comunicaram conjecturas cujo enunciado é constituído por duas partes. Na primeira referem os casos de denominadores de fracções que podem gerar dízimas finitas: múltiplos de 2 e de 5 na de Tomás e múltiplos de 2, de 4 e de 5 na de Renata. Na segunda, incluem as “condições de excepção ou refutação” (Toulmin, 1993), ou seja, referem circunstâncias particulares que suspendem a autoridade dada a estes múltiplos para gerarem dízimas finitas: para Tomás os múltiplos de 2 ou de 5 não podem ser, simultaneamente, múltiplos de 3 nem de 7; Renata acrescenta a estas excepções os múltiplos de 11 e de 13.

Tornada pública a conjectura de Renata, a professora procura, antes de mais, que a turma se centre na sua comparação com a de Tomás. Tendo solicitado conjecturas diferentes das anteriormente apresentadas, esta comparação era essencial para permitir a identificação do que as aproxima e do que as distingue: “Anita: Vamos lá ver se é isto. 1 a dividir por todos os múltiplos de 2 e de 5 *(vai apontando para a conjectura do Tomás*)” (TA 13/01/03, p. 4). Renata, por iniciativa própria, entra na conversação e apresenta uma contribuição que parece indiciar que a não referência aos múltiplos de 4 no enunciado da conjectura do colega a diferencia, do seu ponto de vista, da que ela própria apresentou: “E de 4, múltiplos de 2, 4 e 5” (idem). Vários alunos colocam uma objecção a esta ideia: “Mas o 4 é múltiplo de 2” (idem). Emerge, assim, um desacordo, que analisarei na secção *Lidando com a emergência e resolução de desacordos*, focado na necessidade de fazer referência, ou não, na primeira parte da conjectura de Tomás aos "múltiplos de 4" de que Renata fala. Uma vez ultrapassado, Anita regista no quadro uma conjectura resultante da fusão das indicadas pelos dois alunos, ou seja, mantém a formulação adoptada por Tomás e acrescenta às "condições de excepção" aí incluídas as diferentes destas referidas por Renata.

Apoiando a construção do enunciado de uma conjectura

A construção, pela turma, do enunciado da conjectura "c. pot." inicia-se após o término da avaliação das conjecturas formuladas pelos alunos durante o trabalho de pares para fracções do tipo 1/n. É Roberto quem, no quadro, explica à turma as conclusões a que chegou quando, em casa, analisou as decomposições em factores primos das que conduzem a dízimas finitas ou infinitas. Visando obter uma explicação mais completa do processo seguido e do que permite apoiar as descobertas feitas, Anita diz-lhe: "Convence-nos lá com uma sequênciazinha..." (TA 16/01/03, p. 15). Este movimento origina a organização, pelo aluno, de uma tabela com duas colunas. Indica que uma delas se destina às decomposições dos denominadores das fracções que conduzem dízimas finitas e a outra às das restantes. Os casos 50, 80, 32 e 15, 6, 45, acompanhados da respectiva decomposição, são os que regista, respectivamente, na primeira e segunda colunas. Apoiando-se nesta tabela, reinicia a explicação das regularidades que observou. O episódio *E então o que é que acham do que o Roberto tem ali?* ilustra a forma como Anita procurou lidar com o início da construção do enunciado de uma conjectura que tivesse em conta estas regularidades.

E então o que é que acham do que o Roberto tem ali?

1. Roberto: Então é assim. Neste lado estão as dízimas finitas… estão os denominadores das dízimas finitas e naquele lado os das infinitas. E se repararmos nas dízimas finitas aparece sempre o 2 e o 5.
2. Uma aluna: Ou o 5. Pode ser só o 5.
3. Roberto: Pois. Pode aparecer o 2 ou o 5 ou os dois. E aqui *(aponta para a coluna das dízimas infinitas)* só aparece um deles mas depois aparece outro número.

4. Aluna: O 3...
5. Anita: E então o que é que acham do que o Roberto tem ali?
6. Tomás: Qual é o objectivo daquilo?
7. Anita: Perguntas-me a mim? Ele é que fez…
8. Tomás: Roberto, qual é o objectivo daquilo?
9. Roberto: É encontrar outra conjectura que fosse mais simples de... Por exemplo faziam uma pergunta para a gente dizer quais são as dízimas finitas e a gente decompunha o número.
10. Anita: Ou seja, é arranjar uma conjectura, é o que ele está a dizer, que quando se perguntasse quais eram as dízimas finitas fosse mais rápido logo ver. Mas por enquanto a gente só tem aí os números... Como é que a gente vai passar isso a palavras, digamos assim? *(pausa)*

O Roberto escreve no quadro: "As dízimas infinitas".

11. Roberto *(para a professora)*: É para escrever?
12. Anita: Sim

O Roberto prossegue: "são aquelas em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos" (suspende o processo de escrita).

13. Roberto *(para a professora)*: Agora eu não sei como hei-de escrever. Aparece um 2 ou um 5…
14. Anita *(para o Roberto):* Eu não estou cá. *(pausa)* Pede ajuda. Porque é que tu não pedes ajuda aos outros, Roberto? Hum?
15. Cristina: Não me peças a mim… *(risos)*
16. Anita: Vá lá, Cristina, colabooora... *(risos)*
17. Cristina: Eu não sei o que é que ele fez…
18. Anita: Não sabes?! Então é porque ele não explicou. Pergunta-lhe, estás aí calada, porquê?
19. Cristina: Não... É que eu não percebo onde é que ele quer chegar.
20. Anita: Então pergunta-lhe!... *(risos)*
21. Cristina: Onde é que queres chegar?
22. Roberto: A isto que eu estou a escrever agora.
23. Anita: Ora!... Se tu dizes que queres a ajuda dela para ela te ajudar a escrever isso e dizes que queres chegar aí, ela não te pode ajudar só com isso.
24. Roberto: Eu quero saber como é que hei-de passar para o escrever o 2 vezes 5, porque aparece sempre isto, mas depois também há estes... ou aparece o 2 ou aparece o 5...
25. Anita: Ouçam o que ele está a dizer agora.
26. Roberto: Aparece o 2 vezes 5 ou só aparece o 2 ou só aparece o 5.
27. Telma: Obtemos o algarismo 2 ou o 5 ou os dois números, o 2 e o 5.
28. Anita: Quem é que o ajuda, agora nessa linha de ideias que tu referiste, Telma, a completar o que ele está a escrever?
29. Aluna: Obtemos 2 ou 5 ou os dois.

O Roberto prossegue o registo da conjectura escrevendo a seguir a "obtemos": "2^n, 5^n ou ambas"; a professora acrescenta, junto ao enunciado, "fracções do tipo 1/n".

30. Anita: Isso do "ou ambas"... O que é que isso quer dizer?

O Roberto indica o tipo de factores que aparecem nas decomposições, em factores primos, dos denominadores das fracções que originam dízimas finitas.

31. Anita: Quando tu dizes ou ambas, eu não sei se é uma ao lado da outra, ou uma a somar com a outra, se é o quê… Percebes o que quero dizer, Roberto? O que é que isso quer dizer?

O Roberto altera o enunciado da conjectura ficando registado: "As dízimas infinitas são aquelas em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos 2^n, 5^n ou $2^n x 5^n$".

(TA 16/01/03, pp. 15-7)

A observação da globalidade dos movimentos de Anita, deixa transparecer que o seu modo de agir se organizou em torno de três eixos: (a) averiguar a posição da turma relativamente à actividade de Roberto, (b) tornar inteligível esta actividade e seus propósitos e (c) envolver os alunos na elaboração de um texto para o enunciado da conjectura.

Com efeito, recorrendo a uma pergunta aberta (§5) que possibilita a existência de portas de entrada diversas e a expressão de pontos de vista múltiplos, procura, em primeiro lugar, que os alunos reflictam sobre o que ouviram e avaliem as ideias apresentadas: "Estou a querer que os colegas pensem e se pronunciem sobre o que ele estava a dizer, o que estava a fazer... (...) estou a submeter ao escrutínio da turma... [comentário a §5]" (TST 42, p. 19, 21/02/03).

A preocupação de Anita com a compreensão, pelos alunos, da actividade de Roberto e seus propósitos, transparece em várias das intervenções. Por exemplo, nos momentos em que Tomás, usando a abertura que lhe foi proporcionada pelo formato da pergunta, a questiona sobre o objectivo do que foi feito (§6) e, posteriormente, quando Cristina (§17, §19) revela que há aspectos do conteúdo e do motivo do trabalho realizado que não entende, tenta inflectir a direccionalidade das mensagens (§7, §18, §20). Através destes movimentos, procura criar condições para que Roberto descreva o seu pensamento de uma forma mais detalhada de modo a facilitar o esclarecimento das dúvidas expressas. Simultaneamente, tenta ensinar aos alunos que os autores das ideias são responsáveis pela sua elucidação e que um dos papéis de quem escuta é, no caso de não lhes encontrar sentido, manifestar a sua incompreensão e, em particular, interpelar quem as enuncia:

> É uma norma. Então se foi o Roberto que fez, é o Roberto que deve explicar, e o Tomás depois dirige-se ao Roberto [comentário a §7] (...) No fundo aqui [comentário a §18], estava a picar os dois. Estava a picá-la a ela [Cristina] porque não se manifestou. Se não sabe deve perguntar, não é ficar calada... E estava a picá-lo a ele [Roberto] como quem diz: *não conseguiste explicar*, para ver se ele explicava melhor o que queria. (TST 42, pp. 19-20)

Face à explicação de Roberto sobre o objectivo da sua actividade (§9), Anita integra-a na sua própria voz (§10). Este modo de agir, que legitima a explicação, é orientado pela intenção de introduzir um acréscimo de visibilidade e transparência sobre o porquê desta actividade: “Para já eu estou a redizer, um bocado, aquilo que ele [Roberto] disse para destacar e tornar mais claro” (TST 42, p. 19). Quando considera que as ideias do aluno não são suficientemente inteligíveis para ajudarem os colegas a ultrapassarem dificuldades enunciadas, procura, visando inflectir a situação, que Roberto expanda as suas contribuições:

> Ele [Roberto] só diz que quer chegar ao que está a escrever. E eu digo: “*Se tu dizes que queres a ajuda dela para ela te ajudar a escrever isso e dizes que queres chegar aí, ela não te pode ajudar só com isso*” [§18]. É que ele não tinha explicado. Só depois de eu dizer isto é que ele explica o que é que quer. (TST 42, p. 20)

Os primeiros passos conducentes à escrita do enunciado da conjectura são dados por Roberto na sequência de Anita tornar visível a necessidade de ir para além dos exemplos analisados e desafiar a turma a encontrar as “palavras” que permitam relatar as descobertas apresentadas: “Depois tento que os alunos avancem para a formulação da conjectura por palavras [comentário à parte final de §10]” (TST 42, p. 19). Perante as dúvidas expressas relativamente à prossecução do processo de escrita (§13), visando ensinar a turma que “devem ajudar-se uns aos outros e não estarem sempre dependentes de mim” (idem, p. 20), Anita tenta encorajá-lo a solicitar o auxílio dos colegas (§14). Além disso, incita outros elementos da turma a colaborarem na formulação da conjectura (§16, §28). Neste processo, procura incentivar a escuta activa e valorizar contribuições que surgem: “Chamo a atenção da turma para ouvirem [§25], para poderem perceber e colaborar

(...) reforço a co-construção do enunciado e valorizo a contribuição da Telma [§28]" (TST 42, p. 21). Por último, com o objectivo de tornar mais clara a formulação da conjectura, interpela Roberto sobre o significado da expressão "ou ambas" (§30), afunilando a questão que inicialmente coloca (§31) ao considerar que as contribuições deste aluno não permitem tornar este significado evidente para a turma: "Primeiro coloquei uma pergunta mais aberta, mas continuou a não ser claro o que ele queria dizer com 'ou ambas' e então eu concretizei mais..." (idem).

É esta concretização que possibilita a Roberto, através do registo que faz no quadro, explicitar que algumas das dízimas finitas que observou se obtêm a partir do produto de uma potência de base 2 por uma potência de base 5. Traduz esta ideia recorrendo a simbologia matemática e conclui o processo de escrita do enunciado da conjectura que, no seu conjunto, assume a seguinte forma: "As dízimas finitas são aquelas em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos 2^n, 5^n ou $2^n x 5^n$". Mantendo a opção que tomou no início do episódio *E então o que é que acham do Roberto tem ali?"* Anita centra a atenção dos colegas neste enunciado e através da intervenção "Comentem lá agora" (TA 16/01/03, p. 16), submete-o ao "escrutínio da turma" procurando mostrar aos alunos que espera que sejam responsáveis por avaliarem o trabalho realizado na aula: "Ao dizer comentem, por um lado submeto a conjectura ao escrutínio da turma mas também o submeter ao escrutínio da turma tem a ver com a ideia de que os alunos são responsáveis por avaliarem as coisas" (TST 42, p. 22).

O episódio *Que era igual... E então qual é o problema?* ilustra o processo de aperfeiçoamento do enunciado da conjectura visando a sua correcção matemática e, simultaneamente, revela de que modo Anita procurou capitalizar as contribuições dos alunos para trazer para primeiro plano as formas de representação de números generalizados numa expressão algébrica.

Que era igual... E então qual é o problema?

1. Renata: Se ele escreve $2^n x 5^n$ significava que o expoente deles era igual.

O Roberto substitui $2^n x 5^n$ por $2^n x 5^m$.

2. Anita: Que era igual... E então qual é o problema?
3. Aluna: Pode não ser.
4. Anita: Pode não ser. E como é que a gente contempla o pode não ser?
5. Cristina: Então, com letras diferentes.
6. Outra aluna: Pomos letras diferentes.
7. Renata: Ali no 80 é 2^4x5, por isso é diferente o do 2 e o do 5.
8. Anita: Por exemplo. Já agora... *(faz um gesto ao Roberto apontando para o expoente de 5^n no caso em que esta potência não é um factor do produto incluído no enunciado da conjectura; o aluno substitui 5^n por 5^m)*
9. Tomás: Sôtora, e se for 10?
10. Anita *(para a turma)*: E se for 10?
11. Roberto, Tomás e outros alunos: É elevado a 1
12. Tomás: Então não está ali, os expoentes são iguais.
13. Anita: Convence lá que o 10 está aqui. Convence...
14. Tomás: O *m* e o *n* têm que ser diferentes.
15. Anita: O *m* e o *n*... Ouviste o que a Cristina disse? *(para o Tomás)* Diz lá ao Tomás… *(para a Cristina)* Ele está a dizer que o 2x5 não está ali, por causa do *m* e do *n* *(para a turma)*. Qual é o problema *(para o Tomás)?*
16. Tomás: É que o *m* tem que ser diferente do *n*.
17. Vários alunos: Não.
18. Anita: Vamos lá ver...
19. Cristina e outros alunos: Pode não ser.
20. Cristina: Pode ser um número qualquer como nos outros casos.
21. Renata: Nós ali não dizemos que o *n* tem que ser diferente do *m*.
22. Alguns alunos: Mas o *m* e o *n* têm que ser diferentes.
23. Anita: Será?
24. Alguns alunos: Não, eles não têm é que ser iguais.
25. Anita: Será que está a dizer que têm que ser diferentes?

A professora explica a diferença entre usar, numa expressão, a mesma letra que embora podendo estar em sítios diferentes representa sempre o mesmo valor e usar letras diferentes que podem representar, ou não, o mesmo valor mas não têm obrigatoriamente que representar valores diferentes.

(TA 16/01/03, pp. 17-18)

Este episódio permite evidenciar que a turma não põe em causa os dados de que Roberto parte para enunciar a conjectura, ou seja, que nos denominadores das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas, surgem potências de base 2 ou de base 5 ou produtos de ambas as potências. A objecção expressa por vários alunos incide, sim, na forma de representação que deve ser usada para traduzir, em linguagem matemática, a generalidade destes produtos.

A observação de Renata (§1) parece ser suficiente para que, de imediato, Roberto se aperceba do problema causado pela utilização da mesma designação (*n*) para representar os expoentes de ambas as potências. Com efeito, altera, rapidamente, esta designação no enunciado da conjectura que escreveu no quadro. Esta alteração não é, no entanto, suficiente para Anita. Com efeito, procura fazer emergir contribuições que permitam explicitar o problema percepcionado por Roberto e Renata (§2) e fazer surgir ideias que tornem visível e inteligível para outros colegas porque é que a alteração feita por este aluno permite ultrapassá-lo (§4). Neste contexto, o caso particular a que Renata recorre (§7) constitui um recurso substancial para apoiar a asserção de que os expoentes das potências podem não ser iguais (§3) e, assim, contribui para se tornarem mais transparentes as questões que a forma de representação inicialmente adoptada para registar o produto destas potências levanta.

Contudo, a alteração feita por Roberto ($2^n x 5^n$ por $2^n x 5^m$) faz surgir um novo problema. É despoletado por uma questão da iniciativa de Tomás, dirigida à professora (§9) que, via repetição, a direcciona para os colegas (§10). Na sequência, este aluno coloca uma objecção ao enunciado registado no quadro — "Então [1/10] não está ali" (§12) — apresentado como "garantia" (Toulmin, 1993), a ideia "os expoentes são iguais".

Perante esta objecção, o primeiro movimento de Anita vai no sentido de encorajar um dos elementos da turma a apresentar argumentos que permitam mostrar a Tomás que o caso particular que referiu não é excluído pelo enunciado da conjectura (§13). No entanto, quando este aluno explicita que "o *m* e o *n* têm que ser diferentes" (§14), ou seja, quando apresenta uma nova justificação que torna claramente visível que o seu raciocínio se apoia na concepção de que numa expressão algébrica não podem ser usados símbolos diferentes para representar quantidades que, nalguns casos, podem assumir o mesmo valor, Anita muda de estratégia e institui esta justificação como objecto de discussão. Recorrendo a um relato que tem como audiência intencional os colegas — "Ele está a dizer que (...) (§15)" — foca aí a atenção da turma. Simultaneamente, a pergunta que coloca a

Tomás — "Qual é o problema" (§15) — permite que a questão por ele percepcionada se torne mais transparente para outros alunos (§16). Estes movimentos conduzem à expressão de pontos de vista divergentes em que o que está em causa é a relevância e adequação da nova justificação enunciada por Tomás para apoiar o seu questionamento. Há elementos da turma (§22) que, tal como este aluno, parecem partir da hipótese de que se numa expressão algébrica se usam símbolos diferentes, estes nunca podem representar o mesmo valor, ou seja, a adopção da diferença nos símbolos acarreta, necessariamente, a exclusão da possibilidade de igualdade entre os valores por eles representados. Outros sustentam que esta possibilidade não é excluída (§17, §19, §20). O que se exclui é a obrigatoriedade da igualdade entre estes valores (§24).

Face a este desacordo, as intervenções de Anita limitam-se, num primeiro momento, a facilitar o fluxo da conversação (§18, §23, §25). Num segundo momento, opta por nela participar de uma forma mais substantiva. As explicações que apresenta, ao incidirem na clarificação do que significa usar a mesma letra ou letras diferentes numa expressão algébrica, contribuem para que seja ultrapassado. Simultaneamente, possibilitam que os alunos revisitem a ideia de que a linguagem algébrica usa símbolos familiares de maneiras particulares e tem as suas próprias convenções.

A turma prossegue o trabalho focando-se no domínio das variáveis usadas para representar, na conjectura, a generalidade dos expoentes das potências. Roberto, a partir das suas ideias e tendo em conta sugestões de colegas relacionadas com a linguagem matemática a adoptar, acrescenta ao enunciado registado no quadro "com n, $m \in \mathrm{N}_0$" (TA 16/01/03, p. 18). A aula termina neste momento. O aluno abandona o quadro e Anita indica o trabalho de casa já sobre o toque de saída. Enquanto a turma ainda se encontra na sala e a maioria dos alunos sentados nos seus lugares, Roberto, por sua iniciativa, dirige-se, de novo, ao quadro. Explica, apoiando-se num dos exemplos aí registados ($32 = 2^5x5^0$), que o enunciado da conjectura pode ser simplificado. Refere não ser necessário indicar que os denominadores das fracções são do tipo 2^n, 5^m ou 2^nx5^m, pois esta última expressão transforma-se numa das outras quando *n* ou *m* assumem o valor zero. Anita vai escutando esta explicação e muitos dos colegas, alguns dos quais entretanto se aproximaram do quadro, acompanham, visivelmente interessados, o raciocínio e não fazem qualquer tentativa de abandonar a sala. Concordam com Roberto e o enunciado da conjectura é reescrito obtendo-se, assim, a conjectura que designei por "c. pot.".

Lidando com a avaliação de conjecturas

De modo a apresentar os principais aspectos do trabalho realizado pela professora no decurso da avaliação de conjecturas, estruturo esta subsecção em duas partes. A primeira centra-se na actividade desenvolvida na terceira parte da aula de dia 13 e nas duas primeiras da aula de dia 16, ou seja, nos momentos em que um dos principais objectivos visados por Anita foi o de promover a análise e discussão de conjecturas formuladas pelos alunos durante o trabalho de pares para fracções do tipo 1/n. Na segunda parte, abordo os aspectos fulcrais do trabalho referente às duas primeiras partes da aula de dia 20, ou seja, aquelas em que a actividade foi orientada pela intenção de envolver os alunos na investigação da validade da conjectura "c. pot." considerando um universo constituído por fracções do tipo k/n (com $k \in N_0 \wedge k \neq 1 \wedge n \in N$) e no seu aperfeiçoamento visando a não refutação por fracções com numeradores diferentes de 1.

Gerindo o processo de avaliação de conjecturas formuladas pelos alunos

Como referi a propósito do episódio *É uma conjectura, é uma conjectura!!!*, Anita pretendia proporcionar aos alunos algum tempo para reflectirem sobre as várias conjecturas registadas no quadro antes de passarem à análise conjunta. Assim, indica-lhes que depois de as anotarem nos seus cadernos, as analisem durante 5 minutos. Em várias outras ocasiões existentes nas aulas em análise, Anita, tal como fez neste momento, criou oportunidades para, em trabalho de pares, os alunos pensarem sobre contribuições apresentadas à turma ou ideias reveladoras da existência de posições divergentes. Uma das opções tomadas foi, precisamente, o "dar, também, alguns espaços de tempo intermédios para os alunos 'passarem para o caderno' as conjecturas que surgiram na turma, mas, sobretudo, para que se apropriem melhor das ideias de todos, de forma a poderem discutir" (DEA, 25/02/03, p. 2).

Assim, ao solicitar aos alunos que reflictam durante alguns minutos sobre as conjecturas registadas no quadro, Anita esperava que se debruçassem sobre todas elas procurando compreender o seu significado. Esperava, também, que os elementos da turma que não tinham participado na formulação de uma dada conjectura, tivessem oportunidade de a analisar e de debater ideias que, mais tarde, poderiam contribuir para facilitar e enriquecer a discussão conjunta. No entanto, nem todos os alunos se envolveram nesta actividade do modo como a professora desejava.

Diversas intervenções permitem constatar que vários estão, sobretudo, empenhados em aperfeiçoar as suas próprias conjecturas, remetendo para plano secundário as que não são da sua autoria. O episódio *Não se preocupem agora em aperfeiçoá-las, por enquanto*, a par das reflexões que Anita apresenta a propósito dos vários momentos da aula em que os alunos tentam alterar o enunciado das suas conjecturas, revela como procurou lidar com a situação. Permite, além disso, iluminar algumas das questões com que, neste âmbito, se confrontou, bem como onde se enraízam algumas das opções que tomou.

Não se preocupem agora em aperfeiçoá-las, por enquanto

1. Tomás: Ali na quatro acho que faltam mais um ou dois números.
2. Anita *(falando para mim)*: Eles estão mais interessados em aperfeiçoar as conjecturas do que em analisar. *(para a turma)* Não se preocupem agora em aperfeiçoá-las, por enquanto. Refutem ou não refutem.

(...)

A Júlia levanta-se e dirige-se à professora.

6. Júlia: Falta ali uma coisa *(apontando para o registo número 6)*. Faltam os múltiplos de 5 menos os múltiplos de 15.
7. Anita *(para a Júlia)*: Então mas isso já está ali na outra *(apontando para o enunciado a que atribuiu o número 2)*.

8. Júlia: Mas é que aquela ali não tem nada a ver *(apontando para o registo 6)*. Eu quero apagar aquele bocadinho da minha e pôr aquela coisa *(aponta para o registo 6)*.
9. Anita: Da conjectura 2?
10. Júlia: Sim.
11. Anita: Queres apagar a 2?
12. Júlia: Sim, sim!
13. Anita: E que tal ires escrever tu? *(para a Júlia)*. Porque eu fico com dúvidas. Atenção! *(para a turma)* A Júlia vai reformular ali uma coisa na conjectura dela, na dois, em princípio, e vai ser ela própria porque eu depois tenho dúvidas um bocado em organizar.

(TA 13/01/03, pp. 7-8)

A conjectura quatro de que Tomás fala (§1) é a obtida pela fusão das que Renata e ele próprio apresentaram. Os números que refere, como vem a explicitar no decurso da discussão colectiva desta conjectura, são novas condições de excepção que descobriu, ou seja, múltiplos de outros números, para além de 3, 7, 11 ou 13, que devem ser excluídos do conjunto dos múltiplos de 2 ou de 5 de modo a evitar que as fracções originem dízimas infinitas. Pretendia, assim, melhorar uma conjectura de que também era autor. Anita não o permite e, através da intervenção que faz (§2), procura que os alunos "não se fixem tanto na conjectura deles" (TST 42. 26), focar a actividade da turma na tarefa que lhes tinha proposto e destacar que uma conjectura, em si mesma, tem valor: "Com essa fala [§2] eu tentei, e foi uma opção, dar evidência ao que se pretende e dar importância ao valor de uma conjectura em si própria. Isto foi mesmo uma opção" (idem).

Júlia também exprime a vontade de modificar o enunciado da sua conjectura, mas age de um modo diferente de Tomás, tal como é diferente o modo de agir de Anita. Esta aluna desloca-se para junto da professora e retomando as ideias que apresentou durante a fase de partilha das conjecturas (episódio *Não liguem àquela, por enquanto, está bem?*), insiste na alteração (§8, §10, §12). Embora anteriormente não o tenha permitido, Anita decide não contrariar a sua vontade: "E depois digo-lhe para ser ela a escrever e chamo a atenção dos outros para eles se aperceberem" (TST 41, p. 14). Do seu ponto de vista, esta é uma das ocasiões das aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas* em que "balança" sobre o que será preferível fazer perante as circunstâncias concretas com que se depara e os objectivos que visa. Nesta ocasião, a balança pende no sentido do aperfeiçoamento das conjecturas, o que não foi independente do modo de agir e de ser da aluna que o propôs:

> Balanço, porque, por um lado, acho que faz sentido deixar aperfeiçoar e, por outro, também é a Júlia. Não é que eu privilegie a Júlia, atenção, não é nada disso. Só que ela... É o *stress* dela!... Ela vem ter comigo, insiste, diz que quer mudar. Se calhar depois a culpa é minha... devia tratá-la da mesma maneira para ver se ela cresce... (risos). (TST 41, p. 14)

Exceptuando a possibilidade que deu a Júlia para alterar o enunciado da sua conjectura, Anita mantém a decisão de não permitir, durante a fase de avaliação das conjecturas, o aperfeiçoamento, pelos alunos, das que apresentaram para fracções do tipo 1/n. Por exemplo, quando Maria indica, durante a primeira aula, "falta aí uma coisa na dois, sôtora" (TA 13/01/03, p. 9), diz: "Eu não quero correcções. A minha pergunta neste momento é qual é a validade daquela conjectura e porquê" (idem). No mesmo sentido, quando Tomás, no decurso da segunda aula, sugere que se acrescentem 17 e 19 às condições de excepção da conjectura de que era co-autor, rindo-se, responde: "Não podes acrescentar nada. O que eu quero saber é se aquela é válida ou não" (TA 16/01/03, p. 8).

A referida decisão não foi pacífica. Subjacente a ela estão razões de vária ordem, com pesos diferenciados e que, no conjunto, a determinaram. Algumas destas razões derivam de preocupações relacionadas com a gestão do tempo lectivo: "O meu problema ali é que se eu fosse deixar aperfeiçoar cada uma delas, eles são tão teimosos que não saía dali, percebes? Eles estavam a querer aperfeiçoar todas, todas. Não saía dali" (TST 41, p. 13). Outras decorrem do respeito que Anita pretende que os alunos tenham pelas indicações que lhes dá relativamente à organização da actividade da aula: "Eu sou muito picuinhas com o que peço... Sou um bocadinho ditadora às vezes... (risos) Se eu digo que é para discutir as conjecturas é para discutir, se eu digo que quero conjecturas diferentes têm mesmo que ser diferentes..." (idem, p. 25). Outras ainda, as principais e de que as anteriores são subsidiárias, prendem-se com a valorização da própria actividade de formulação de conjecturas e com o combate a um tipo de competição entre os alunos que não deseja e a um perfeccionismo que considera excessivo e limitador da partilha de ideias:

> É porque eles ao tentarem aperfeiçoar não vão aperfeiçoar as dos outros. Querem é competir entre si!... Aí é que está!.. (...) E a minha preocupação com o dar valor às conjecturas também tem a ver com essa mania que eles têm da perfeição e depois não me quererem mostrar as coisas, ou não quererem dizer porque acham que não está bem, que não está perfeito. (TST 41, p. 26)

> Primeiro foi mais porque eu tinha dito que era para discutirem aquelas conjecturas e depois era valorizá-las. Mostrar que tal como estão não são lixo. Se eu os deixasse aperfeiçoar tive receio que depois nunca mais quisessem dizer nada. O que eles estavam a tentar fazer na primeira aula e eu não deixei era a melhorarem só cada um a sua. Acho que muitas vezes eles não querem avançar e dizer porque eles próprios também não estão satisfeitos. (TST 41, p. 19)

Na tabela 10 incluo o enunciado de todas as conjecturas relativas a fracções do tipo 1/n que foram discutidas na turma, numeradas de acordo com a ordem pela qual foram colectivamente analisadas. Incluo, também, observações que visam clarificar aspectos relativos ao seu enunciado ou reformulações feitas, no decurso da discussão, a partir de iniciativas da professora. De acordo com a opção que tomei para estruturar a informação incluída nesta subsecção, não incluo nesta tabela a conjectura “c. pot.”.

A observação da tabela 10 revela, em primeiro lugar, que a ordem pela qual as conjecturas são analisadas e discutidas na turma segue a ordem do seu registo no quadro. Anita não se pronuncia especificamente sobre as razões desta opção. No entanto, as considerações que tece sobre o porquê do processo que adoptou para promover a partilha, bem como a preocupação, recorrentemente expressa, em valorizar qualquer conjectura que surgisse, tornam plausível considerar que possa prender-se com o evitar que, implicitamente, pudesse passar a mensagem de que há alunos que privilegia ou conjecturas que são mais importantes do que outras:

> Eu na primeira aula estava com a ideia de apanhar todas as conjecturas e dar valor a todas elas. Percebes? Também estava com essa preocupação, com essa ideia fixa. Não fossem eles pensar que alguma não tinha interesse. Aí é que está o meu problema. Ia a pensar: “não hei-de desvalorizar nenhuma, eu quero todas!” (TST 41, p. 15)

Tabela 10: Conjecturas Formuladas na Aula de Anita para Fracções do Tipo 1/n

Conj. de:	Conjecturas submetidas à discussão colectiva		Observações
	Sobre o enunciado	Conteúdo	
1. Alda	Enunciado tal como foi apresentado.	As dízimas finitas podem ser 1 a dividir por alguns números pares e alguns múltiplos de 5.	
	1A) Reformulação (apresentação oral e registo no quadro).	As dízimas finitas são 1 a dividir por números pares e pelos múltiplos de 5.	Apresentada pela professora no decurso da discussão.
2. Júlia	Enunciado tal como foi apresentado e inicialmente discutido.	Uma fracção do tipo 1/n em que n é um múltiplo par menos os múltiplos de primos, ou múltiplos de 5 menos ou múltiplos de 15 dão dízimas finitas.	
	2 A) Aperfeiçoamento (tal como foi registado em acetato).	Uma fracção do tipo 1/n em que n é múltiplo par menos (excepto) os múltiplos de primos (diferentes de 2), ou múltiplos de 5 menos (excepto) os múltiplos de 15 dão as dízimas finitas.	Clarificação do enunciado a partir da discussão; a professora foca a atenção no caso do 2.
3. Maria	Enunciado tal como foi registado em acetato pela aluna.	Entre 1 e 1/100 todas aquelas que têm como denominador múltiplos de 10, exceptuando 30, 60, 70 e 90.	Oralmente Maria explica que 1/30, 1/60, 1/70 e 1/90 são dízimas infinitas enquanto que as restantes são finitas.
4. Tomás & Renata (fusão)	Enunciado discutido na aula.	1 a dividir por todos os múltiplos de 2 e 5 dá dízimas finitas, excepto os denominadores coincidentes com múltiplos de 3, 7, 11 e 13 que dão dízimas infinitas.	Ligeiras alterações na forma de escrita do enunciado relativamente ao apresentado. (professora+alunos)
5. "de ninguém".	Enunciado oriundo do apresentado por Roberto (registado em acetato).	As fracções de numerador 1 que representam dízimas finitas são aquelas em que o denominador é um múltiplo de 2 ou de 5 não podendo ser múltiplo de número ímpar.	Enunciado apresentado pela professora.
6. Roberto	Enunciado tal como foi apresentado.	As fracções de numerador 1 que representam dízimas finitas são aquelas em que o denominador é um múltiplo de 2 ou de 5 não podendo ser múltiplo de outro número ímpar.	
	6 A) Aperfeiçoamento (feito oralmente).	"Considerando que ali, em outro "número ímpar", não vamos considerar o caso extremo do 1".	A professora foca a atenção da turma no "caso especial" 1.

Em segundo lugar, sobressai que cinco das conjecturas discutidas são as apresentadas pelos alunos. Em dois casos (Tomás & Renata e Júlia) a forma de escrita do enunciado registado no quadro na primeira aula foi ligeiramente modificada visando evitar ambiguidades e introduzir uma maior clareza na formulação. No primeiro caso, uma das alterações, indo ao encontro das ideias oralmente apresentadas pelos seus autores, foi feita pela professora, quando preparou o acetato que usou na segunda aula[66]. As restantes modificações foram fruto da discussão que decorreu na turma sobre o significado da conjectura.

Em terceiro lugar, constata-se que duas das conjecturas (Júlia e Roberto) foram aperfeiçoadas durante o processo de discussão. Este aperfeiçoamento, que incidiu sobre o seu conteúdo visando evitar a refutação, foi feito a partir de questões colocadas por Anita que focaram a atenção da turma num caso que considerou ter sido esquecido por uma das autoras — "ia-lhe dando uma coisinha má... (risos) (...) A Júlia esqueceu-se que o 2 também era primo. Foi um esquecimento" (TST 41, p. 16) — ou no que designou como um "caso especial" (TA 16/01/03, p. 14) ou "caso extremo" (idem).

Por último, a observação da tabela 10 permite salientar que os alunos se envolveram na discussão de duas conjecturas que não surgiram a partir da sua iniciativa nem resultaram dos aperfeiçoamentos que anteriormente referi. Em ambos os casos, estas conjecturas foram propostas pela professora. Há, no entanto, diferenças no que se prende com a intencionalidade da proposta. Deliberadamente, Anita elimina ou substitui da conjectura de Alda as palavras que impedem que o seu conteúdo diga respeito à generalidade das fracções do tipo 1/n que originam dízimas finitas e submete a reformulação à discussão da turma. Não intencionalmente, altera o enunciado apresentado por Roberto obtendo-se, deste modo, a conjectura que, adoptando uma expressão usada por Anita na aula, designei por "de ninguém" (TA 16/01/03): "Posso ter sido eu escrever... Mas não faz mal. Esta é uma outra conjectura que não é a dele, mas é uma conjectura (risos). Não é? Pode não ser de ninguém, mas é uma conjectura" (TA 16/01/03, p. 11).

O que originou esta última alteração foram as anotações da aluna a quem, no final da aula de dia 13, Anita solicitou o registo dos enunciados das conjecturas. Nesta aula o tempo esgotou-se com a análise das duas primeiras. Por necessidade de

[66] O enunciado correspondente à segunda parte desta conjectura, tal como foi registado no quadro na primeira aula, iniciava-se do seguinte modo: "Os múltiplos coincidentes com múltiplos de (...) dão dízimas infinitas". Anita, ao preparar o acetato, substituiu a expressão "múltiplos coincidentes" por "denominadores coincidentes". Durante a leitura desta conjectura, alguns alunos sugerem que se acrescente a palavra "excepto" ao enunciado para que se perceba melhor.

espaço disponível no quadro para fazer registos associados à clarificação do significado da conjectura de Júlia e do processo seguido para a formular, a partir de determinado momento todos os restantes enunciados foram apagados. No curto espaço de tempo em que a conjectura de Roberto foi apresentada ou esteve escrita no quadro, Anita, ocupada com a gestão da actividade na turma, não se deu conta que a expressão "número ímpar" surgia, nesta conjectura, justaposta à palavra "outro". Deste modo, as anotações da aluna determinaram a forma de escrita do enunciado que registou no acetato. Assim que Anita apresenta a conjectura "de ninguém", Roberto, a par de vários outros colegas, chama a atenção para a ausência desta palavra. A professora dispõe-se, de imediato, a incluí-la, mas propõe que antes se debrucem sobre a conjectura tal como está registada no acetato: "Então vamos acrescentar 'de outro' mas antes de acrescentarmos comentem a conjectura tal como está" (TA 16/01/03, p. 10).

A análise da globalidade do trabalho realizado na turma durante o processo de avaliação das conjecturas incluídas na tabela 10, deixa transparecer que foi orientado, fundamentalmente, por dois objectivos: (a) promover, se necessário, a análise do enunciado visando a sua compreensão pelos alunos e (b) focar a actividade na discussão da validade da conjectura até ser obtido um consenso fundamentado sobre a sua refutação ou não. Na figura 10 incluo os principais aspectos da macroestrutura da actividade que, neste âmbito, foi desenvolvida, bem como relações entre componentes desta actividade e decisões tomadas relativamente a cada conjectura.

Na maioria dos casos, Anita inicia o processo de análise de cada conjectura a partir da sua leitura, ou seja, procura dar-lhe visibilidade complementando o registo escrito com discurso oral. Nos casos em que as contribuições apresentadas pelos alunos revelam dúvidas ou incompreensões relacionadas com o seu significado, promove uma discussão focada no seu enunciado procurando que ele se torne inteligível para a turma. Neste processo tenta, em particular, envolver os seus autores a quem, nalguns casos, disponibiliza o lugar do quadro e com quem, por vezes, o partilha através dos registos que aí faz.

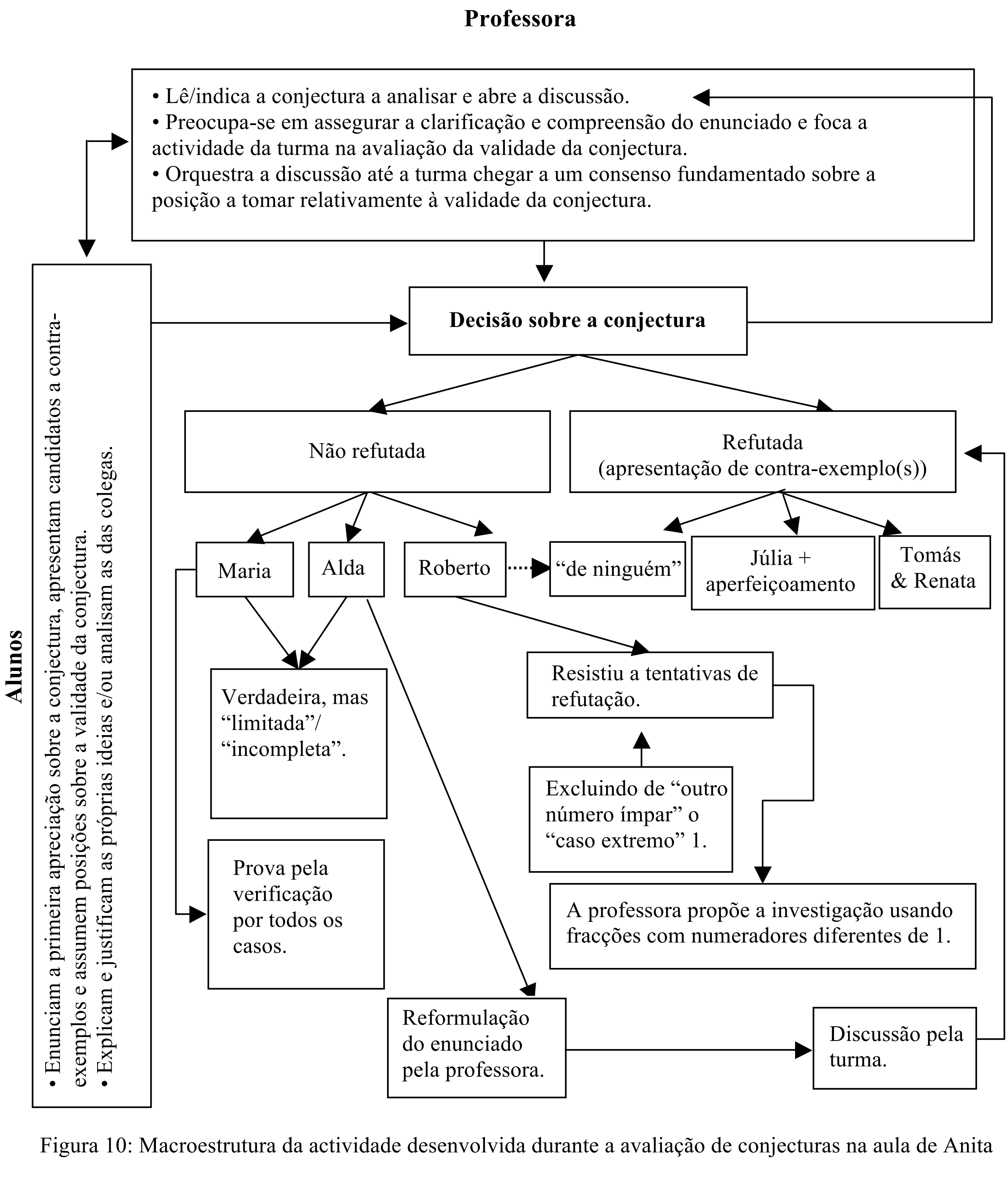


Figura 10: Macroestrutura da actividade desenvolvida durante a avaliação de conjecturas na aula de Anita

Os registos feitos no quadro, as suas observações, as questões que coloca e os relatos que apresenta, permitem não apenas tornar mais transparentes as explicações que emergem, mas também que a troca de ideias se expanda a outros elementos da turma que, assim, contribuem para a elucidação do significado da conjectura. Quando as intervenções dos alunos, na sequência da abertura da discussão, vão num sentido que se desvia da avaliação da validade da conjectura, Anita tenta inflectir o rumo da conversação não sem, previamente, as escutar, com atenção, e procurar que outros elementos da turma se pronunciem e/ou que os autores das ideias apresentadas as clarifiquem ou fundamentem.

A decisão sobre a validade de cada conjectura é tomada, pela turma, na sequência da apresentação de explicações e justificações que mostram que há exemplos, não excluídos pelo enunciado da conjectura, que originam dízimas infinitas — casos em que a conjectura é considerada refutada — e da constatação de que, tal como está formulada, não é possível encontrar contra-exemplo algum (casos das de Alda e de Maria) ou de que "resistiu" (TA 16/01/03, p. 14) a todas as tentativas de falsificação (aperfeiçoamento da de Roberto). Uma vez tomada esta decisão, inicia-se a análise de uma nova conjectura e o ciclo repete-se até ter sido esgotado o conjunto de enunciados incluídos na tabela 10.

Com o objectivo de iluminar a forma como Anita procurou gerir os momentos das aulas referentes ao processo de avaliação de conjecturas, analiso, em seguida, seis episódios de ensino em articulação com reflexões que apresenta a seu propósito. Os episódios referem-se à discussão das conjecturas de Alda, Júlia e Tomás & Renata. O primeiro revela como se inicia o processo de análise das conjecturas, permite iluminar algumas das preocupações que orientaram o trabalho de Anita no começo da discussão e o que encerrou a troca de ideias relativamente a uma conjectura não refutada. Os seguintes — segundo a quinto — pretendem ilustrar de que modo tentou orquestrar a discussão de uma conjectura cuja compreensão do enunciado se revelou particularmente problemática e gerir o processo que conduziu à sua refutação (conjectura de Júlia). Através do sexto, procuro clarificar uma das preocupações de Anita ao longo da actividade de refutação de conjecturas e que os episódios referentes à análise da de Júlia não deixam transparecer de uma forma clara.

Pelo facto de muitos alunos estarem sobretudo interessados em aperfeiçoar as conjecturas que eles próprios tinham formulado, não foi simples, para Anita, iniciar a fase da discussão colectiva: "Eu quero discutir e cada um está preocupado com a sua conjectura e por isso não quer prestar atenção ao que está vai ser discutido... " (TST 41, p. 26). Simultaneamente, tendo em conta as características dos alunos e o perfeccionismo que caracteriza muitos deles, suspeita que mesmo se conseguisse inflectir esta tendência, o disponibilizar-lhes mais algum tempo para, autonomamente, poderem aperfeiçoar as conjecturas registadas no quadro, esta estratégia poderia não ser eficaz para que fosse mais simples começar a discussão: "E mesmo que desse mais dez minutos para melhorarem nada me garante que depois dos dez minutos não viesse a acontecer a mesma coisa" (idem). Decide, assim, dar início à análise da conjectura de Alda tal como é ilustrado no episódio *O que se pode dizer sobre isto?*

O que é que se pode dizer sobre isto?

1. Anita: Aiii.... *(risos)* Eu quero discutir, não quero reformular por enquanto nada. Vá. Vamos lá então focarmo-nos primeiro na discussão. Júlia! Primeiro na discussão! *(ênfase) (pausa)* Vamos lá focar-nos ali na primeira. Ora bem, o que é que aquilo diz? Diz que as dízimas finitas podem ser 1 a dividir por alguns números pares e alguns múltiplos de 5. O que é que se pode dizer sobre isto?

Ouvem-se alunos dizendo "está incompleta".

2. Anita: É falsa, como está?

Vários alunos dizem "não" ou "mas está incompleta".

3. Roberto: Também há outros números pares e múltiplos de 5 que não dão.
4. Anita: Então, a opinião ali da secção do lado direito acerca da primeira conjectura?

As alunas do lado direito da sala (entre as quais, Júlia e Maria) falam entre si.

5. Anita: Ainda não me convenceram de nada. Vocês discutem, discutem entre vocês. O que é que vocês estão a discutir?

As alunas indicam que estão a discutir a conjectura dois.

6. Anita: Agora é para discutir a 1.
7. Júlia: Ela está incompleta.
8. Anita: Mas está incompleta porquê?

Há intervenções simultâneas de vários alunos que não se conseguem diferenciar.

9. Alguns alunos: Faltam ali coisas.
10. Cristina: O que ela está ali a dizer está certo. Está incompleto mas depois as pessoas completam.
11. Anita: Imaginem que a Alda em vez de ter escrito assim escrevia: as dízimas finitas são 1 a dividir por números pares e por múltiplos de 5.

12. Vários alunos: Estava errado.
13. Anita: Estava errado porquê?
14. Alguns alunos: Porque há múltiplos de 5 e pares que não dão dízimas finitas.
15. Anita: Imaginem que era são mesmo números pares e múltiplos de 5 *(escreve no quadro)*. Se estivesse assim afirmativo o que é que se poderia dizer?
16. Maria: Nem todos os múltiplos de 5 dão.
17. Outras alunas: Nem todos os pares.
18. Anita: Então e como é que eu refutaria se fosse assim? Para refutar o que é que eu preciso?
19. Maria: Um exemplo. 1 a dividir por 15.
20. Outra aluna: Ou 1/6.
21. Anita: 1 a dividir por 15 daria para refutar porquê?
22. Aluna: É múltiplo de 5.
23. Anita: Porque 15 é múltiplo de 5 e 1/15 é infinita. Pronto. Mas nós não temos isso escrito assim. Temos só que podem *(ênfase)* ser 1 a dividir por alguns *(ênfase)* números pares e alguns múltiplos de 5. Portanto neste caso, falsa…
24. Vários alunos: Não é.
25. Anita: Não é…
26. Vários alunos: Verdadeira é, mas está incompleta…
27. Anita: Verdadeira é, mas não cobre o leque todo. Esta, vocês escrevam aí que resistiu a tentativas de refutação embora não esteja completa. Agora a dois.

(TA 13/01/03, pp. 8-9)

A análise da conjectura de Alda inicia-se através de uma pergunta aberta: "O que é que se pode dizer sobre isto?" (§1). Esta abertura mantém-se relativamente ao começo da discussão de qualquer uma das restantes conjecturas. Por exemplo, na sequência da leitura da de Maria, interpela a turma através da pergunta "E então?" (TA 16/01/03, p. 4). Na generalidade dos restantes casos recorre a um pedido de comentário. Por exemplo "Vejam lá acordem. Vejam se comentam aquela" (idem, p. 6).

A observação da globalidade das intervenções de Anita no episódio *O que se pode dizer sobre isto?* deixa transparecer que a partir de determinado momento há uma inflexão no foco do diálogo que até aí estava a ser mantido com a turma. Numa primeira fase este diálogo visa tornar públicas posições dos alunos sobre a avaliação que fazem da conjectura ou o que justifica estas posições. Neste âmbito, através de uma questão (§2) a professora traz para primeiro plano a questão da sua validade. Sabendo que para os alunos participarem e entenderem a actividade que pretende que realizem é essencial uma compreensão profunda do significado de contra-exemplo e das consequências que a sua descoberta tem na tomada de decisão sobre a validade de uma conjectura, Anita preocupa-se, numa segunda fase, em revisitar este conceito. Porque a conjectura de Alda não o permite, reformula-a e submete o novo enunciado à discussão da turma (§11, §15): "Eu mudei a primeira conjectura para rever o que é um contra-exemplo e vermos como se refutam conjecturas. Era a primeira que íamos discutir... " (TST 41, p. 28). É esta mesma preocupação que está subjacente à opção tomada para iniciar a segunda aula: "Logo no início da segunda aula optei por começar por rever a conjectura da Alda e a sua análise. Foi para fazer um apanhado geral e rever o significado de contra-exemplo" (idem, p. 36).

As ideias apresentadas pelos alunos, em simultâneo com o destaque e clarificação introduzida pela voz da professora, que repetindo e expandindo uma destas contribuições explicita informação pressuposta e articula um aspecto essencial à compreensão do significado contra-exemplo — "Porque 15 é múltiplo de 5 e 1/15 é infinita" (§23) —, constituem recursos que contribuem para elucidar o processo de refutação de conjecturas. Por último, Anita retoma a conjectura de Alda. Através do tom de voz que adopta, enfatiza os aspectos que a diferenciam, fortemente, da reformulação que apresentou — "podem (ênfase) (...) alguns (ênfase)" (§23) — e foca, de novo, a atenção da turma na questão da validade. A conjectura é considerada verdadeira, "embora não esteja completa" (§27).

Algumas das primeiras contribuições que surgem na turma a propósito da conjectura de Júlia, são reveladoras, como o episódio *Há sempre excepções, excepções, excepções... Não se podem achar assim as dízimas finitas...* permite ilustrar, da estranheza e insatisfação que o seu enunciado provoca em alguns alunos.

Há sempre excepções, excepções, excepções... Não se podem achar assim as dízimas finitas...

1. Roberto: É sempre alguns, alguns, alguns e nunca há nenhuma propriedade que se verifique para todas…
2. Tita: Há sempre excepções, excepções, excepções... Não se podem achar assim as dízimas finitas...
3. Roberto: É sempre alguns e depois tiram-se uns e metem-se outros, mas depois há sempre outras excepções… Tem que haver outra maneira...
4. Anita: A Tita diz que não se podem achar dízimas finitas assim, com excepções, com excepções, com excepções. O que é que vocês acham?
5. Maria: Sôtora, ali está a dizer menos os múltiplos de primos e por exemplo o 1 é um número primo e dá uma dízima finita. 1 a dividir por 1 dá uma dízima finita.
6. Aluna: E aquele português… múltiplos de 5 menos ou múltiplos de 15?!…
7. Aluna: O ou é mais.
8. Outra aluna: Mas ali está menos.
9. Anita: Independentemente do português…

Vários alunos falam ao mesmo tempo, parecendo não estar satisfeitos com o enunciado da conjectura.

10. Tita: Assim há sempre excepções mais do que aquelas que lá estão.
11. Anita: A Tita diz que não pode ser assim, que há sempre muitas excepções que assim não saímos daqui. O que é que vocês acham?
12. Vários alunos: Que tem razão.
13. Anita: Ah, pronto. Isso é importante, mas a questão aqui era discutir a validade da conjectura como está. E validade é: será que ela é verdadeira ou não?

(TA 13/01/03, p. 10)

A insatisfação dos alunos parece enraizar-se em dois problemas que percepcionam na conjectura, um deles relacionado com a sua forma de escrita. Júlia, ao substituir o primeiro enunciado que apresentou pela sua reformulação, inadvertidamente registou “múltiplos de 5 menos *ou* múltiplos de 15” em lugar de “múltiplos de 5 menos *os* múltiplos de 15”. É esta “gralha” que parece estar na base da intervenção de uma aluna (§6). O outro problema, relaciona-se com o conteúdo da conjectura e, em particular, com as suas potencialidades para a identificação das dízimas finitas.

Anita lida diferentemente com estes dois problemas. Neste momento da aula, remete para plano secundário o primeiro (§9), embora mais tarde foque a atenção da turma na forma de escrita, o que permite corrigir a referida "gralha". Porque considera importantes as questões que Tita e Roberto levantam, privilegia o segundo e procura, através dos relatos que faz e das questões que coloca (§14, §11), fazer emergir contribuições que permitam não apenas torná-lo mais inteligível, como identificar o que outros elementos da turma sobre ele pensam: "Primeiro queria aproveitar as ideias da Tita e do Roberto que acho que são importantes. Queria clarificar as opiniões deles e ver o que os outros achavam" (TST 41, p. 28). A adesão imediata que Anita manifesta às ideias expressas pela sua colega a propósito deste momento da aula — "Pois, foi por isso" (TST 41, p. 29) —, contribui para clarificar o porquê do destaque que procurou que tivessem:

> Eu achei interessante esta fala do Roberto porque mostra que ele não está satisfeito com aquelas conjecturas que ali estão, quer arranjar uma conjectura que dê para todos. Vê-se que ele percebe que tem que arranjar uma conjectura geral, que pareça dar para todas as dízimas finitas. Mostra que nenhuma daquelas que foram vistas até ali o satisfaz. Achei esta observação muito importante. E se calhar, Anita, estás a pôr em evidência isso porque também achaste importante. (Rebeca, TST 41, pp. 28-9)

Tendo em conta a importância atribuída às contribuições de Tita e Roberto, uma possibilidade de prossecução da actividade na aula seria a de criar uma abertura para o discurso dos alunos se expandir, o que possibilitaria, em particular, compreender porque é que vários aderem (§12) à posição de Tita. O comentário de Anita na sequência da minha observação focando que esta actividade se desenrolou no sentido da discussão da validade da conjectura, permite elucidar porque não foi esta a opção que tomou: "É porque me interessa discutir as conjecturas como estão" (TST 41, p. 29).

A análise da conjectura de Júlia, organiza-se em torno de tentativas de refutação feitas pelos alunos e decorre em duas fases. A primeira esgota o tempo da aula de dia 13 e termina quando a professora foca a atenção da turma no facto de 2 ser um número primo. A segunda, localizada na primeira parte da aula de dia 16, permite concluir que a conjectura é falsa. Essas tentativas conduzem, frequentemente, à conclusão de que há candidatos a contra-exemplos que afinal não o são, pois a própria formulação da conjectura os exclui. Deste modo, o processo de refutação desta conjectura entrelaçou-se, fortemente, com a compreensão do seu enunciado. Os episódios *Sendo ou não um múltiplo de 7, continua a ser um múltiplo de 2* e *Estavam há bocado a falar no 10, mas o 10 é múltiplo de 5 e o 5 é primo*, localizados na primeira das referidas fases, permitem apoiar esta ideia e contribuem para iluminar de que modo Anita, ao mesmo tempo que tentava que o significado da conjectura se tornasse mais inteligível para os alunos, procurava focar a actividade da turma na avaliação da sua validade.

Sendo ou não um múltiplo de 7, continua a ser um múltiplo de 2

1. Tita *(para a Júlia)*: Se tu fores fazer 1 a dividir por 14 dá infinita e 14 é um número par, é múltiplo de 2.
2. Anita: Tita, diz alto.
3. Júlia *(para a Tita)*: O 14 é um múltiplo de 7 e o 7 é um número primo. Ali está menos os múltiplos de primos.
4. Tita *(para a Júlia)*: Sendo ou não um múltiplo de 7 continua a ser um múltiplo de 2.
5. Júlia *(para a Tita)*: Está bem, mas ali está os múltiplos de 2 menos os múltiplos de primos.
6. Outro aluno: Então e o 22?

Outros alunos falam em simultâneo.

7. Anita: Olhem… Então, então… Estão a discutir muito coiso. Vocês estavam a tentar discutir o quê? Era o que eram múltiplos pares menos múltiplos de primos. Quem é que dá um exemplo para discutir com a Júlia aqui?
8. Aluna: 1 a dividir por 1.
9. Outra aluna: Eu não percebo o português.
10. Anita: O que ela está a querer dizer, penso eu, dentro do português dela é que para *n* considera os pares, não é Júlia? *(a Anita escreve no quadro 2, 4, 6, 8, 10...)*. E depois a seguir…
11. Alunos: Há excepções.
12. Anita: O que é que ela tira daqui *(aponta para a sequência de pares)*?
13. Alunos: Tem que tirar os múltiplos de primos.
14. Anita: Então ela aos números pares tem que tirar aqueles que são também múltiplos de números primos.
15. Aluna: Então em vez de ser menos devia ser à excepção dos múltiplos de primos.
16. Anita: Está bem, depois podemos ver o português. Agora queremos ver a validade. Já percebemos o que ela está a querer dizer?
17. Vários alunos: Sim.

A professora pede aos alunos para analisarem a conjectura.

(TA 13/01/03, pp. 10-11)

A formulação da conjectura de Júlia é complexa. O seu enunciado inclui duas componentes cada uma das quais constituída por duas partes. Na primeira parte são referidos os casos de denominadores de fracções que podem originar dízimas finitas: múltiplo par (primeira componente) ou múltiplos de 5 (segunda componente). A segunda parte refere as "condições de excepção" de cada uma das componentes, ou seja, as circunstâncias em que os múltiplos referidos não geram estas dízimas: múltiplos de primos (primeira componente) e múltiplos de 15 (segunda componente). Compreender o significado desta conjectura passa, antes de mais, por considerar conjuntamente, relativamente a cada componente, quer a primeira parte, quer a segunda. A complexidade é acrescida porque há dízimas finitas que são excluídas pela primeira componente (por exemplo, 1/10 ou 1/40) e que apenas a segunda permite incluir. Ou seja, para estas dízimas não serem descartadas, há que ter em conta o conjunto constituído pela união das fracções oriundas das duas componentes, o que requer que a atenção se foque, simultaneamente, em ambas e não apenas numa só. Além disso, num contexto numérico a palavra "menos", usada no enunciado, é ambígua, pois pode ser interpretada, quer como diferença, quer como excepção. As dificuldades dos alunos parecem emergir de todas estas questões.

Tita, embora sem explicitamente o dizer, apresenta 1/14 como contra-exemplo, focando-se, assim, na primeira componente da conjectura. As suas contribuições (§1, §4) parecem revelar que a interpretação desta componente não contempla que a autoridade dada aos números pares para serem denominadores de fracções que originam dízimas finitas é cancelada se estes também fossem múltiplos de primos. É este aspecto que Júlia destaca, ou seja, lida com a objecção da colega aceitando os dados de que a colega parte (1/14 é dízima infinita e 14 é um número par) mas mostrando que estes dados não apoiam a conclusão a que Tita pretende chegar devido às condições de excepção da primeira componente da conjectura (§3, §5). Simultaneamente, fundamenta o seu raciocínio justificando porque é que 14 satisfaz estas condições: "o 14 é um múltiplo de 7 e o 7 é um número primo" (§3).

Porque Anita considera que as contribuições de Tita e Júlia são importantes para a compreensão da conjectura, procura que a discussão sobre a sua primeira componente se alargue a outros elementos da turma: "É que elas aqui estavam a discutir só uma com a outra e eu queria que os outros também se envolvessem [comentário a §7]" (TST 41, p. 29). E porque pensa que na fase em que a discussão se encontra não são muito relevantes as questões relacionadas com a forma de escrita do enunciado que algumas alunas levantam (§9, §15), opta por ser ela própria, através das explicações que apresenta, dos registos que faz no quadro e das questões que coloca (§10 - §16), a ajudar a turma a entender o que Júlia "está a querer dizer" (§16), destacando, em seguida, o objectivo orientador da actividade, ou seja, a questão da validade da conjectura: "Achei que não valia a pena estar ali a perder tempo com o português e avancei com a explicação" (TST 41, p. 32).

À medida que a análise da conjectura de Júlia prossegue, novas dúvidas se levantam sobre o seu significado. Numa primeira fase, Anita faz no quadro alguns registos que permitem clarificar o significado da segunda componente da conjectura. Mais tarde, remete as explicações para Júlia: "Explica lá, Júlia, que eles ainda não perceberam o que queres dizer" (TA 13/01/03, p. 11). Como o episódio *Estavam há bocado a falar no 10, mas o 10 é múltiplo de 5 e o 5 é primo* ilustra, esta aluna foca-se, exclusivamente, na primeira componente do enunciado, mas a intervenção que faz (§1), ao centrar-se num exemplo de uma dízima finita que esta componente exclui, permite alargar a discussão à segunda componente e traz para primeiro plano a importância da complementaridade de ambas.

Estavam há bocado a falar no 10, mas o 10 é múltiplo de 5 e o 5 é primo

1. Júlia: É aos pares tirar os múltiplos de primos. É isso que eu quero. Estavam há bocado a falar no 10, mas o 10 é múltiplo de 5 e o 5 é primo.
2. Roberto: Tiramos os múltiplos de primos. Mas o 10 é múltiplo de 5.
3. Júlia: Exactamente e o 5 é primo.
4. Vários alunos: Mas o 5 e o 10 dão.
5. Maria: Mas o 1/35 já não dá.
6. Aluna: Tanto o 5 como o 10 dão dízimas finitas e o 5 é um número primo.
7. Maria: Sôtora, o 1/35 não dá.

8. Anita: Espera. Discutam uma coisa de cada vez. Eu já vi que há pessoas que estão a dar argumentos válidos, mas depois como há um que fala e outro que fala, às tantas ninguém está bem a ver. Quem é que dá um exemplo concreto para discutir? Só um *(ênfase)*. Vamos discutir o 1/10. O que é que acontece a esta? Obviamente é uma dízima…
9. Alunos: Finita
10. Anita: Finita.
11. Roberto: E o 10 é um múltiplo de um número primo que é 5 e continua a dar dízima finita.
12. Tomás: Ali diz que é para tirar os múltiplos de primos aos pares, não é aos múltiplos de 5.
13. Anita: E então?
14. Tomás: Então o 10 devia ser considerado porque ela só diz para tirar os múltiplos de primos aos pares, tinha que se tirar o 6, o 12…
15. Anita: A minha pergunta neste momento, parece que é isso que está aqui em questão, é se se tira o 1/10 ou não naquilo que ela tem.
16. Júlia: Não, porque o 10 é múltiplo de 5 e eu peço para tirar os múltiplos de 15 e o 10 não é múltiplo de 15.

As opiniões dos alunos continuam divididas relativamente ao 10 ser ou não excluído pela conjectura. Há alguns que referem que é incluído pela segunda parte, enquanto que outros parecem continuar a achar que o facto da primeira parte referir múltiplos pares menos múltiplos de primos o exclui.

17. Tita: Na segunda parte da conjectura há qualquer coisa que não bate certo, porque ali pede só para tirar os múltiplos de 15 e o 35 não é múltiplo de 15 pois não? E dá uma dízima infinita.

Vários dos alunos continuam a discutir se o 1/10 é ou não excluído pela conjectura da Júlia.

18. Roberto: Tinha que se tirar o 10 porque o 10 é múltiplo de um primo.

A professora escreve no quadro 1/10 e 1/35.

19. Anita: Vamos concentrar-nos e vocês podem pensar um bocadinho, para discutirmos depois, no 1/10 e no 1/35 e vamos ver quais são as consequências disto encarado neste contexto (*aponta para a conjectura da Júlia*).

(TA 13/01/03, pp. 11-13)

O documento reflexivo que Anita elabora sobre as aulas em análise, deixa transparecer que, no processo de orquestração das discussões que ocorreram na turma procurou, entre outras, fazer intervenções através das quais:

> Coloca questões do tipo *E então?* para que os alunos expliquem (...) torna visível o que está em discussão, evidencia as situações em que não se conseguem distinguir as intervenções e em que lhe parece difícil que [os alunos] sigam o raciocínio uns dos outros dado o aparecimento simultâneo de muitos argumentos (o que não implica que tenham de pôr o dedo no ar nem nada disso – mas "organizar" um pouco a partilha). (DEA, 25/02/03, p. 4)

Parecem ter sido estas intenções que orientaram o seu modo de agir ao longo do episódio *Estavam há bocado a falar no 10, mas o 10 é múltiplo de 5 e o 5 é primo*. Com efeito, quando surgem, em simultâneo, candidatos a contra-exemplos que têm uma natureza diferente na medida em que um o é, de facto (1/35), enquanto que outros resultam de interpretações problemáticas do enunciado da conjectura (1/5 e 1/10 embora o numerador não seja articulado), Anita preocupa-se em organizar a partilha de ideias de modo a que a atenção da turma se foque apenas um caso, enfatizando este aspecto através do tom de voz que usa (§8). Simultaneamente, procura centrar a actividade dos alunos naquele que mais directamente se prende com o significado do enunciado da conjectura, e não com a sua refutação (§8). Além disso, reformula uma das contribuições apresentadas (1/10) explicitando assim informação pressuposta, ou seja, torna visível que o 10 de que os alunos falam (§4, §6) constitui o denominador de uma fracção do tipo 1/n e que é esta fracção que, no contexto da conjectura, deve ser analisada: "E eu digo: Espera. Discutam uma coisa de cada vez. Vamos discutir o 1/10 [§8]. Também é uma opção tomada tendo em conta o que se está a passar. Alguns ainda não tinham percebido a conjectura" (TST 41, p. 30).

A contribuição de Tomás (§12) é ambígua. Não é claro, por exemplo, se este aluno ao referir que os múltiplos de primos não se tiram dos múltiplos de 5 está a considerar que a conjectura exclui, ou não, 1/10. Anita procura que o aluno expanda o seu raciocínio (§13) de modo a que, quer ela própria, quer a turma, possam conhecer o que pensa. No entanto, a justificação que ele enuncia, embora torne visível a sua posição relativamente à inclusão do caso em análise (§14), não constitui uma garantia para esta inclusão, ou seja, não explica porque é que os dados de que parte (nomeadamente "tiram-se os múltiplos de primos aos pares") são relevantes para a conclusão que quer estabelecer.

Perante esta situação, Anita poderia, por exemplo, ter posto em questão a garantia apresentada, submetê-la à avaliação da turma ou prosseguir a discussão de um modo que permitisse ou a emergência de novas garantias que apoiassem a posição de Tomás ou de ideias que pusessem em causa esta posição. Através da visibilidade que procurou dar ao objecto do debate (§15), foi esta última via que Anita adoptou. Este modo de agir permitiu a Júlia apresentar uma justificação que torna pública que a inclusão do caso 1/10 se deve, não à primeira componente da conjectura em que até ao momento os colegas se focaram, mas sim à segunda e ao facto de não ser excluído pelas suas "condições de excepção" (§16). Esta justificação não é, no entanto, suficiente para alguns alunos e o debate sobre se a conjectura de Júlia exclui, ou não, 1/10 prossegue. As opiniões dividem-se e, por outro lado, surge uma contribuição que torna visível porque é que há, pelo menos, um exemplo de uma fracção que origina uma dízima infinita, que não é eliminado pelas "condições de excepção" da conjectura (§17). Face a esta situação, Anita opta por interromper a discussão colectiva e cria uma abertura para os alunos, em trabalho de pares, reflectirem sobre a conjectura e as ideias que, a seu propósito, ouviram: "A Tita fala no 1/35 que refuta a conjectura [§17], outros continuam a discutir o 1/10 e eu achei que era melhor parar para eles pensarem um bocadinho nos dois casos antes de continuar [comentário a §19]" (TST 41, p. 31).

As dúvidas que persistem relativamente à interpretação da conjectura levam Anita a optar, na sequência desta interrupção, por solicitar a Júlia que vá ao quadro explicar, detalhadamente, o raciocínio feito para a formular: "Escreve aí tudo no quadro, como se estivesses a fazer. Explica lá o que fizeste" (TA 13/01/03, p. 13). No decurso deste processo e apoiando-se nos registos, intervém no sentido de destacar a existência das duas componentes na conjectura e a necessidade de ambas se terem em conta para se poder decidir se um dado caso é, ou não, por ela excluído: "A Júlia tem 2x5 igual a 10. Se ela nos múltiplos de pares cortar também os que são múltiplos de 5 tirava o 10, mas o que é que ela acrescentou a seguir? (*indica a Júlia que prossiga*) (idem). Além disso, a intervenção de um outro elemento da turma — Mas o ´menos` é corta ou subtrai?" (idem) — proporciona-lhe um recurso para abordar, explicitamente, o significado da palavra "menos" existente no enunciado, o que contribui para que a ambiguidade que encerra seja minorada: "É corta, tira. Ela vai tirar os que são simultaneamente múltiplos de 5 e de 15" (idem).

Finalizada a explicação da conjectura, Anita procura indagar se Júlia, ao formulá-la, teve em conta que 2 também é um número primo: "É assim, tu ao retirares aos múltiplos de 2 os múltiplos de primos vais retirar os múltiplos de quaisquer primos?" (idem). É esta intervenção, localizada muito perto do final da aula, que permite compreender que esta aluna, embora conhecendo o significado de número primo, se esqueceu de que 2, apesar de ser par, também é primo, o que conduz ao aperfeiçoamento da conjectura que enunciou.

A segunda fase de análise da conjectura de Júlia (aperfeiçoada), inicia-se com Anita procurando, a partir das interacções que tenta estabelecer com os alunos, clarificar o seu significado, promover a análise das consequências da inexistência do aperfeiçoamento feito e legitimar a formulação adoptada. O episódio *Ficam ali, mesmo cortando os múltiplos de 15, alguns que não servem* revela como foi encerrada a discussão.

Ficam ali, mesmo cortando os múltiplos de 15, alguns que não servem

1. Anita: (...) O problema é, por exemplo… A Tita está a dizer, vejam lá se concordam com ela, que ficam ali, mesmo cortando os múltiplos de 15, alguns que não servem...
2. Aluno: O 35.
3. Anita: Por exemplo 1/35. O que é que acontece com 1/35?
4. Vários alunos: Dá uma dízima infinita.

Há intervenções de alunos em voz muito baixa que não são perceptíveis.

5. Tita: Ali *(referência aos múltiplos de 5)* se excluíssem também os múltiplos de primos, já dava…"
6. Anita: Eu agora… Estamos a discutir as conjecturas, não é? Se esta *(aponta para 1/35)* é uma dízima quê?
7. Alunos: Infinita.
8. Anita: É uma dízima infinita *(escreve no quadro dízima infinita junto a 1/35)*. Isto tem alguma consequência, não tem, em relação ao que estamos a dizer?
9. Alguns alunos: Não dá.
10. Anita: Não dá o quê?
11. Alunos: A conjectura tem que ser refutada.
12. Anita: Está bem mas estamos agora a discutir se aquilo dá ou não dá.
13. Alguns alunos: É um contra-exemplo.
14. Anita: É um contra-exemplo. Então a conjectura como está, é o quê?

15. Alunos: É falsa.

A professora regista no quadro que a conjectura que foi analisada é falsa.

(TA 16/01/03, pp. 2-3)

Anita recorre a um relato (§1) para dar visibilidade à contribuição de uma aluna que incide na segunda componente da conjectura, ou seja, naquela que permite obter inúmeros exemplos de dízimas infinitas que não são excluídas pelas suas "condições de excepção". Através desta via, tenta que os outros elementos da turma foquem a sua atenção no que foi dito e se posicionem sobre o que ouviram, o que poderá ser favorável para que todos compreendam o que pode permitir considerar a conjectura falsa:

> E depois chamo a atenção para o que a Tita está a dizer e digo aos alunos para verem se estão de acordo com a ideia que ela apresenta ou não. Estou a submeter ao escrutínio da turma o que a Tita disse para que os outros assumam uma posição e a defendam. (TST 41, p. 36).

As contribuições dos alunos não correspondem, contudo, às expectativas de Anita. Permitem tornar visível que 1/35 é uma dízima infinita (§4, §7), que a conjectura deve ser refutada (§11), que o caso constitui um contra-exemplo (§13, §14) e que, por isso, a conjectura é falsa (§15). No entanto, o laconismo que as caracteriza, em simultâneo com inexistência de questões que permitam, quer desvelar o pensamento matemático que lhes está subjacente, quer o que o fundamenta, conduzem a que no espaço de discurso da aula não surjam explicações e/ou justificações detalhadas que, a existirem, poderiam facilitar a compreensão das razões que conduzem à refutação desta conjectura. Este laconismo é um factor de perturbação para Anita que, desde o início da aula, luta com a dificuldade de envolver os alunos no discurso sem o conseguir satisfatoriamente:

> Depois um aluno diz só 35 [§2] e eu: *o que é que acontece com o 1/35* [§3] e mais à frente outro diz *não dá* [§9] e eu pergunto: *"Não dá o quê?"* [§10]. Acho estas conversas demasiado curtas. Sim, não, não dá... Estão a falar por meias palavras e às tantas mais à frente eu digo mesmo que há parcimónia de palavras. Está tudo muito adormecido! Eu notei que já estavam a começar a falar mas tudo aos bocadinhos, aos bocadinhos, com frases muito curtas... E eu pensei: Espera aí... Tenho que fazer qualquer coisa com isto... E por isso mais à frente explicito e digo mesmo: *Eu cá não percebo nada. Vocês só falam por parcimónia de palavras*... [TA 16/01/03, p. 6]. Esta explicitação foi uma opção. (TST 41, p. 36)

Globalmente, o processo de análise da conjectura de Júlia com o associado aperfeiçoamento, teve muitos traços em comum com a actividade desenvolvida relativamente a outras conjecturas que também foram refutadas. Em traços largos, este processo corresponde ao que foi descrito subsequentemente à figura 10. Há, no entanto, um aspecto que diferencia a actividade correspondente à etapa final da referida análise, ou seja, aquela que especificamente se relaciona com a indicação de um contra-exemplo que conduz à conclusão de que a conjectura é falsa, da que foi desenvolvida noutros momentos da aula: a existência, ou não, de questões focadas na justificação das contribuições que emergem. No episódio *Ficam ali, mesmo cortando os múltiplos de 15, alguns que não servem,* estas questões estão ausentes. O mesmo não aconteceu noutras ocasiões como, por exemplo, o encerramento da discussão da conjectura de Tomás & Renata — episódio *Então arranjem uma coisa que me convença* — permite ilustrar.

Então arranjem uma coisa que me convença

1. Anita: Então arranjem uma coisa que me convença. Eu ainda não estou convencida de nada *(risos)*.

*Vários alunos dizem 1/85 e que 85 é igual a 17 vezes 5 e a professora escreve no quadro 1/85 e 85= 17*x*5.*

2. Anita: E agora?
3. Renata: 1/85 é um contra-exemplo.
4. Anita: E é um contra-exemplo porquê?
5. Aluna: Porque é uma dízima infinita.
6. Renata: Quando indicámos as excepções, não indicámos o 17.
7. Anita: Está bem, mas isso é já a explicação do raciocínio todo. Mas agora ligando ali com o contra-exemplo, porque é que esta *(aponta para 1/85)* serve?
8. Aluna: Porque é múltiplo de 17.
9. Outra aluna: E porque é uma dízima infinita.
10. Anita: Está bem. Mas estão a pensar nesta porquê? Porque é que ela está nas condições daquilo? Podia não estar…
11. Alunos vários: Porque é múltiplo de 5.
12. Anita: Para já, porque é múltiplo de 5. 85 é múltiplo de 5 *(regista no quadro)*. Portanto posso agarrar nele pela primeira parte da conjectura, até à vírgula. Dá uma dízima infinita *(regista no quadro)*. E o que é acontece, portanto?
13. Aluna: 85 é 17 vezes 5.

14. Anita: Aparece ali um 17...
15. Alunos vários: Não faz parte das excepções.
16. Anita: E 17 não faz parte daquelas excepções. E então o que é que acontece à conjectura?
17. Alunos: É falsa.
18. Anita: Cai, é falsa. Esta não resistiu por pouco às tentativas de falsificação! *(risos)*

(TA 16/01/03, pp. 8-9)

As intervenções de Anita deixam transparecer que procurou fazer emergir, no espaço de discurso da aula, contribuições que tornassem claramente visível porque é que o caso 1/85 permite refutar a conjectura. Com efeito, quando Renata refere que é um contra-exemplo (§3) pergunta porquê (§4). Perante ideias que, embora importantes, não revelam porque é que 1/85 não é excluído pela primeira parte da conjectura, preocupa-se, através das justificações que pede (§7, §10) e da expansão de uma das contribuições que ouve (§12), em focar a atenção da turma neste aspecto. Por último, centra a atenção nas "condições de excepção" da conjectura e procura destacar, apoiando-se nas ideias dos alunos, que o caso não só origina uma dízima infinita (§12) como não é excluído por estas condições (§14, §16).

A conjectura de Roberto foi a última a ser analisada e, entre todas aquelas que foram formuladas de modo a ter em conta a generalidade das fracções do tipo 1/n, foi a única não refutada. Esta conjectura, tal como as de Júlia, Tomás & Renata, tem uma formulação que inclui "condições de excepção": a autoridade dada aos múltiplos de 2 e de 5 para gerarem dízimas finitas é cancelada quando o denominador é "múltiplo de outro número ímpar". As explicações apresentadas por Roberto e as várias tentativas de refutação feitas revelam que em "outro número ímpar", os alunos consideram qualquer ímpar diferente de 5 mas negligenciam o caso do 1, que é também um ímpar diferente de 5. Muito perto do final da análise desta conjectura, ou seja, quando os alunos indicam não conseguirem encontrar um contra-exemplo, é neste caso e na análise das consequências que advêm de não se ter em conta, que Anita foca a actividade da turma: "Eu achei que era importante chamar a atenção para o caso do 1" (TST 42, p. 17). Lamenta, no entanto, não ter introduzido a alteração feita no enunciado registado no acetato tal como fez noutras ocasiões. Uma possibilidade explicativa que apresenta é o facto de vários alunos terem apresentado respostas indiciadoras do carácter óbvio da necessidade de exclusão do referido caso:

> Podia ter registado... Valia a pena... Eu normalmente registo tudo, mas aí escapou... Mas tu não viste a reacção deles quando eu lhes perguntei o que é que acontecia se aquele outro ímpar fosse 1? Uma diz: *Dava zero*. Depois outra: *Então ficávamos sem os números todos*. E a Cristina: *A gente lembra-se lá do 1 sôtora...* A ideia dela era que não valia a pena e se calhar foi por isso que não registei. Mas se calhar valia a pena, na mesma, ter registado... (...) Eu, às vezes, reajo um bocado em função do que eles dizem. Deve ter sido por isso que não registei... Naquela altura fiquei assim... Vacilei, pronto... Mas agora acho que devia ter registado. (TST 42, pp. 17-8)

Tal como aconteceu a propósito da conjectura de Júlia, durante o processo de análise de várias outras surgiram, frequentemente, desacordos relacionados com o facto de um determinado caso apresentado como candidato a contra-exemplo ser, ou não, excluído pelo enunciado da conjectura. Na secção *Lidando com a emergência e resolução de desacordos* apresento uma caracterização sumária do contexto em que ocorreram as principais situações de divergência de ideias e do modo como esta foi ultrapassada. Incluo, também, uma análise detalhada de um episódio de ensino ocorrido a propósito da conjectura de Roberto.

Envolvendo a turma na investigação de uma conjectura visando ampliar do seu domínio de validade

A exploração da segunda parte da tarefa *À procura de dízimas finitas*, ou seja, a investigação de fracções que originam dízimas finitas independentemente do seu numerador ser 1 ou qualquer outro número inteiro, decorreu nas duas primeiras partes da aula de dia 20. Ao pedido da indicação de quais as conjecturas "mais gerais" (TA 20/01/03, p. 1) e que "na última aula ficaram como resistentes" (idem), segue-se o registo, no quadro, da conjectura de Roberto e da "c.pot.". Anita propõe aos alunos que, em pares, investiguem se elas se mantêm para fracções com numeradores diferentes de 1. Estes registos permaneceram no quadro durante toda a aula pois Anita tencionava "relacionar" (DEA, 25/02/03, p. 3) as duas conjecturas. No entanto, nas suas palavras, "abandonei sem me dar conta, uma das conjecturas [a de Roberto] (...) segui o rumo da discussão e esqueci-me” (idem). Assim, a actividade da turma centrou-se, apenas, na investigação da conjectura “c. pot.”.

Inicia-se o trabalho de pares e começam a surgir exemplos que são apresentados como refutando a conjectura: 1/23 e 3/15. Como “estão a surgir em simultâneo” (TST 42, p. 31) e Anita pretende “aproveitar todas as sugestões” (idem), decide, no momento, promover a sua discussão conjunta. Ao reflectir sobre a aula questiona-se, no entanto, se esta teria sido a melhor opção. Na sua perspectiva “são alunos do 9º ano” (TST 42, p. 31) e um dos casos “tem uma natureza completamente diferente do outro” (idem):

> Se calhar devia pegar num deles e pôr o outro num cantinho... Mas, estão a aparecer, percebes? Não desprezar... (...) podia era ter, se calhar, gerido melhor. (...) Podia era ter discutido uma de cada vez... (TST 42, p. 31)

As alunas que apresentam 1/23 afirmam que esta fracção representa uma dízima finita, apoiando-se no resultado que vêem aparecer no visor da calculadora que usam. A ser verdadeira esta afirmação, 1/23 refutaria a conjectura “c. pot.” para fracções do tipo 1/n, o que não acontecia com 3/15. A situação é ultrapassada a partir da divisão de 1 por 23 feita com “papel e lápis” por um elemento da turma e, na sequência, Anita prossegue a discussão do caso 3/15, tal como ilustra o episódio *Vamos então discutir o 3/15*.

Vamos então discutir o 3/15

1. Anita *(para a turma)*: Vamos então discutir o 3/15. Oh Roberto, o que é que te levou há bocado a pensar... *(diz em voz muito baixa para a Tita que está sentada muito perto do quadro: “antes de tu dizeres isso, está bem?”)*... que esta aqui *(aponta para 3/15)* poderia falsificar esta conjectura?
2. Roberto: Porque dá uma dízima finita.
3. Anita: Porque dá uma dízima finita e mais? Só por isso ou mais alguma coisa? O que te levou a pensar que poderia falsificar? *(silêncio)* Não foi só por te dar uma dízima finita, com certeza. Foi por mais alguma coisa ou não? *(silêncio)* Porquê aquela e não outra qualquer? *(silêncio)*. Porque é que implicaste com aquela, coitada?!

O Roberto intervém em voz baixa; a professora diz, por diversas vezes, “não ouço”.

4. Anita *(para Roberto e colega de mesa Rosa)*: Porque é que há bocado vocês diziam que 3/15 podia falsificar esta *(aponta para a segunda conjectura [“c. pot.”])*?
5. Roberto e Rosa: Porque dá uma dízima finita.
6. Anita: Porque dá uma dízima finita e depois? *(abana as mãos)*

Ouvem-se alunos dizendo “porque assim a conjectura era falsa” ou “porque assim já não se verificava”.

7. Rosa: Porque depois a conjectura já não podia ser verdadeira.
8. Anita: Mas porquê?! *(ênfase)*
9. Roberto: Porque o 15 dava 5 vezes 3.
10. Anita: Por exemplo, 1/2 também podia falsificar a conjectura?

Há várias intervenções simultâneas; ouvem-se vários “não”· A professora faz um gesto a alguns alunos indicador de que devem aguardar e aponta para Roberto e Rosa

11. Rosa: O 15 é múltiplo de 3 e dá uma dízima finita.

A professora iguala a fracção 3/15, escrita no quadro, a 3/3x5.

12. Anita: A situação é a seguinte… Oh meninas aí de trás!… Temos assim, em relação à última: as dízimas finitas são aquelas em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos qualquer coisa do tipo 2^nx5^m. E eles ali propuseram esta fracção 3/15. E a ideia deles é a seguinte. Então, mas... Para já isto dá uma dízima finita que eles viram e depois decompondo o denominador chegaram a 3x5. E então pensaram assim: bem, então se dá uma dízima finita e se me aparece isto assim *(aponta para 3x5)*, será que isto é da forma disto que está aqui? *(aponta para 2^nx5^m).*
13. Vários alunos: Não.
14. Anita: E então começaram a suspeitar que este exemplo *(aponta para 3/15)* poderia falsificar esta conjectura. Quem é que concorda? *(aguarda, olhando para os alunos)* Concordas que falsifica *(para um aluno)*?

A professora aguarda que os alunos intervenham. Ouvem-se alguns dizendo “eu também concordo”. Uma aluna diz “eu não sei se concordo, não estou a perceber muito bem”. Há outras intervenções pontuais feitas em voz muito baixa que não são perceptíveis.

15. Anita: Será que falsifica?
16. Renata: Oh sôtora, só se se puser 3x5x2^0. Mas ainda tem ali o 3…
17. Anita: Umh, umh… E então?
18. Roberto: Posso dizer?
19. Cristina: Diz, Roberto.
20. Anita: Para já, se nós quisermos escrever esta *(aponta para a segunda conjectura)* assim um bocadinho melhor... Vamos lá completar isto.

A professora lê o enunciado da conjectura e interage com os alunos de modo a torná-lo mais preciso (...) Fica escrito o enunciado: “As dízimas finitas são aquelas que resultam de uma fracção em que a partir da decomposição dos denominadores em factores primos obtemos 2^nx5^m, $n,m \in \mathbb{N}_0$”.

(TA 20/01/03, pp. 3-5)

A observação da primeira intervenção de Anita revela que as suas mensagens são endereçadas a três audiências prioritárias. A primeira, constituída pela globalidade da turma, visa focar a atenção no caso apresentado como uma possibilidade de refutação da conjectura "c. pot.". A segunda é dirigida, exclusivamente, a Tita e, intencionalmente, é feita num tom de voz muito baixo. Na aula não me apercebi da existência desta fala e só através da gravação áudio consegui recuperá-la e compreendê-la. Na altura, a professora apercebeu-se de que a contribuição que esta aluna pretendia apresentar era prematura, na medida em que ao incidir no aperfeiçoamento da conjectura, poderia contribuir para diminuir as oportunidades de outros colegas se envolverem na discussão e, também, de entenderem porque é que, de facto, o caso apresentado a refutava. Através da mensagem que dirigiu a Tita e do tom de voz que usou, Anita tentou evitar que estas oportunidades se perdessem e, simultaneamente, pela cumplicidade que procurou estabelecer com a aluna, que esta se sentisse remetida para um plano secundário:

> É um controlo. Quando eu percebo que há um aluno que já vai dizer uma coisa que vai arrumar já com a discussão porque já está muitos degraus acima eu digo: Espera aí... E muitas vezes digo baixinho, só para ele, ou passo discretamente e digo ou faço aqueles sinais... (...) Ela [Tita] já estava a dizer tudo... Já estava a dar uma sugestão que servia para aperfeiçoar a conjectura... (...) É, é. Foi isso, sim senhor [adesão à ideia que apresentei "parece-me que a Anita tenta que haja uma certa cumplicidade"], para ela não se sentir posta de lado. (TST 42, p. 39)

A terceira mensagem é dirigida a Roberto. Através dela e de outros movimentos subsequentes (§3, §4, §6, §8, §10), Anita procura fazer entrar no espaço de discurso da aula uma justificação clara e detalhada que permita entender o raciocínio que permitiu a este aluno e à colega com quem trabalhou afirmarem que 3/15 refuta a conjectura "c. pot.":

> Acho que a resposta dele não chega e pergunto porquê: *Porque dá uma dízima finita e mais? Só por isso ou mais alguma coisa?* [§3]. Lá está ele a dizer coisas implícitas e não pode dizer. (...) Estou a tentar que ele clarifique. Mas há silêncios. Isto irrita-me! (risos) (...) Depois vou indo mais um bocadinho, mais um bocadinho, mais um bocadinho, até que chega a uma altura em que pergunto: *Então e o 1/2 também podia falsificar a conjectura?* Ainda vai o 1/2 que também é finita para ver se desenvolvem mais... (TST 42, pp. 39-40)

Em determinado momento sente ser importante fazer um relato das ideias apresentadas na turma (§12, §13). Em primeiro lugar porque o processo de análise de 3/15 já se alongava há bastante tempo: "Foi muito longo" (TST 42, p. 42). Além disso, porque as contribuições dos alunos foram breves e pouco completas: "Mas foi aos bocadinhos! (...) se calhar podiam ter dito as coisas mais completas e não o fizeram" (idem). Por último, porque surgiram de uma forma intervalada e na sequência de, insistentemente, os inquirir: "Eu podia ter feito a síntese na mesma, percebes? Mas não sei... Não fiquei muito satisfeita até aqui (...) Eles podiam ter feito melhor... porque foi tudo muito entrecortado, muito puxado, muito, nha, nha, nha..." (idem, pp. 42-3). Todos estes factores concorreram para que, nesta ocasião, o relato se lhe afigurasse como sendo particularmente relevante: "Senti mais essa necessidade do que as vezes sinto" (idem, p. 41). Decide apresentá-lo de uma forma que, do seu ponto de vista, poderia contribuir para ajudar os alunos a decidirem se a conjectura deve, ou não, ser refutada:

> Aqui [referência a §12] já estou a dar mais pistazinhas. Isto foi uma opção. Como eles não desenvolviam e eu já tinha dado bastante tempo... (...) É um relato, mas já está mais pormenorizado. Podiam ter sido eles a dizer, percebes? Sou eu que estou a verbalizar tudo. (TST 42, p. 41)

Tal como fez noutras alturas, também nesta ocasião Anita tenta responsabilizar os alunos pela avaliação do que ouviram (§14, §15). A partir das interacções que com eles estabelece, procura, ainda, aperfeiçoar a forma de escrita do enunciado da conjectura "c. pot." e, neste processo, é articulada informação pressuposta, ou seja, torna visível que as dízimas finitas nele referidas "resultam de uma fracção". Este movimento contribui para uma maior precisão e clarificação do significado da conjectura.

Não é tomada nenhuma decisão sobre se 3/15 permite, ou não, refutar "c. pot." e a discussão envereda por um rumo que, ao incidir na transformação de certas fracções noutras equivalentes de modo a evitar a existência, no seu denominador, de potências de bases diferentes de 2 ou de 5, contribuiu para a reformulação do enunciado da conjectura e para o alargamento do seu domínio de validade a fracções de numerador diferente de um. O episódio *A Tita tem uma ideia* revela os primeiros passos que, neste âmbito, foram dados.

A Tita tem uma ideia

1. Anita: Tem que se acrescentar uma coisa? Qual coisa? A Tita tem uma ideia. Diz lá Tita.
2. Tita: Se nós… Como é que eu digo? Se nós… arredondarmos a fracção…
3. Anita: Arredondarmos? O que é que queres dizer com arredondarmos?
4. Tita: Diminuirmos o valor que está ali, como nós costumamos fazer. Se nós dividirmos o 3 e o 15 por 3 dá 1/5.

A professora regista a simplificação no quadro.

5. Anita: E agora?
6. Aluna: Também é finita e está ali a dividir por 15!…
7. Tita: Assim, ainda falsifica?
8. Aluna: Não.
9. Tita: Então…
10. Anita: Então?
11. Aluna: Então a conjectura é verdadeira.
12. Outra aluna: Dá para falsificar.
13. Tita: Não quer dizer que a conjectura seja verdadeira, só que não é um contra-exemplo.
14. Anita: Não olhem só para mim. Vejam lá bem *(aguarda; silêncio)* Então, mas é verdadeira ou não é verdadeira, resiste à tentativa de falsificação ou não…
15. Tita: Resiste à tentativa de falsificação.
16. Anita: Eu não posso cair na tentação de chegar à mesma conclusão a que eles chegaram com o 3/15, pensando só naquilo como está ali? Ou não? Vá, peguem lá os motores…

(TA 20/01/03, pp. 5-6)

A primeira intervenção (§1) surge na sequência imediata de uma contribuição de Roberto indiciadora de que sente necessidade de alterar o enunciado da conjectura “c. pot.” visando evitar a sua refutação pelo caso 3/15. Através dela, Anita procura recuperar e trazer para a discussão colectiva a sugestão de Tita relativa ao aperfeiçoamento da conjectura que, anteriormente, tinha “silenciado” devido à extemporaneidade. Face à terminologia usada pela aluna (§2), preocupa-se, antes de mais, em evitar ambiguidades (§3).

A análise das intervenções correspondentes aos parágrafos 5 a 16, revela a existência de duas posições na turma, embora não seja claro o que as fundamenta. Por exemplo, não é compreensível se quem refere que "dá para falsificar" (§12) pensa em 3/15 ou 1/5 como contra-exemplos. Além disso, não é inteligível se Tita, ao afirmar que "resiste à tentativa de falsificação" (§15), tem por referência o enunciado da conjectura "c. pot.", tal como está escrito, ou se está já a pressupor que este enunciado é completado pela introdução da sua ideia relativa à simplificação das fracções.

Anita, ao reflectir sobre o episódio, não se pronuncia sobre a intenção que esteve subjacente às intervenções referentes a §14 e §16 que endereçou à turma. Poder-se-á supor que, através delas, procurou incentivar os alunos a reflectirem sobre o que ouviram (§14) e os problemas que podem advir de pensarem na conjectura apenas "como está ali" (§16), para melhor clarificarem a sua própria posição face à refutação, ou não, por 3/15 e para melhor se aperceberem da necessidade de alterar a formulação para este caso não ser um contra-exemplo. Esta ideia é apoiada pela análise dos seus movimentos durante a prossecução da discussão. Com efeito, as intervenções de Anita organizam-se em torno de dois eixos:

- Levar os alunos, face às ideias apresentadas, a expressarem, publicamente, quer a sua posição sobre a validade da conjectura "c. pot.", quer as razões em que se apoiam para fundamentarem as opiniões que exprimem:

> Quero que eles se posicionem com convicção. Que se alinhem com as posições e que também mostrem convicção. Que se situem e que defendam a sua posição. Mas com convicção. Foi uma opção. Escrevi aqui assim: Opção: que os alunos se situem perante os argumentos e que o façam com convicção para depois defenderem a sua opção. (...) Daí a pergunta ser assim: *Quem é que acha que resiste e quem é que acha que não resiste*. (TST 42, pp. 44-5)

- Incentivar a reflexão sobre as consequências do enunciado da conjectura "c. pot." se manter tal como está escrito:

> Tal como está resiste ou não resiste? Será que me chega dizer isto? (...) Imaginem que eu tenho isto assim escrito, tal e qual como está aqui. E depois eu digo-vos assim, ou como eles disseram: Então mas 3/15... Isto dá, não dá, o que é que se passa? (TA 20/01/03, p. 7)

Através do episódio *Apareceram-me aqui dois exemplos que estavam a tentar falsificar aquela conjectura* e sua análise, procuro ilustrar aspectos relevantes relativos ao encerramento do longo processo de discussão da conjectura "c. pot.".

Apareceram-me aqui dois exemplos que estavam a tentar falsificar aquela conjectura

1. Anita: Pronto, então vamos lá apagar aqui isto *(referência a 8/15*). A questão é: apareceram-me aqui dois exemplos que estavam a tentar falsificar aquela conjectura. 3/15 e 7/35. Porque é que servem ou podem servir como exemplos? Porque antes de mais são o quê?
2. Alunos: Dízimas finitas.
3. Anita: São dízimas finitas. E agora tínhamos que ir continuar a ler o que ele estava a dizer. Ele dizia que resultavam de fracções em que a partir da sua decomposição dos denominadores em factores primos obtemos uma coisa daquelas. E a questão era. Decompôs-se este denominador *(aponta para 15)* e isto *(aponta para 3/3*x*5)* como está aqui é daquela forma?

Ouvem-se vários "não".

4. Anita: Mas o que é que a Tita sugeriu?
5. Tita: Reduzir a fracção.
6. Anita: Reduzir a fracção. E agora?
7. Aluna: É o que está ali.
8. Anita: E agora? Isto que está aqui *(aponta para o denominador de 1/5)* não é daquele tipo?
9. Vários alunos: É.
10. Anita: Porquê?
11. Aluna: Porque é 5 elevado a 1 vezes 2 elevado a zero.

A professora regista no quadro $1/5^1\text{x}2^0$ *e depois dos alunos terem indicado que 7/35 era a mesma coisa, simplifica esta fracção e representa-a como* $1/5^1\text{x}2^0$.

12. Anita: Resistiu ou não resistiu?

Ouvem-se alguns "sim".

13. Anita: Então o que é que se passava com aquelas fracções? O que tivemos que lhes fazer?
14. Aluna: Reduzir.
15. Anita: Então, aparentemente, está a resistir, não é?
16. Cristina: Então mas está a resistir porque aquilo dá 1. É como se fosse a outra que a gente fez, 1/n.
17. Outra aluna: Que já está provada.
18. Anita: Está provada? Já provámos a outra?

Ouvem-se alguns "nãos"

19. Anita: Podem experimentar mais uns quantos casos. Vejam lá se conseguem contrariar vá, ou não.

(...)

25. Anita: Então agora fixem-se só no que está ali escrito. Imaginem que passou muito tempo, e vocês vêem uma fracção daquele tipo 21/35 e já só se lembram do que está ali escrito.
26. Tita: Não íamos simplificar a fracção e a conjectura era falsa.
27. Anita: Se não fizessem com a máquina nem nada poderiam ser induzidos a pensar o quê?
28. Alunos vários: Que era infinita.
29. Anita: Portanto, pode ser perigoso passado um tempo. Como estava a dizer a Tita podia não ir simplificar nem nada e…*(gesto que indica que a conjectura "caía")* então como é que eu posso contornar isso aqui *(aponta para a conjectura)* de maneira a nunca me esquecer? O que é que aquelas fracções, no fundo, têm, as tais que nos permitiram resolver o problema? O que é que elas já são, digamos assim?
30. Tita: Podemos escrever assim: As dízimas finitas são aquelas que resultam de uma fracção simplificada.
31. Anita: Simplificada ou na forma irredutível que é a mesma coisa.

A professora acrescenta "irredutível" ao enunciado da segunda conjectura escrita no quadro a seguir à palavra "fracção" (...).

(TA 20/01/03, pp. 9-12)

Este episódio permite ilustrar que Anita refere quatro casos — 3/15, 7/35, 8/15 e 21/35 — que foram os prioritariamente discutidos na turma no âmbito da actividade de avaliação da conjectura "c. pot." e sua reformulação. Os três primeiros foram sugeridos pelos alunos. O quarto foi apresentado pela professora. O exemplo 8/15 foi eliminado depois de um processo de análise que conduziu Cristina a justificar que ele não pode constituir um contra-exemplo:

> As dízimas finitas são… está ali a dizer como é que se descobrem, pronto, como é que são, e aquilo [8/15] como é uma dízima infinita não pertence àquilo, àquelas características. Estás a perceber? Uma das características que tem que ter é a dízima ser finita. (Cristina, dirigindo-se a Maria, a proponente de 8/15, TA 20/01/03, p. 9).

Através da primeira intervenção (§1), Anita procura focar a atenção da turma nos "dois exemplos [3/15 e 7/35] que estavam a tentar falsificar aquela conjectura" (§1) e, antes mais, salientar que "estão nas hipóteses da conjectura [comentário a parte final de §1, e parte inicial de §3]" (TST 42, p. 48). Nesta altura, o quarto caso

(21/35) não tinha sido introduzido no espaço de discurso da aula. Só vem a ser apresentado durante o trabalho de pares que se seguiu à indicação correspondente a §19. No decurso deste trabalho, Anita, tal como fez noutras aulas, aproximou-se de mim e trocámos algumas impressões sobre a actividade dos alunos. Neste âmbito, coloco a hipótese — apoiando-me em contribuições que emergiram na turma de que a intervenção de Cristina é um exemplo ilustrativo (§16) — de alguns alunos poderem pensar que as fracções, na forma irredutível, não refutam a conjectura porque o seu numerador vem a transformar-se sempre 1. É face à plausibilidade que reconhece a esta hipótese, que indica à turma: "pensem em 21/35" (TA 20/01/03, p. 10). Este caso, que regista no quadro, a sua análise e uma observação de Anita a propósito da fracção resultante da sua simplificação — "Mas aquela fracção ali não tem 1 sobre qualquer coisa" (idem) —, possibilitaram e emergência de contribuições que permitiram pôr em causa a referida ideia e clarificar que, face ao enunciado da conjectura, o que não pode ser violado é o tipo de potências que surge no denominador: "Ali naquela conjectura não diz que a fracção tem que ser 1/n. (...) Pode ser no numerador qualquer número. Ela diz é que os denominadores, se os decompusermos em factores primos, obtemos $2^n x 5^m$ (Renata, idem).

A preocupação dominante de Anita ao longo do episódio *Apareceram-me aqui dois exemplos que estavam a tentar falsificar aquela conjectura,* é o aperfeiçoamento da conjectura "c. pot." de modo a evitar a sua refutação por fracções com numeradores diferentes de 1: "Aqui já estou a chamar a atenção para outra coisa, estou a partir para a necessidade de reformulação [comentário a §4]" (TST 42, p. 50). Para o efeito, salienta que o denominador de 3/3x5 não é da forma $2^n x 5^m$, (§3), evoca a sugestão de Tita (§4) para destacar que a simplificação de fracções que originam dízimas finitas conduz à obtenção de denominadores deste tipo (por exemplo, §8 e §10) e foca a atenção da turma na simplificação procurando destacar a sua importância (§13, §25, §27, §29, §31). A referida sugestão é incorporada no enunciado de "c. pot." obtendo-se a conjectura "c. pot. f. i.".

No momento em que surge o episódio, não tinha sido tomada nenhuma decisão colectiva sobre se 3/15 refuta, ou não, a conjectura "c. pot." e as ideias apresentadas por alguns alunos pareciam indiciar que as suas opiniões se dividiam. Há intervenções de Anita que têm implícita a ideia de que este caso a refuta. Por exemplo, apoiando-se na contribuição de Tita (§26), destaca que a ausência da simplificação da fracção faz "cair" a conjectura (§29). Noutras, no entanto, não articula informação que pressupõe. Em particular, reflectindo sobre a questão que dirige à turma na sequência de ter sido indicado que a fracção deve ser reduzida (§14), diz: "Eu pressupus isso [que já estava irredutível sem ele lá estar] quando disse *aparentemente está a resistir* [§15]" (TST 42, p. 49). Esta não articulação torna ambígua a questão da refutação, na medida em que pode contribuir para alguns elementos da turma entenderem que a conjectura "c. pot.", tal como foi formulada, ou seja, sem a sua reformulação pela introdução da palavra "irredutível" no enunciado, não é falsificada.

Todos estes aspectos, simultaneamente com o facto de não ter sido explícita e directamente abordado se 3/15 é, ou não, um contra-exemplo independentemente do aperfeiçoamento da conjectura, não deixam transparecer de uma forma clara qual a posição a adoptar sobre a questão da refutação nem o que permite fundamentá-la. Anita, ao reflectir sobre a aula, dá-se conta destas ambiguidades, o que a leva a dizer, com alguma inquietude: "Se calhar, neste caso, deixei implícita uma coisa que devia ter explicitado" (TST 42, p. 49).

Problemas experienciados

Mas se eu os deixasse aperfeiçoar as conjecturas não estaria a alimentar aquela perfeição exagerada, desvalorizando o resto?

Como organizar a apresentação e discussão das conjecturas formuladas pelos alunos, em particular, quando são diferenciadas relativamente ao conteúdo? Embora não precisamente nesta forma, foi esta questão, colocada por Rebeca no decurso de uma das sessões de trabalho focadas na reflexão sobre as aulas em análise, que constituiu o mote para uma troca de ideias sobre "um dilema e difícil!" (TST 41, p.

13) com que Anita se confrontou: "Por um lado eu estava a querer discutir o que tenho e eles, por outro lado, estão a querer aperfeiçoar todas" (idem).

Evocando a anterior experiência de trabalho, a colega de Anita refere que "umas vezes nós registamos as conjecturas todas e discute-se a seguir. Outras vezes discute-se logo cada uma e vai-se fazendo" (Renata, TST 41, p. 12). Manifesta o desejo do grupo de pesquisa se debruçar sobre a referida questão, porque a opção tomada por Anita para organizar a actividade referente à apresentação e discussão de conjecturas a fez confrontar-se com dúvidas que considera importante partilhar e debater:

> É como se os estivesses a conduzir demasiado, senti isso. É como se os alunos estivessem a querer dizer mais alguma coisa acerca das conjecturas e nós cortássemos porque temos que escrever todas. Aqui senti isso. Em termos de resultado final não sei se esta opção é melhor ou pior, mas foi uma coisa que eu senti e que é importante nós pensarmos. Se será de escrever primeiro todas as conjecturas ou se será preferível registar uma, discutir-se, registar outra, discutir-se, etc. ou se a partir de uma se vai fazendo a construção... Não estou a dizer se o sistema adoptado por ti foi melhor ou pior. Tenho dúvidas. (Rebeca, TST 41, p. 12)

Anita não é indiferente às dúvidas da colega e as suas palavras revelam que não é a primeira vez que se confronta com o questionamento que lhes está associado. Deixam também transparecer que a sua decisão quanto à organização da apresentação e análise discussão das conjecturas lhe provoca alguma inquietude e desconforto:

> Mas essa questão que estás a levantar, Rebeca, ocorreu-me quando estava com aquele discurso do trabalho dos matemáticos. E agora que estive a ver pela segunda vez as aulas ainda mais se reforçou. Quer dizer, digo-lhes aquilo tudo e depois não os deixo aperfeiçoar!!... (TST 41, p. 14)

> Mas se eu os deixasse aperfeiçoar as conjecturas não estaria a alimentar aquela perfeição exagerada, desvalorizando o resto? Percebem o que eu quero dizer? E já não quererem depois dizer as suas? (TST 41, p. 15)

Anita sabe que no processo de trabalho em matemática as conjecturas se tornam mais plausíveis, convincentes, detalhadas e exactas pela pressão exercida pelos contra-exemplos. A sua "conversa sobre o trabalho dos matemáticos" é, em particular, reveladora deste saber. Considera que esta actividade tem valor e um dos seus objectivos é que elementos da turma a experienciem. Sabe, também, que a discussão colectiva das várias conjecturas formuladas pelos alunos, entra em conflito, em várias ocasiões, com a natureza do trabalho dos matemáticos, na medida em que, por exemplo, as condições de excepção de algumas delas não foram alargadas, como alguns alunos desejavam, de modo a evitar a sua refutação. Neste sentido, a actividade que procurou que existisse foi, de certo modo, artificial. Anita tem consciência desta artificialidade. Simultaneamente, sabe que os alunos "já têm tendência para não valorizar as conjecturas que depois são refutadas" (TST 41, p. 20) e está preocupada em inverter esta situação. Além disso, apoiando-se no que conhece sobre a turma, considera importante agir de modo a não alimentar, quer implícita, quer explicitamente, o perfeccionismo excessivo de vários elementos e a sua relutância em apresentarem resultados a que chegam e ideias que têm, a menos que estejam certos da sua correcção. A acrescer a tudo isto, receia, que a existência do referido perfeccionismo, a par de uma abertura à possibilidade de aperfeiçoamento das conjecturas já partilhadas, possa, de algum modo, contribuir para boicotar a discussão destas conjecturas, outro dos objectivos que visa. É da simultaneidade de todos estes saberes, intenções, objectivos e preocupações que emerge o dilema com que Anita se confrontou:

> O meu objectivo era registar todas as conjecturas e discuti-las todas, porque sei que eles são também um bocado perfeccionistas, tive receio que depois não as largassem se eu os deixasse continuar com o excepto este caso, excepto o outro, etc. Eu estava dividida entre o trabalho dos matemáticos, por um lado, o artificialismo, por outro, e por outro ainda o combater a mania do perfeccionismo deles. Continuo a bater na minha. Eles gostam de chegar aos píncaros, percebem? Não os leve eu a pensar A*gora não digo mais nada enquanto eu não chegar ao máximo e nunca mais digo mais nada enquanto não estiver perfeito*. Estão a perceber? Também é perigoso no caso deles. Atenção! Eu estava ali com o objectivo de valorizar tudo como está enquanto conjectura e se os deixo aperfeiçoar sempre posso estar a passar, implicitamente, a ideia de que essas são as melhores, ou que não são melhores. E para a próxima eles retraem-se. Só dizem quando estiverem... sei lá... Percebem? No caso deles tenho estas duas preocupações. (TST 41, p. 17)

O que parece jogar-se, neste dilema, é o agir na sala de aula meramente como representante da comunidade matemática ou o ter em conta certos objectivos pedagógicos que constrangem esta actuação. Porque estes objectivos são muito importantes para Anita e porque os alunos, ao trabalharem em pares, nas sua palavras, "já foram aperfeiçoando as primeiras conjecturas que formularam até apresentarem a que tinham quando eu lhes interrompi o trabalho" (TST 41, p. 27) e, nesta medida, "já experimentaram o processo de trabalho dos matemáticos" (idem), o fiel da balança move-se, nesta ocasião, no sentido da não transmissão, mesmo que implícita, da mensagem "as conjecturas têm que ser perfeitas":

> Não quero transmitir a ideia que as conjecturas têm que ser perfeitas. E isto pesa muito na balança!... Porque se não para a próxima vez não me dizem nada enquanto não conseguirem ter a perfeição completa. Percebes? Tendência para isso já eles têm. É que a minha turma não é igual à tua, Rebeca. (TST 41, p. 17)

A troca de ideias que ocorreu a propósito do dilema vivido por Anita, permitiu problematizar possibilidades de acção para lidar com a organização da partilha e discussão das conjecturas formuladas pelos alunos procurando nelas enquadrar as preocupações expressas pela professora.

A estratégia seguida para a partilha pode ser adequada em certas ocasiões: "porque as conjecturas até podem ser diferentes e fazer sentido até registar e avançar. Depende da altura, dos objectivos que se têm, etc." (Rebeca, TST 41, p. 24). Simultaneamente, a forma como foi gerida a discussão tem a vantagem de ser "mais fácil conduzir a aula de uma maneira organizada" (idem, p. 17). No entanto, a colega de Anita salienta algumas desvantagens da discussão das conjecturas tal como foi feita nas aulas em análise. Uma é a artificialidade que Anita também refere: "Assim como foi feito o trabalho soou-me mesmo a artificial, desta vez. E incomodou-me" (Rebeca, idem). Outra é a dificuldade de encaminhar os alunos para um percurso que não desejam: "Mas é mais difícil o trabalho na aula, porque tens que estar a contrariar o que eles querem fazer. Tanto que tens que fazer montes de intervenções nesse sentido. Eles querem mudar" (idem). Ao reflectir, individualmente, sobre as aulas da colega refere ter sentido "que quando eles estavam a querer aperfeiçoar as conjecturas e entusiasmados, esse entusiasmo estava a ser cortado" (idem, p. 20). Uma vez que Anita pretendia que fossem apresentadas todas as conjecturas formuladas — o que elimina a hipótese de, por exemplo, ser enunciada uma conjectura e "depois os outros alunos pegarem nela e pensarem e trabalhá-la, em vez de registarmos todas" (idem, p. 12) — apresenta e defende a possibilidade de "ir ao sabor da maré":

> Outra das hipóteses seria a partir da conjectura que ali temos... se não surgir nada nós registamos, mas se surgir e se as pessoas quiserem discutir e pegar, pegar e, se for preciso, reformular... ir ao sabor da maré. Não pensar só em falsificar, mas pensar logo em reformular também. (Rebeca, TST 41, p. 12)

Perante esta hipótese, Anita interroga-se, contudo, se ao permitir a alteração de uma conjectura já registada no quadro tendo em vista o seu aperfeiçoamento em termos matemáticos, os alunos terão consciência de que estão, efectivamente, a melhorá-la ou "não ficarão antes a pensar 'olha, aquela é boa e portanto para a próxima eu não digo mais nada enquanto não conseguir melhor...'" (TST 41, p. 18). Apresento a possibilidade de abordar explicitamente este aspecto, ideia que Rebeca retoma e expande através da indicação de estratégias que poderão ser usadas para o destacar e, além disso, para salientar a importância das conjecturas inicialmente formuladas, ou seja, para reforçar o valor das conjecturas apresentadas pelos alunos:

> Só que se calhar é de usar a tal estratégia, por exemplo, das cores, usar outra cor para acrescentar as coisas, para mostrar o que foi melhorado... E se calhar até fazer um discurso no final sobre esse processo de melhorar conjecturas. Podes chamar a atenção para que a conjectura inicial era crucial para chegar à formulação final. Porque se não como é que acrescentavam coisas de outra cor se não tivessem aquele ponto de partida? (Rebeca, TST 41, p. 27)

Anita, equacionando a sua acção futura, não descarta esta possibilidade: "Eu não me importo de experimentar..." (TST 41, p. 18); "Eu acho que eles são um bocado assim, mas eu experimento. Pode ser que esteja redondamente enganada" (idem, p. 24). No entanto, as estratégias referidas não a satisfazem completamente: "Parece-me um bocado artificial, não sei..." (idem, p. 27). Mais tarde, quando elabora a reflexão sobre as aulas em análise nas "questões em aberto", escreve:

> Deveria ou não ter optado por deixar os alunos aperfeiçoar as conjecturas logo na primeira vez que tentaram? Mais tarde deixei alguns alunos melhorarem, e na última [aula] isso aconteceu em função dos contra-exemplos apresentados pelos alunos relativamente a uma das conjecturas... Os alunos no seu processo de exploração [da tarefa] também já tinham melhorado as suas conjecturas iniciais na tentativa de chegarem a uma mais geral... (...) Se calhar podíamos era ter discutido aquelas e depois aperfeiçoar e no fundo continuar um pouco o trabalho que tinham realizado no lugar em grupo e relacionar com o papel do

> matemático. Preocupei-me com uma teórica valorização entendida como implícita (apesar de não o ser) do que é "mais certo". Teriam reflectido mais nas excepções, apesar de uma aluna o referir e eu o aproveitar para a turma. Ganhos/percas... (DEA, 25/02/03, p. 2)

Esta reflexão permite evidenciar a inquietude de Anita pela busca de novas possibilidades de acção futura que lhe permitam lidar com o dilema com que se confrontou, de modo a imaginar, face a cada situação concreta e perante os vários objectivos que orientam o meu modo de agir, qual a melhor forma de os compatibilizar sem negligenciar ou remeter para um plano secundário aqueles que, no momento, privilegia.

O 1/23 passou um bocado à margem, se calhar...

No âmbito da investigação da conjectura "c. pot.", Anita foi surpreendida pelo caso 1/23 apresentado por duas alunas como originando uma dízima finita, apoiando-se na observação do quociente que lhes surgia na máquina de calcular:

> Eu na aula, não sabia muito bem, improvisei, mas não faz lá muito sentido o que eu disse. Foi o que eu escrevi aqui. (...) Despachei o 1/23... (risos) Então olha... Eu não sabia... E também não estava a ver eles a descobrirem ali. (TST 42, p. 27)

Anita não tinha dúvidas que 1/23 é uma dízima infinita. Também não tinha dúvidas que qualquer um dos enunciados das conjecturas "c. pot." ou "c. pot. f. i." podia ser usado para, facilmente, justificar porque o era. O problema é que nenhuma destas conjecturas estava provada pelo que, tal como tinha procurado ensinar aos alunos ao longo de todo o projecto, não poderia servir-se deles para concluir a veracidade ou falsidade de uma afirmação:

> Justificar porque é que a máquina faz aquilo podia não saber justificar, mas provando a conjectura já podia provar que 1/23 era infinita. Mas isso eu não tinha dúvidas... O meu problema era a calculadora... (risos). (...) outro problema é que não tínhamos provado... (TST 42, p. 33)

Na fase de preparação das aulas, Anita discutiu comigo possíveis estratégias a usar para lidar com casos de fracções que conduzem a dízimas cujo visionamento dos dígitos que aparecem no ecrã da calculadora não permite decidir se são finitas ou infinitas. A sugestão que tinha pensado apresentar aos alunos, se se confrontassem com casos destes, era a de os incluírem num conjunto intitulado "estas fracções não sabemos se dão dízimas finitas ou infinitas" e não as usarem na formulação das conjecturas. Uma vez provada a conjectura "c. pot. f. i.", retomaria um destes exemplos, faria a decomposição do seu denominador em factores primos e a propriedade seria usada para tomar a decisão, ou seja, surgiria como um instrumento útil para ultrapassar as limitações da calculadora (TST 41, pp. 7, 8).

No entanto, face à justificação que surgiu na aula, Anita não poderia usar a referida sugestão a menos que apelasse à sua autoridade enquanto professora. Com efeito, apoiando-se nas experiências anteriores, as alunas tinham constatado que quando as dízimas são infinitas, todos os espaços existentes no ecrã da calculadora ficam ocupados. Como ao dividirem 1 por 23 o último destes espaços ficava livre, este aspecto era, do seu ponto de vista, indicador de que a dízima era finita: "Cristina: Sim, porque falta um dígito" (TA 20/01/03, p. 2).

Surpreendida pela justificação, Anita tem dois movimentos quase simultâneos. Através da questão que coloca às alunas, recorda que, se a dízima for finita, o resto da divisão do numerador pelo denominador da fracção tem que ser zero e sugere-lhes que façam a divisão. Além disso, apresenta o caso à turma como um dos exemplos que está ser a referido como refutando as conjecturas registadas no quadro e solicita que reflictam sobre ele. Subjacente a este último movimento, esteve a expectativa de que o confronto entre quocientes oriundos de várias máquinas de calcular pudesse trazer alguma luz à situação: "A ver se eles comparavam as máquinas deles, podia ser que desse para ver..." (TST 42, p. 36). Queria, também, dar-se algum tempo a si própria para reflectir sobre a melhor maneira de agir: "Ainda estava com essa ideia, enquanto estava a pensar como é que havia de fazer. Depois também não tive assim uma ideia muito brilhante, porque depois a Cristina ofereceu-se para dividir... E eu aproveitei. Dava jeito" (idem).

As contribuições de vários elementos da turma revelam que também eles consideram 1/23 como uma dízima finita "porque falta um dígito" e enquanto

Cristina efectua a divisão, o resto da turma analisa se 3/15 refuta, ou não, a conjectura “c. pot.”. Quando esta aluna comenta que ela “nunca mais acaba” (TA 20/01/03, p. 3), Anita aproveita a abertura para salientar que “parece que não é bem, bem o que a máquina nos está a mostrar que vale” (idem)”, como justificação indica que “é ela que arredonda”(idem) e prossegue a discussão do caso 3/15.

O facto de nem todos os espaços do visor das calculadoras utilizadas pelos alunos ficarem preenchidos quando dividem 1 por 23, deriva das diferenças dos algoritmos usados pelas máquinas para converter o número representado internamente no processador naquele que é mostrado no ecrã. No caso de 1/23, o décimo algarismo do quociente é zero, a dízima é truncada por aí e porque este dígito é zero não é representado. Só que esta explicação, que só vem a emergir nas sessões de reflexão, não ocorre a Anita durante a aula. O comentário que apresenta sobre a intervenção com que encerrou a análise do caso, permite, não só apoiar esta ideia, como deixa transparecer a insatisfação que este encerramento lhe causou:

> Não tinha nada a ver com arredondamento... Há um zero, mas pronto... Não sabia o que é que havia de dizer... (risos) Foi do que me lembrei... (risos) É que nem me lembrei do truncar... Não estava à espera, nem me lembrei do truncar que seria o mais normal, mas pronto. Arredondar, francamente! (TST 42, p. 38)

Em máquinas de calcular mais sofisticadas do que aquelas com que habitualmente as turmas de 9º ano trabalham, não ocorre a situação com que os alunos se depararam, embora possam não permitir de imediato tomar decisões sobre a finitude, ou não, da dízima devido à invisibilidade do seu período. Anita tinha consigo uma destas máquinas. Se lhe tivesse ocorrido essa possibilidade explicativa, poderia ter aproveitado o comentário de uma das autoras do caso 1/23 — “Só se arredondou... falta um... (Renata, TA 20/01/03, p. 2) — para a utilizar e, assim, reforçar e/ou fazer emergir dúvidas sobre o tipo de dízima que 1/23 origina. Estas dúvidas permitiriam legitimar e tornar adequada a apresentação da sugestão pensada na fase de preparação da aula. O inesperado da situação e a inexistência de memórias a que pudesse recorrer para lhe fazer face — “Sabia lá!!... Nunca me tinha acontecido!” (TST 42, p. 37) — contribuíram para a referida possibilidade não lhe ocorrer e, deste modo, para poder, se assim o decidisse no momento, tirar partido do comentário para delinear a actividade da aula: "Podia ter aproveitado, podia... [o comentário de Renata] Mas olha! Não estava para essa banda... (risos)" (idem, p. 36).

Reflectindo sobre a sua actuação ao longo de todo o processo de análise de 1/23, Anita considera que "o 1/23 passou um bocado à margem, se calhar... (risos)" (TST 42, p. 32) e não descarta a hipótese, apresentada pela colega, da rapidez com que foi encerrada a sua análise e da pouca atenção que lhe foi dada, se dever à sua não compreensão do porquê da dízima que surgia no visor: "Só se foi o subconsciente... (risos) (...) o meu problema era a calculadora, também, mas não sei se foi isso que me levou a essa pressa... Talvez tenha sido... (risos) Sei lá..." (TST 42, p. 33).

Procurando descortinar onde se fundará a opção de prosseguir, com a turma, a discussão de 3/15 enquanto Cristina efectua a divisão, refere que "se calhar foi mesmo para me dar tempo para eu pensar..." (idem, p. 37) e constata, inquietando-se, que esta via restringiu as possibilidades da aluna poder escutar atentamente o que era dito e contribuir para a troca de ideias que ocorria: "Devia era dar tempo. Olha que melga!!... Pois foi, pus-me a discutir!... Fui mesmo melga" (TST 42, p. 37). Do seu ponto de vista, é "contraditório separar a discussão dos alunos uma para... e outros para..." (DEA, 25/02/03, p. 3).

Quando elabora a reflexão escrita sobre as aulas em análise, Anita inclui nos "aspectos menos conseguidos" (DEA, 25/02/03, p. 3) a análise conjunta, pela turma, dos casos 1/23 e 3/15 referindo que "deveriam ter sido mais 'separados' em termos de discussão" (idem) e usa a experiência vivida para equacionar a sua acção futura: "Mais atenta a esse aspecto, embora este caso [1/23] tivesse a ver com a calculadora" (idem).

Lidando com o ensino do discurso de prova

Ao longo das três aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*, os alunos envolveram-se na produção de provas de três tipos: (1) prova da falsidade de conjecturas pela apresentação de contra-exemplos, (2) prova por exaustão da veracidade de uma conjectura (conjectura de Maria) e (3) prova algébrica de outra conjectura visando estabelecer a sua validade para a generalidade de fracções do tipo k/n satisfazendo as condições indicadas no enunciado da tarefa (conjectura "c. pot. f. i.").

Esta secção incide, fundamentalmente, na análise da actividade desenvolvida na turma visando a produção do terceiro tipo de prova, aquela que, se excluirmos a referente às provas do primeiro tipo analisada em *Promovendo a formulação e avaliação de conjecturas,* ocupou um tempo mais longo.

A prova do tipo 2 surge no âmbito da avaliação da conjectura de Maria depois dos alunos terem constatado a impossibilidade de encontrarem um contra-exemplo e de vários terem referido "é verdadeira" (TA 16/01/03, p. 6). Anita interpela-os sobre se já foi provada, questão a que respondem negativamente. Cristina apresenta a sugestão de "fazer todos para ver" (idem) e o rumo da aula é delineado de modo a integrar esta contribuição: "Então vá. Já agora, pensando assim…" (idem). A partir das interacções que estabelece com os alunos e das indicações que estes lhe dão, Anita regista no quadro todas as fracções do tipo 1/n cujo denominador é um múltiplo de 10 inferior ou igual a 100; elimina deste conjunto as fracções excluídas pelo enunciado da conjectura e os alunos observam que todas as restantes fazem parte daquelas que sabem, através de cálculos já efectuados, originarem dízimas finitas.

Desafiando a turma a produzir a prova de uma conjectura que "resistiu"

O episódio *E agora vamos tentar o quê? Já que ela está a ser tão resistente?* revela o início do processo de prova da conjectura "c. pot. f. i.". Ilustra, em particular, como emerge a ideia de prova na turma e o papel que lhe foi atribuído.

E agora vamos tentar o quê? Já que ela está a ser tão resistente?

1. Anita: Como nós escrevemos irredutível ou simplificada já sabemos que temos que pensar na fracção na sua forma irredutível. Pronto. E agora vamos tentar o quê? Já que ela está a ser tão resistente?
2. Cristina: Deitá-la abaixo… *(risos na turma)*
3. Anita (risos): Coitadinha… Agora que ela já está a resistir a tudo, contra ferro e fogo… Vamos pensar na sua quê?

(os alunos não respondem)

4. Anita: Se ela agora assim como está já resiste, resiste, resiste… Vamos tentar quê?
5. Alunos vários: Provar que é verdadeira.
6. Anita: Provar que é verdadeira: E agora como é que a gente vai tentar provar aquilo?

A professora relê a conjectura, clarifica que se vai tentar prová-la para qualquer numerador e interage com os alunos no sentido de explicitar que se pretende provar que $k/2^n$x5^m representa uma dízima finita. Esta fracção à escrita no quadro a partir de sugestões dos alunos.

7. Anita: Experimentem com um exemplo. Não prova, mas ajuda a pensar. Digam lá um exemplo.

(TA 20/01/03, p. 12)

São questões colocadas por Anita (§1, §3, §4) que conduzem os alunos a referir a ideia da prova (§5). Esta aparece como algo que pode permitir ter a certeza sobre a verdade da conjectura formulada, ou seja, sobretudo como um instrumento de validação e não tanto de compreensão do porquê da validade da relação conjecturada. Esta "não foi uma opção" (TST 42, p. 54) tomada à partida. Foi, antes, "uma reacção aos que os alunos disseram" (idem) nomeadamente à afirmação "já está provada" (idem) proferida por uma aluna relativamente à conjectura "c. pot." que não tinha sido objecto de prova:

> Porque quando eles andam naquela do está provado, não está provado, eu pumba... reajo. Vou para a prova e a prova é para a validação. É a minha reacção à conversa dos alunos. Não me lembro depois do resto porque estou a reagir a... Acho que foi por isso. (TST 42, p. 54)

Independentemente de ter centrado a actividade da aula na avaliação da validade das conjecturas com o objectivo de decidir quais é que resistem, ou não, a tentativas de falsificação, Anita considera que poderia associar a produção da prova de "c. pot. f. i." à investigação do porquê dos denominadores das fracções irredutíveis que originam dízimas finitas terem as particularidades descobertas. No entanto, esta possibilidade não lhe ocorreu no momento da acção, pois não teve consciência de que o seu modo de agir estava a ser determinado pelas intervenções dos alunos:

> Podia ter feito outra pergunta... Podia perguntar porque é que isto acontecerá e partir dali para a prova... Mas reagi ao que os alunos disseram... (...) mas reajo inconscientemente... É a provocação deles... (risos) Neste caso é ao contrário, não sou eu que os provoco a eles, são eles a mim... (risos) Não é conscientemente que reajo. (TST 42, p. 54)

Ao iniciar a prova da conjectura "c. pot. f. i.", Anita, através das interacções que estabelece com os elementos da turma, preocupa-se em distinguir o ponto de partida da prova da conclusão a que se pretende chegar. Este é, do seu ponto de vista, um aspecto merecedor de uma atenção especial pois não é invulgar os alunos tentarem provar afirmações recorrendo a essas mesmas afirmações. Na aula em análise, recorreu ao discurso oral para sublinhar esta distinção. Em muitas outras ocasiões acompanhou a oralidade com registos no quadro que reforçaram a visibilidade dos referidos aspectos e, deste modo, contribuíam para os diferenciar. Quando evoco este facto na tentativa de compreender se terá havido alguma razão para estes registos não terem sido feitos, Anita coloca a hipótese de se dever ao excesso de informação existente no quadro e ao pouco espaço que aí restava: "Eu acho que se calhar não escrevi porque não tinha espaço... (...) Quando vejo muito pouco espaço fico um bocado perturbada (...) Mas disse oralmente... Se eu não escrevi... Eu quando posso ponho os tópicos, percebes?" (TST 42, p. 56).

Porque a transformação de um caso particular de uma fracção do tipo das referidas no enunciado da conjectura numa fracção decimal envolve um grau de abstracção inferior ao requerido pela produção da prova para o caso geral, através da última intervenção (§7), procura que a turma se foque num exemplo e, simultaneamente, preocupa-se em salientar que esta via, embora sendo útil para ajudar a pensar, não substitui a prova.

Produzindo, com a turma, a prova de uma conjectura que "resistiu"

No que respeita à actividade desenvolvida na aula, o processo de prova da conjectura "c. pot. f. i." decorreu em duas fases ambas centradas na transformação de fracções do tipo $k/2^n x5^m$ numa fracção decimal. O que as distingue é o grau de generalidade das fracções com que a turma trabalha. Enquanto que na primeira fase (primeira subsecção), a actividade se desenvolve em torno de um exemplo, na seguinte (segunda subsecção) desenrola-se a partir de uma representação algébrica que contempla todas as referidas fracções.

Trabalhando com um exemplo

O episódio *O que é que nós sabemos sobre dízimas finitas?* ilustra os primeiros passos que foram dados no sentido da produção da prova da conjectura "c. pot. f. i.". O exemplo $3/2^5 x5^3$ nele referido foi apresentado por Anita na sequência de considerar e justificar para a turma porque era preferível partir deste caso em lugar de um outro (($32/2^5 x5^0$) sugerido por um aluno. Face aos objectivos que tinha e ao próprio enunciado da conjectura, este último "não era um bom exemplo e também a fracção não estava na forma irredutível" (TST 42, p. 57).

O que é que nós sabemos sobre dízimas finitas?

1. Anita: Não. Agora estamos a pensar em termos de prova. E agora o que é que eu quero fazer com aquilo? Quero ver que é uma dízima quê?
2. Alunos: Finita.
3. Anita: O que é que nós sabemos sobre dízimas finitas?

Os alunos não respondem.

4. Anita: O que é que nós sabemos sobre dízimas finitas? Quais é que são as dízimas finitas ou… Não sabemos nada?

Os alunos não respondem.

5. Anita: Dêem lá uma voltinha pelo caderno, vejam lá se sabem algumas coisas sobre dízimas finitas ou não.

Alguns alunos, depois de lerem o caderno, referem que as dízimas finitas admitem uma representação na forma de fracção decimal. A professora repete esta informação e escreve no quadro: "dízima finita: $k'/10^p$, $k', p \in \mathbb{N}_0$"

6. Anita: Eu não quero que vocês andem sempre dependentes das calculadoras, porque agora estamos a pensar em... Eu quero que isto *(aponta para $3/2^5 x5^3$)* seja uma dízima finita. As dízimas finitas admitem,

por definição, este tipo de representação *(aponta para $k'/10^p$)* de fracção decimal. Quem consegue levar isto ou não *(aponta para $3/2^5x5^3$)*… Será que eu consigo…. Se isto for uma dízima finita *(aponta para $3/2^5x5^3$)* o que é que ela tem… tem que ser, no fundo?

7. Aluna: Tem que ter aquelas partes.
8. Anita: Está bem, despegando agora dessas partes, qual é a definição de dízima finita?
9. Maria: Tem que dar uma fracção decimal.
10. Anita: E então, se tem que dar uma fracção decimal… Aquilo é uma fracção decimal *(aponta para $3/2^5x5^3$)*? O que está ali…

Alguns alunos respondem não. A Maria diz "só se se fizer ali qualquer coisa". Ouve-se, muito pontualmente, uma ou outra intervenção que não é perceptível. A maioria da turma permanece silenciosa.

11. Anita: Se eu quero que aquilo *(aponta para $3/2^5x5^3$)* seja uma dízima finita, se a dízima finita se pode escrever como fracção decimal *(aponta para $k'/10^p$)…*
12. Aluna *(em voz baixa)*: Aquilo não é uma fracção decimal.
13. Anita: Não é? Não sei… Júlia tu gostas muito destas coisas, de passagens de contas destas. Vamos lá ver… Pensa lá…

Os alunos não respondem.

14. Anita: A minha pergunta é: Mas afinal por definição, uma dízima finita pode representar-se na forma de fracção decimal. Isto é uma dízima finita *(aponta para $3/2^5x5^3$)*, então como é que é? É ou não é?
15. Aluna: Sôtora, o que está escrito aí em baixo?
16. Anita: É um número inteiro sobre uma potência de 10 *(aponta para $k'/10^p$)*.

Os alunos não respondem.

(TA 20/01/03, pp. 12-4)

A análise das intervenções de Anita deixa transparecer que a sua acção parece ter sido orientada, fundamentalmente, por duas intenções: (a) levar os alunos a evocarem a ideia de que as dízimas finitas se podem representar sob a forma de uma fracção decimal (§3, §4, §5) e (b) tentar que se apercebam, sem explicitamente lho dizer, que para justificar que a fracção $3/2^5x5^3$ é uma dízima finita sem recorrer ao cálculo do quociente entre os seus termos, há necessidade de transformar esta fracção numa outra cujo denominador é uma potência de 10 (§6, §8, §10, §11, §14): "Eu queria que eles partissem de uma fracção do tipo $k/2^nx5^m$ para a transformar numa do tipo $k'/10^p$ " (TST 42, p. 57).

Um dos traços mais marcantes deste episódio prende-se com o silêncio da grande maioria dos alunos face às questões colocadas. Quando emergem contribuições, são muito breves, não explicativas nem justificativas e pouco poderosas enquanto recursos em que Anita possa apoiar-se. Através de diversos meios, tenta inverter a situação. Relativamente à primeira intenção que referi, quando confrontada com a ausência de respostas opta por pedir aos alunos que consultem as suas anotações, pois a ideia que pretendia que recordassem tinha sido trabalhada na turma não há muito tempo: "Mandá-los ir ao caderninho foi uma opção. Como não diziam nada..." (comentário a §5, TST 42, p. 57). A segunda intenção começa a predominar depois de ter dado visibilidade ao facto das dízimas finitas serem representáveis por fracções decimais através da repetição da informação apresentada pelos alunos e do seu registo no quadro. Procurando incentivar a participação, recorre, intencionalmente, a frases que não completa (§6) e apela directamente a Júlia (§13) que ao longo da aula tinha permanecido silenciosa. No entanto, não consegue suscitar o envolvimento dos alunos que deseja, nem fazer surgir as contribuições que pretende:

> A intenção foi mesmo não completar as frases. Não foi por acaso. Era para ver se eles diziam. Estou a ver se eles pegam [comentário a §6]. (...) E continuo a insistir... Digo: *Se eu quero que $3/2^5$x5^3 seja uma dízima finita, se a dízima finita se pode escrever como fracção decimal...* [§11] Aqui há uma aluna que responde que *aquilo não é uma fracção decimal* [§12]. Ela estava a referir-se a $3/2^5$x5^3 mas também não diz mais nada... (...) Tento envolver a Júlia, estou a tentar picá-la, também mas não resultou... [comentário a §13] (TST 42, pp. 57-8)

Tal como aconteceu nesta ocasião, também, posteriormente, não foi fácil para os alunos imaginarem o percurso de transformação de $3/2^5$x5^3 — ou de uma representação algébrica deste tipo de fracções — numa fracção decimal, tal como não foi simples, para Anita, conseguir que participassem no processo de transformação. Em dois momentos, ambos localizados na primeira fase da produção da prova, eu própria fiz intervenções na aula através das quais procurei, através de um relato e das questões que coloquei, facilitar a progressão da actividade. O primeiro momento surge na sequência do episódio *O que é que nós sabemos sobre dízimas finitas?* e é consequência de uma interpelação que Anita me dirige:

> Queres ver que chegámos a uma contradição e aquilo não é verdade… O que é que tu achas Ana? Temos uma contradição… Já viste… Temos uma contradição… *(risos)* Então mas afinal isto dá uma dízima finita, uma dízima finita é isto e eles não… E agora? (TA 20/01/03, p. 14)

Através desta intervenção, Anita procurava "brincar com a situação" (TST 42, p. 58) para incentivar a participação dos alunos e impulsionar a expansão das suas anteriores contribuições: "Era uma provocação para os alunos... (...) para eles agarrarem" (...) Era para ver se eles avançavam" (idem, pp. 58-9). Não me apercebo, na altura, desta sua intenção. O meu olhar não estava focado na professora, o que impediu de me dar conta da direccionalidade da sua intervenção e da reveladora expressão facial que a acompanhava. Assim, quando escutei "Ana", pressupus que interpelasse uma aluna da turma cujo nome real também é este. Ao constatar, instantes depois, que a mensagem me é dirigida, interpreto-a como visando a minha colaboração para ultrapassar a situação de impasse que se vivia na turma. Apresento um relato em que evoco a conjectura formulada e procuro destacar o facto das dízimas finitas se poderem representar por fracções cujo denominador é uma potência de 10. Termino-o com algumas questões, numa das quais incluo, deliberadamente, a palavra "transformar", tentando, através delas, fazer incidir a atenção dos alunos no denominador da fracção. Anita procura tornar mais transparente o conteúdo do meu discurso oral, apontando para registos existentes no quadro: "Era para ir ilustrando o que estavas a dizer, para tornar mais claro" (TST 42, p. 59).

Começam a surgir contribuições reveladoras de que alguns alunos começam a procurar processos de transformar o denominador de $3/2^5x5^3$ numa potência de base 10. Por exemplo, Roberto pergunta se "não pode ficar $4x10^3$" (TA 20/01/03, p. 14). Renata apresenta uma ideia que permite tornar mais claro o raciocínio do colega: "2 elevado a 3 vezes 2 elevado a 2 vezes 5 ao cubo" (idem). Cristina contribui referindo a possibilidade de "igualar os expoentes" (idem, p. 15) e sugerindo uma via de o fazer. Anita lida com estas contribuições de forma diferenciada. Explora, com a turma, a ideia de Renata, o que permite concluir que ela não permite atingir o objectivo pretendido, pois no denominador ainda fica "um outro número" (Anita, idem). Destaca, através de um relato, a possibilidade referida por Cristina mas não a sugestão que apresentou: “Eu digo *Ela já deu uma sugestão, mas das duas uma. Vocês ou ouviram ou então pensam* porque acho que os alunos têm obrigação de pensar, percebes?” (TST 42, p. 60).

Subsequentemente foram revisitadas as regras de potenciação, fruto de incorrecções numa sugestão apresentada. No entanto, apesar de Anita aguardar e solicitar novas contribuições que permitam fazer evoluir o trabalho, estas não emergem: “Sugestões... *(pausa)* Quero sugestões... *(pausa)* Como é que eu hei-de arranjar ali um expoente igual? O que é que me falta, por exemplo? Sei lá...” (TA 20/01/03, p. 15). É face a esta situação, na sequência desta intervenção e com o objectivo de tornar um pouco mais precisa a última pergunta, que solicito à professora permissão para colocar uma questão, o que obtém a sua adesão imediata. Interpelo os alunos sobre o que lhes “dava jeito” terem no denominador da fracção $3/2^5 x 5^3$, “em vez de 5^3”, procuro destacar o propósito da actividade e Anita, incorporando na sua voz as minhas palavras, interpela também a turma: “Por exemplo, o que é que vos dava jeito?” (TA 20/1/03, p. 15). Vários alunos respondem 5^5 e a professora prossegue tentando que descubram um processo que permita fazer surgir esta potência. Roberto apresenta a sugestão de se multiplicar por 5^2.

Durante a reflexão colectiva focada na produção da prova da conjectura “c. pot. f. i.”, recordo, sem o explicitar, uma ideia recorrentemente expressa por Anita a propósito de aulas suas em que foram exploradas outras tarefas: só apresentar sugestões facilitadoras do progresso da actividade depois de tentar muito tempo que os alunos caminhem sozinhos. Em tom de brincadeira e a propósito da questão que coloquei à turma, digo: “A Anita resiste em dar ajudas mas eu não resisti... (risos) A aula já estava quase a acabar...” (Ana, TST 42, p. 60). O seu comentário deixa transparecer que, também nestes momentos da aula, era a referida ideia que orientava o seu modo de agir: “Eu sei, pois estava, mas então... (risos) (...) Eu queria que fossem eles a dizer... (risos)” (Anita, idem). Esta mesma ideia, juntamente com a intenção de explorar e analisar com a turma sugestões apresentadas por alunos particulares para a transformação do denominador das fracções com que trabalhavam numa potência de base 10, independentemente das suas potencialidades para atingir este objectivo, parecem ter sido as principais linhas de força que orientaram a organização e gestão, por Anita, de toda a posterior actividade da aula.

Procurando apoiar esta hipótese e, simultaneamente, ilustrar facetas relevantes do trabalho realizado neste âmbito, apresento dois episódios de ensino e as associadas reflexões de Anita. O primeiro — *Mas dava-me tanto jeito ter ali aquilo…* — surge quando a turma ainda trabalha na transformação de $3/2^5x5^3$ e encerra a primeira fase da produção da prova da conjectura “c. pot. f. i.”. O segundo — *Aquilo resultou com aquele exemplo. E no geral?* — ocorre, como o próprio título sugere, na altura em que se tenta produzir a prova algébrica desta conjectura trabalhando com a representação $k/2^nx5^m$. Por esta razão incluo-o na subsecção seguinte a esta.

Mas dava-me tanto jeito ter ali aquilo…

1. Anita: Não há lógica aqui, mas… mas o quê? Vejam lá o que é que ele fez, ajudem-no lá.

Vários alunos dizem que as fracções são diferentes.

2. Maria: Oh sôtora, mas isso não pode ser porque $3/2^5x5^3$ é diferente de $3/2^5x5^5$.
3. Anita: Então o que estás a dizer é que $3/2^5x5^3$ é diferente disto *(aponta para $3/2^5x5^5$).*
4. Maria: Pois, é que dá resultados completamente diferentes.
5. Roberto: Mas é que aquilo não tem nada a ver. É outra fracção.
6. Anita: Esperem lá, esperem lá. Ele diz que é outra fracção.
7. Cristina: Pois, por isso mesmo.
8. Roberto: Não tem nada a ver com isso, é outra coisa.
9. Anita: Ou seja, esta não é igual a esta, pois não? E então? Mas dava-me tanto jeito ter ali aquilo…
10. Vários alunos: Pois dava...
11. Anita: Será que não se pode compensar, nem nada?
12. Maria: Tinha que se corrigir o 2...

Há outras intervenções que não são perceptíveis.

13. Anita: Tinha que se corrigir o 2? O que é que, por um lado, está ali a dar tanto jeito e, por outro lado, está a estragar aquilo tudo?

14. Roberto: O elevado a 2.
15. Anita: O que está aqui a perturbar, digamos assim?
16. Roberto: Ou é o 5 elevado a 2 ou é o 2 elevado a 5.
17. Aluna: É essa coisa.
18. Anita: É essa coisa? *(aponta para 5^2)*. Como é que eu dou a volta àquela coisa que me dá tanto jeito ter em baixo?

Os alunos trocam impressões entre si. A professora na sequência de uma pergunta da Maria explica o que se está a tentar fazer. Aguarda sugestões.

19. Roberto: Não se pode multiplicar 3 por 5 elevado a 2?
20. Anita: Há uma sugestão. Comentem lá o que ele disse.

(...)

24. Anita: Se ele multiplicar o 3 por 5 ao quadrado, o que é que acontece?
25. Roberto: Já ficam iguais.
26. Anita: A sugestão que está a aparecer agora é (*acrescenta* x5^2 *ao numerador da fracção* $3/2^5$x5^3x5^2*; fica registado no quadro* $3/2^5$x5^3 = 3x$5^2/2^5$x5^3x5^2). Porque é que estás a multiplicar por 5 ao quadrado?

A professora prossegue nesta linha. Coloca questões visando explicitar o porquê da necessidade de se multiplicar o denominador da fracção por 5^2*, da necessidade de se multiplicar o numerador e da equivalência entre as fracções de partida e de chegada. Transforma a fracção* 3x$5^2/2^5$x5^5 *em* $75/10^5$*. Recorda as características das fracções referidas na conjectura recorrendo ao enunciado registado no quadro. Salienta, a partir das questões que coloca, que a fracção a que se chegou no final origina uma dízima finita.*

27. Anita *(para Maria*): Então, valeu a pena fazer tudo isto? Qual era o objectivo?
28. Maria: Valeu. Era transformar a fracção noutra em que o denominador é uma potência de 10.
29. Anita: E porquê?
30. Maria: Porque por definição *(consulta o caderno)* uma dízima finita pode-se representar sob a forma de uma fracção em que o denominador é uma potência de base 10.
31. Anita: Esta *(aponta para* $3/2^5$x5^3*)* não tinha e, portanto, foi-se ver se com passagens, entre aspas, matematicamente possíveis chegávamos a quê?
32. Alunos: A uma em que o denominador é potência de base 10.

(TA 20/01/03, pp. 17-18)

A sugestão "multiplicar por 5^2" proposta por Roberto pouco antes deste episódio é ambígua. Não é inteligível se são ambos os termos da fracção $3/2^5$x5^3 ou um só que devem ser multiplicados. Pouco antes da intervenção correspondente a §1, Anita procurando trazer à tona esta ambiguidade, escreve no quadro $3/2^5$x5^3 = $3/2^5$x5^3x5^2 e interpela o autor da sugestão no sentido de perceber se o registo corresponde à ideia apresentada. Tendo obtido a sua adesão, procura que outros elementos da turma a analisem, se posicionem sobre a sua correcção e que fundamentem as suas posições:

> O Roberto disse que era para multiplicar o denominador. Eu queria que eles avaliassem o que ele disse, que assumissem uma posição e que a defendessem. Por isso é que quando a Cristina disse isso [*Mas ele não pode fazer isso, ou pode, assim, sem mais nem menos*], eu respondi *Isso agora cabe-vos a vocês…* (TST 42, p. 61)

Embora alguns colegas e, a partir de determinado momento, o próprio Roberto (§5, §8) não tenham dificuldades algumas em afirmar, convictamente, que $3/2^5x5^3$ não é igual a $3/2^5x5^5$, as justificações que apresentam não vão para além de "porque ele não pode meter assim essas coisas que lhe vêm à cabeça, isso tem que ter uma lógica..." (TA 20/01/03, p. 16) ou de "dá resultados completamente diferentes" (§4). Anita tenta que os alunos expandam o seu pensamento. Em particular, recorre à própria voz para dar visibilidade a uma das contribuições apresentadas e apela ao envolvimento dos colegas de Roberto esperando que, através desta via, surjam ideias que tornem visível a necessidade de também se multiplicar o numerador da fracção pela mesma potência pela qual multiplicou o denominador: "E eu repito para destacar e tento que avancem [referência a §1]" (TST 42, p. 62).

No entanto, não consegue grandes frutos. Opta, então, por apresentar uma "pista" através da qual procura que a turma se aperceba da necessidade de alteração do numerador: "Essa pergunta *será que não se pode compensar, nem nada?* [§11] é uma pista. Eu aqui estou a dar uma pista..." (TST 42, p. 62). Com humor, a colega de Anita reage a este comentário dizendo: "Vá lá, aqui estás a dar uma ajudinha... (risos)" (Rebeca, TST 42, p. 62). Anita responde-lhe: "Estou a dar uma pista, mas eu não queria dá-la... (risos)" (idem).

Procurando compreender melhor em que alturas Anita considera relevante apresentar sugestões aos alunos relacionadas com a actividade que têm em mãos e, em particular, o porquê de, nesta ocasião, não querer apresentar a pista que refere, interpelo-a neste último sentido: "Porque eu acho que os alunos também têm que puxar pela cabecinha, digamos assim... Acho que já devia ter surgido deles.... Não sei.... Acho que devia ter surgido! Se não surgiu devia ter surgido" (TST 42, p. 62).

Na sua perspectiva, quando uma ideia é apresentada na turma, os outros elementos "estão lá também para dizerem quando não concordam e porquê..." (TST 42, p. 61). Esperava que fossem capazes de reflectir sobre a sugestão de Roberto e, mobilizando o conhecimento sobre equivalência de fracções, reparassem que o numerador da fracção também devia ser alterado, o que contribuiria para o seu aperfeiçoamento. Insatisfeita com a incompletude das contribuições para fundamentarem o não acordo com esta sugestão, foi apenas quando desistiu destas expectativas que decidiu introduzir na discussão uma questão que sabia poder facilitar o progresso da actividade:

> Mas aquela pista surgiu ao fim de não sei quanto tempo... (risos) (...) É que ainda por cima eles não verbalizaram exactamente porque é que não se podia pôr $3/2^5x5^3$ igual a $3/2^5x5^3x5^2$, percebes? Dizerem só que não há lógica e que são diferentes é que não chega, antes de eu ter dado essa pista. (TST 42, p. 62)

A prossecução do diálogo revela, em primeiro lugar, que Anita procura ajudar os alunos a encontrarem uma forma de compensar a alteração introduzida na fracção $3/2^5x5^3x5^2$ tentando destacar as potencialidades e problemas do processo seguido (§13, §15, §18). Tornada pública uma ideia que permite a compensação (§19), preocupa-se em que a turma avalie as suas consequências (§20, §24) e prossegue interagindo com os alunos de modo a concluir e justificar o processo de transformação da fracção. Neste âmbito, revisita o enunciado da conjectura. Por último, procura, através de Maria, dar visibilidade ao propósito da actividade desenvolvida (§27) e ao que fundamentou a sua necessidade (§29, §31).

Trabalhando com o caso geral, visitando um exemplo

O episódio *Aquilo resultou com aquele exemplo. E no geral?* ocorre no começo da segunda fase da prova da conjectura "c. pot. f. i.". Revela como Anita procurou ajudar os alunos a iniciarem o percurso de prova trabalhando com a representação algébrica das fracções referidas no enunciado da conjectura. Ilustra, também, o modo como lidou com uma das contribuições apresentadas para transformar o seu denominador numa potência de base 10 que sabia não ser eficaz.

Aquilo resultou com aquele exemplo. E no geral?

1. Anita: E se eu agora quiser pegar numa coisa qualquer? Aquilo resultou naquele exemplo *(ênfase)*. E no geral?

Os alunos não respondem.

2. Anita: O que é que se faz no geral? O que é que é o geral, neste caso?

Alguns alunos respondem que é a conjectura.

3. Anita: Qual é a diferença entre isto *(aponta para $k/2^n$x5^m)* e isto que está aqui *(aponta para $3/2^5$x5^3)*?
4. Cristina: A diferença?

A professora acena afirmativamente.

5. Anita: Por exemplo, neste caso *(aponta para $3/2^5$x5^3)*, o k está a ser quanto?
6. Alunos: 3.

A professora pergunta os valores de n e de m no caso particular. Os alunos respondem correctamente.

7. Anita: Se eu agora quiser fazer com letras, como é que hei-de fazer?

Passam-se alguns momentos.

8. Roberto: Escreva no denominador 2 elevado a *n* vezes 5 elevado a *m* vezes 2 elevado a *j* vezes 5 elevado a qualquer coisa e em cima *k* vezes 2 elevado a *j*.

*A professora regista no quadro k*x*$2^j/2^n$*x*5^m*x*2^j.*

9. Roberto: Falta 5 elevado a qualquer coisa.
10. Anita: É assim... Nós temos aqui um caso quê *(aponta para $3/2^5$x5^3)*?

Os alunos não respondem.

11. Anita: Um caso geral, este *(aponta para $3/2^5$x5^3)*?

Os alunos não respondem. Passam-se alguns momentos.

12. Aluna: Não.
13. Anita: Este *(aponta para $k/2^n$x5^m)* poderá ser encarado... É quase parecido com este *(aponta para $3/2^5$x5^3)*... Só que... daqui para aqui vocês já disseram que o *k* era 3, o *n* tinha um determinado valor e o *m* tinha um determinado valor. Agora será que... O que é que eu posso fazer se tiver só letras de maneira a chegar à prova? Para já a que é que eu quero chegar, mais uma vez?
14. Alunos: A uma potência de base 10.
15. Anita: A uma fracção em que o denominador é uma potência de base 10. Portanto, como é que eu chego com aquilo, a uma potência de base 10?

Passam-se alguns momentos.

16. Renata: Eu não estou a perceber porque é que ali tem que ser o 2 elevado a qualquer coisa.
17. Roberto: Falta uma coisa, falta 5 elevado a qualquer coisa.
18. Anita: Primeiro, pergunta ao Roberto, porque eu só estou a escrever o que ele disse. Pergunta lá porquê. Porque é que tem que ser o 2?

19. Roberto: A seguir a 2 elevado a *j* falta 5 elevado a qualquer coisa, pode ser a *g* ou outra coisa.
20. Anita: Bem temos uma saladinha aqui de letras... Bem, então vamos lá pôr tudo o que ele está a dizer e agora vamos ver… Daqui a nada está aqui o alfabeto todo *(regista no quadro:* $k\text{x}2^j\text{x}5^g/2^n\text{x}5^m\text{x}2^j\text{x}5^g$*)*. E agora?

(...)

22. Anita: Então e agora? Daqui... *(aponta para* $k\text{x}2^j\text{x}5^g/2^n\text{x}5^m\text{x}2^j\text{x}5^g$*)* para nós chegarmos a uma potência de base 10... Tenho a impressão de que estamos a enveredar por uns caminhos um bocado tortuosos...
23. Renata: *n* mais *j* é igual a *m* mais *g*.
24. Anita: Então, mas é igual porquê?

Ouve-se "tem que ser", "por causa das letras todas".

25. Anita: Vocês querem uma dicazinha, dicazinha?
26. Cristina: Oh sôtora, diga as dicas logo.

Outros alunos dizem "vá", "sim".

27. Anita: Nem preciso de dar muita dica. Mas é assim, tu há bocado... Quando andámos aqui com este 5^2, andámos a pôr números ao acaso ou tínhamos algum motivo particular? Então?
28. Renata: Tínhamos um objectivo.
29. Anita: Está bem, e porque é que foi 5^2?
30. Cristina: Porque era o que nos dava jeito.
31. Roberto: Porque era o que dava para pôr ali.
32. Anita: Vocês ouçam o que se está a passar agora. Como é que este aqui apareceu *(aponta para* 5^2*)*?
33. Cristina: Dava jeito.
34. Anita: Dava jeito. E porque é que dava jeito?
35. Vários alunos: Porque dava para ter uma potência de base 10.
36. Anita: Está bem. Mas porque é que aqui *(aponta para o expoente de* 5^2*)* é um 2 e não é um 4?
37. Roberto: Porque tinha que dar o expoente do 2.
38. Renata: Porque 3 mais 2 dava 5 que era o expoente do 2.
39. Anita: Porque este *(aponta para o expoente de* 5^3*)* mais este *(aponta para o expoente de* 5^2*)* dava este *(aponta para o expoente de* 2^5*)*. *(Regista no quadro 3+2=5 e liga por setas cada um destes números aos expoentes das potências indicadas no denominador da fracção* $3\text{x}5^2/2^5\text{x}5^3\text{x}\ 5^2$*)*. E agora é preciso esta salada toda?

(...)

43. Anita: Então? E agora? (*escreve no quadro "Prova" junto de* $k/2^n\text{x}5^m$).

(TA 20/01/03, pp. 19-21)

Previamente a este episódio, Anita tinha proposto aos alunos "fazerem mais um exemplo" (TST 42, p. 66), ou seja, seguirem um processo idêntico ao adoptado na transformação de $3/2^5\text{x}5^3$ numa fracção decimal usando um novo caso, "mas eles não querem... Acham que estão satisfeitos” (idem). Quando inicia com a turma o trabalho com a fracção $k/2^n x 5^m$, supõe que produção da prova para o caso geral não será muito problemática, tanto mais que, na sua perspectiva, embora se revista de algumas dificuldades “não é assim tão transcendente” (idem, p. 65): “Eu achava que eles fazendo com o exemplo e se tivessem percebido o que foi feito em conjunto com eles e vindo deles, depois conseguiam para o caso geral” (TST 42, p. 67).

Tenta, assim, que os alunos apresentem contribuições em que possa apoiar-se para iniciar o percurso de prova (§1, §2). Perante a sua inexistência, retoma o exemplo analisado (§3, §5) após o que tenta, de novo, que estas contribuições surjam (§7). Este modo de agir mantém-se posteriormente. Ou seja, face à não emergência de ideias ou à apresentação de sugestões pouco prometedoras, o primeiro movimento de Anita é revisitar os registos, mantidos no quadro, relativos ao caso particular que trabalhou com a turma, procurando que os alunos, por analogia, intuam ideias que lhes permitam lidar com o caso geral. Este movimento transparece nas intervenções correspondentes a §10, §11, §13 e §15 subsequentes à sugestão de Roberto (§8). Transparece, também, na “dica” que apresenta e questões a ela associadas (§27, §29, §32, §34, §36, §39, §43) quando é confrontada com a contribuição de Renata (§23) e com as justificações que para ela emergem, depois dessa sugestão ter sido explorada na turma.

Anita sabe que a ideia apresentada por Roberto (§8) não permite atingir o objectivo que visa. No entanto, regista-a embora num primeiro momento não integre a potência de expoente 5 que este aluno refere (§9). Vem a fazê-lo mais tarde (§20) quando, depois de recordar o propósito da actividade (§13), uma aluna a retoma manifestando a vontade de compreender o raciocínio que lhe está subjacente (§16). Institui-a como objecto de análise colectiva e, neste processo, procura responsabilizar o aluno pela explicação e justificação das ideias que apresentou (§18). Além disso, procura envolver a turma na análise das suas consequências (§20, §22). A reflexão apresentada a este propósito permite compreender o porquê desta opção:

> Era a que vinha... Ele pensava que assim ia lá... Porque não? (...) Analisámos e vimos que não conduzia a lado nenhum. Foi esse o meu objectivo. (...) Tudo bem, mas não serve porque não nos ajuda... (TST 42, p. 66)

Até ao final da aula, continua a não ser simples, para Anita, fazer emergir contribuições que permitam fazer progredir o processo de prova. Em diversas ocasiões interpela os alunos sobre os problemas com que se confrontam (TA 20/01/03, p. 21, p. 22, p. 23). As suas contribuições revelam que um destes problemas se enraíza em incompreensões relativas ao processo de identificação do expoente da potência pela qual devem ser multiplicados os termos da fracção $k/2^n x 5^m$ para obter uma fracção decimal, mesmo quando se conhece a base desta potência. Outro deriva de não conseguirem encontrar uma forma de lidar com o desconhecimento da base desta potência, fruto de não poderem comparar *m* e *n* para saberem qual destes expoentes é maior. Revisitar o exemplo analisado na turma foi a estratégia que a professora usou para lidar com o primeiro problema. Quanto ao segundo, apresenta, já perto do final da aula, uma nova "dica" que origina a apresentação de ideias que, rapidamente, permitem ultrapassá-lo: "Então é assim. Eu vou-vos dar uma dica já que vocês estão aí com tantos pudores... Vamos supor que *n* é maior que *m (escreve no quadro "supondo n>m")*" (TA 20/01/03, p. 23). Os cálculos algébricos relativos à transformação de $k/2^n x 5^m$ numa fracção decimal são feitos por Anita no quadro, seguindo indicações que os alunos lhe dão na sequência de questões que lhes coloca. Instantes antes da aula terminar, Tomás, por sua iniciativa, levanta a questão do expoente de 5 ser superior ao expoente de 2: "Sôtora, e se o *n* for o expoente do 5 e o *m* expoente do 2?" (Tomás, idem, p. 24). Esta questão permitiria analisar como a professora tencionava fazer o caso n<m. Anita devolve-a à turma, mas o toque de saída só permite uma rápida resposta. Assim, é remetida para trabalho de casa.

Problemas experienciados

Mesmo com um exemplo houve ali problemas em termos do que fazer e como pela parte dos alunos

A produção da prova da conjectura "c. pot. f.i." com a turma deixou Anita particularmente "insatisfeita" (TST 42, p. 29). Foi, do seu ponto de vista, "onde os alunos tiveram mais dificuldades" (TST 41, p. 2) e onde, nas suas palavras, "fiquei frustrada" (TST 42, p. 65). Apesar das tentativas que foi fazendo, os alunos não responderam, como desejava, às questões que lhes ia colocando: "Eu também fiquei um bocadinho chateada de eles não me responderem aquilo. Ia tentando... O que lhes estava a perguntar não é assim tão transcendente..." (idem, p. 64). A actividade de transformação do caso particular da fracção com que a turma trabalhou foi morosa, não fácil para os alunos e, ao mesmo tempo, não suficientemente poderosa, como esperava, para que imaginassem e participassem, sem problemas, no processo de transformação do caso geral. Lidar com tudo isto não foi simples:

> Depois outra dificuldade foi a prova em si mesmo. Mesmo com um exemplo houve ali problemas em termos do que fazer e como pela parte dos alunos, e depois eu não sei bem por onde é que fui... Eu lá fui vendo o que se consegui fazer... (TST 42, p. 26).

A partir de uma iniciativa da colega, debruçamo-nos sobre a passagem da primeira fase da prova para a segunda que lhe pareceu demasiado rápida:

> Acho que passaste muito rapidamente para o caso geral. Precisava aqui de ser posto bem em evidência o que tinha sido feito naquele caso particular para eles poderem avançar para o geral. Porque já tinha custado tanto transformarem o caso particular que devias... aquelas dicazinhas que foste dando, deviam ter sido chamadas aqui à atenção no caso particular... Acho que devia mesmo ter sido feito. (Rebeca, TST 42, p. 62)

Perante esta reflexão, Anita começa por interrogar-se se não "devia ter dado mais um exemplo para eles fazerem (...) para eles perceberem bem" (TST 42, p. 63). Esta via permitiria, na sua perspectiva, "tornar-lhes a pôr questões... Perguntar-lhes como é que fizeram..." (idem, p. 66), o que poderia conduzir a uma maior apropriação e compreensão do processo de transformação. Supondo a exploração de apenas um exemplo, a opção tomada na aula, e seguindo a linha de raciocínio de Rebeca, coloco a possibilidade de se incluir na síntese reconstitutiva do processo de transformação do caso particular algo que permitisse destacar a importância do expoente da potência pela qual se multiplicam ambos os termos da fracção de partida e suas relações com as potências existentes no denominador desta fracção. Anita encontra sentido nesta possibilidade: “Olhando para trás agora acho que sim, mas na aula estava sempre à espera que corresse melhor e eles avançassem (risos). Percebes o que eu quero dizer?” (TST 42, p. 65).

Reflectindo sobre o processo de prova, Anita considera que a turma fez progressos significativos quando “quando houve as tais dicas” (TST 42, p. 68), incluindo aqui as sugestões que ela apresentou e as questões que eu própria coloquei no sentido de facilitar o desenvolvimento da actividade. Tinha esperança de que estas indicações não fossem necessárias e foi esta expectativa que, no momento, influenciou o seu modo de agir: “Quis tentar que os alunos chegassem às coisas sem ajudas minhas... (...) Às vezes estou com as expectativas... ” (TST 42, p. 68)

Lidando com a emergência e resolução de desacordos

Desacordos emergentes e sua caracterização

Ao longo das secções anteriores e com o objectivo de ilustrar facetas do trabalho realizado por Anita no âmbito da actividade de formulação, avaliação e prova de conjecturas, apresentei, por vezes, informação referente a ocasiões em que emergiram pontos de vista divergentes entre os alunos. Procurando caracterizar, sumariamente, os principais desacordos existentes, retomo, na tabela 11, alguma dessa informação (desacordos 1, 2, 3, 8, 9, 10) e faço referência a outros momentos em que a existência de posições diferenciadas entre os elementos da turma foi um aspecto significativo. Indico, para cada desacordo, o contexto em que surgiu, o que esteve na sua origem, a sua incidência e, quando é o caso, o que permitiu ultrapassá-lo. As letras P e A, que antecedem a intervenção que originou o desacordo, designam, respectivamente, professora e aluno.

A observação da tabela 11 permite destacar os seguintes aspectos:

- Os desacordos surgem a partir de iniciativas da professora e dos alunos, sendo estas dominantes sobre aquelas.
- Os desacordos que resultam de iniciativas da professora decorrem de ter submetido ao escrutínio da turma um caso que sabia ser excluído pelo enunciado da conjectura e que estava a ser apresentado como contra-exemplo (5) e de procurar que os alunos se posicionem relativamente a ideias apresentadas (9, 10).
- Um dos desacordos que têm origem nos alunos deriva da vontade expressa por um elemento da turma em prolongar a discussão da conjectura em análise e da professora delinear o rumo da aula tendo em conta esta vontade (7). Noutro caso o que está em causa não é se a conjectura é, ou não, passível de refutação, mas antes a legitimidade e liberdade de se seguirem os caminhos que se deseja e enunciar as descobertas daí resultantes, os critérios a usar para avaliar uma conjectura e quem é responsável pela avaliação (4). Em qualquer dos casos as objecções expressas incidem ou sobre ideias resultantes do trabalho colectivo (8) ou sobre contribuições apresentadas por alunos particulares.
- Nem todos os acordos são ultrapassados no momento em que surgem. Um, não é explicitamente abordado (9) fruto da actividade da turma ter prosseguido numa direcção que conduziu a uma reformulação da conjectura que exclui o caso apresentado como contra-exemplo. Outro (3) é retomado posteriormente à clarificação do enunciado da conjectura que permite destacar que as duas componentes que o constituem, e não apenas uma só, devem ser tidas em conta para poder decidir se ela exclui, ou não, um determinado exemplo.

Tabela 11: Tarefa *À procura de dízimas finitas*: Principais Desacordos nas Aulas de Anita

Caracterização / Identificação	Emergência		Conteúdo (motivo do desacordo)	Subscritores das posições em confronto	Processo de resolução
	Contexto	O que o desencadeia			
1) A(s): Mas o 4 é múltiplo de 2 (TA 13/01/03, p. 4).	Segunda fase da partilha de conjecturas (diferentes das já registadas).	Intervenção de Renata que origina a objecção de colegas por sua iniciativa.	A inclusão de "múltiplos de 4" na primeira parte da conjectura de Tomás.	Alunos <—> Alunos	Justificações dos alunos por sua iniciativa ou após intervenções da professora visando a clarificação ou justificação do que é dito.
2) A: Se tu fores fazer 1 a dividir por 14 dá infinita e 14 é um número par, é múltiplo de 2 (TA 13/01/03, p. 10).	Avaliação da validade da conjectura de Júlia.	Intervenção de Tita por sua iniciativa que é rebatida por Júlia.	1/14 refuta a conjectura.	Aluna <—> Aluna	Argumentos apresentados por Júlia que mostram que 1/14 é excluído pela conjectura.
3) A: Tiramos os múltiplos de primos. Mas o 10 é múltiplo de 5 (TA 13/01/03, p. 11).	Idem	Intervenção de Júlia que origina a objecção de Roberto por sua iniciativa; outros colegas aderem à posição deste aluno.	1/10 é excluído pela conjectura.	Alunos <—> Aluna	Argumentos de Júlia para fundamentar que 1/10 não é excluído. Clarificação do significado da conjectura (pela aluna + professora). Diálogo entre a professora e alunos que torna visível a importância de considerar as duas componentes do enunciado da conjectura. *(Emergência em 13/1 e resolução em 16/1)*
4) A: Na perspectiva dela está certa, não está incompleta (TA 16/01/03, p. 4)	Avaliação da validade da conjectura de Maria.	Intervenção de um aluno que origina a objecção de Tita por sua iniciativa.	A posição a tomar em relação à conjectura de Maria.	Alunos <—> Alunos	Justificações de alunos por sua iniciativa ou na sequência de intervenções da professora; prova da conjectura pela turma e constatação de que o seu problema é ser "muito limitada".
5) P: Vamos ver 1/65. O que têm a dizer? (TA 16/01/03, p. 7)	Avaliação da validade da conjectura de Tomás & Renata.	Intervenção da professora após ter sido indicado "65" como refutando a conjectura.	1/65 refuta/não refuta a conjectura.	Aluna <—> Alunos	Justificações de alunos por sua iniciativa ou após intervenções da professora que mostram que 1/65 é excluído pela conjectura e por isso não é um contra-exemplo.
6) A: Mas o 9 é múltiplo de 3 e 3 é um número ímpar (TA 16/01/03, p. 11).	Avaliação da validade da conjectura de Roberto.	Intervenção de Tomás que origina a objecção de Roberto, por sua iniciativa.	1/9 refuta/não refuta a conjectura.	Aluno <—> Alunos	Justificação de Roberto e justificações de outros alunos na sequência do redizer, pela professora, da intervenção de Tomás, que revelam que 1/9 é excluído pela conjectura.
7) A: Roberto, espera aí Roberto, então e o 45, o 1/45? (TA 16/01/03, p. 12)	Idem	Intervenção de uma aluna, por sua iniciativa, que origina diferentes posições.	1/45 refuta/não refuta a conjectura.	Alunos <—> Alunos	Explicações e justificações de alunos por sua iniciativa ou após intervenções da professora que mostram que 1/45 é excluído pela conjectura.
8) A: Então não está ali, os expoentes são iguais. (TA 16/01/03, p. 17)	Construção, pela turma, do enunciado da conjectura "c. pot." .	Enunciado registado no quadro que origina a objecção de Tomás, por sua iniciativa.	O enunciado registado no quadro contempla ou não 1/10. O *m* é/não é diferente do *n*.	Alunos <—> Alunos	Explicações de alunos indicando que *m* e *n* não têm que ser iguais. Explicação da professora, sobre o significado de usar a mesma variável e variáveis diferentes numa expressão algébrica.
9) P: E então? (TA 20/01/03, p. 6)	Investigação da conjectura "c. pot." para fracções com numeradores inteiros diferentes de 1.	Intervenção da professora depois de se indicar que 3/15 refuta a conjectura e da simplificação desta fracção.	A conjectura resiste ou não?	Alunos <—> Alunos	A actividade da turma envereda pelo aperfeiçoamento da conjectura. No final a professora destaca que sem a inclusão da palavra "irredutível" estava sujeita a ser falsificada. *(Desacordo não visivelmente resolvido)*
10) P: Há aqui duas posições, embora muito pouco confirmadas (TA 20/01/03, p. 7)	Idem	Intervenção da professora quando estão em discussão os casos 3/15 e 8/15.	8/15 refuta/não refuta a conjectura.	Alunos <—> Aluna	Explicações e justificações de alunos, por sua iniciativa ou após intervenções da professora, que mostram que por 8/15 originar uma dízima infinita não pode ser um contra-exemplo; ponto de situação no final pela professora.

- Os desacordos são ultrapassados através da apresentação de explicações e justificações que surgem, nuns casos, por iniciativa dos alunos e noutros através ou a partir de intervenções da professora, até serem obtidos consensos relativamente às ideias em confronto. Anita reserva para si própria, fundamentalmente, o papel de orquestrar a discussão que ocorre e de introduzir questões visando clarificar ou aprofundar as ideias em debate. Não recorre a argumentos de autoridade para validar, ou invalidar, resultados ou raciocínios matemáticos.

Procurando apoiar estas observações e apresentar de uma forma mais clara e detalhada o modo como Anita lidou com a divergência de ideias, apresento, em seguida, a análise dos desacordos (1) e (7). Reservo para *Dúvidas, dificuldades, problemas e dilemas...* o (9) considerado não visivelmente resolvido.

Processos de resolução de desacordos

Os desacordos (1) e (7) foram objecto de uma análise significativamente pormenorizada por parte de Anita e, globalmente, pelo grupo de pesquisa. As reflexões que apresentou em conjunção com a observação da sua acção, permitem revelar as principais linhas de força que orientaram, globalmente, o trabalho que desenvolveu quando estavam em causa pontos de vista diferentes, bem como o tom que procurou imprimir ao debate de ideias. Por estas razões optei por analisá-los para ilustrar os processos de resolução de desacordos ultrapassados.

Estão a aparecer duas conjecturas muito parecidas

O desacordo (1) emerge, por iniciativa dos alunos, na sequência de Renata — enquanto a professora lê a conjectura de Tomás já registada no quadro — indicar, implicitamente, que importa acrescentar “múltiplos de 4” ao enunciado do colega cuja primeira parte faz referência aos múltiplos de 2. O episódio *Estão a aparecer duas conjecturas muito parecidas*, localizado no início da segunda fase da apresentação das conjecturas formuladas para fracções do tipo 1/n, ilustra o processo de resolução deste desacordo e, simultaneamente, revela a actividade que possibilitou a comparação do significado de duas conjecturas.

Estão a aparecer duas conjecturas muito parecidas

1. Tomás e outros alunos: Mas o 4 é múltiplo de 2.
2. Aluna: Mas o 4 é diferente de 2.
3. Tomás: Mas é múltiplo de 2.
4. Anita: Reparem, está a aparecer a seguinte situação… Júlia e Telma e por aí fora!.. Em relação a esta conjectura *(referência à do Tomás)* estão a aparecer duas conjecturas muito parecidas. O Tomás diz que 1 a dividir por todos os múltiplos de 2 e de 5 dá dízimas finitas. Eu depois já comento o resto. E a Renata e a Cristina estão a dizer que 1 a dividir por todos os múltiplos de 2, 4 e de 5 dá dízimas finitas. O Tomás estava a dizer uma coisa que vai dizer agora alto outra vez.
5. Aluna: Mas o 4 também é múltiplo de 2…
6. Outra aluna: Mas o 6 também é múltiplo de 2 e dá infinita.
7. Tomás: Mas isso está em baixo… Coincide com um múltiplo de 3…
8. Anita: Eles já vêm com as excepções a seguir, mas não era esse o meu ponto. O meu ponto era aquilo que tu estavas a dizer à Renata. Diz lá alto.
9. Tomás: O 4 é múltiplo de 2.
10. Aluna: A tabuada do 4 coincide com a do 2.
11. Anita: Umh?

A aluna repete.

12. Anita: Coincide… *(abana as mãos)* O que é que queres dizer com coincide?
13. Aluna: É igual à do 2…

(há outras intervenções quase simultâneas que não são perceptíveis)

14. Anita: A questão é: vale a pena acrescentar aqui *(aponta a conjectura do Tomás)* múltiplos de 4 ou não?
15. Vários alunos: Não.
16. Anita: Porquê?
17. Tita: A tabuada do 2 inclui números pares, só os números pares e na tabuada do 4 também só há números pares e por isso não vale a pena acrescentar…
18. Outra aluna: Os números que estão na tabuada do 4 estão também na do 2.
19. Anita: Por outras palavras, o quê?
20. Aluna: É a mesma coisa.
21. Anita: Mesma coisa… *(abana as mãos)*
22. Outra aluna: A tabuada do 2 é mais completa.
23. Anita *(dirigindo-se a alunos de outra parte da sala)*: Vale a pena, ou não, escrever?

> *Ouvem-se vários alunos respondendo "não". A professora pergunta-lhes porquê. (...). O Tomás diz que há excepções e a professora diz que vai acrescentar as excepções que os dois grupos, o dele e o da Renata, encontraram em conjunto.*
>
> (TA 13/01/03, pp. 4-5)

A primeira intervenção (§1) representa uma objecção à contribuição de Renata. Esta objecção é, por seu lado, posta em causa por uma colega que, ao referir "mas o 4 é diferente de 2" (§2), ou seja, ao apresentar uma garantia para a pretensão de Renata, parece, embora sem explicitamente o dizer, apoiar a sua posição. Não existe divergência sobre a existência de fracções de numerador 1 que originam dízimas finitas e cujos denominadores são, em particular, múltiplos de 2 e de 4. O que está em confronto é se pelo facto do enunciado de Tomás referir os múltiplos de 2 é, ou não, dispensável, a inclusão dos "múltiplos de 4" no conjunto de "dados" (Toulmin, 1993) de que se parte.

A análise das reflexões de Anita a propósito deste episódio, a par da observação das intervenções feitas no decurso da aula, deixa transparecer que o seu modo de agir foi orientado, fundamentalmente, por três tipos de intenções interligadas: (a) focar a actividade da aula no desacordo e sua resolução; (b) procurar que haja clareza nos argumentos apresentados para que seja inteligível o que permite fundamentar a decisão a tomar; e (c) envolver na discussão outros alunos que não os subscritores primeiros das posições em confronto, procurando, em particular, averiguar qual a sua compreensão sobre as ideias em debate.

Com efeito, ao percepcionar o desacordo, tenta, em primeiro lugar, focar nele a atenção da turma (§4). Procura, por um lado, dar-lhe visibilidade utilizando como recurso o relato de contribuições dos alunos: "Para dar visibilidade ao desacordo faço um relato da situação" (Anita, TST 41, p. 21). Através desta via, salienta a existência de duas posições sobre a primeira parte do enunciado das conjecturas. Simultaneamente, porque nas suas palavras, "quero que todos ouçam e partilhem" (idem), "procuro chamar a atenção àqueles que me parecem estar um bocado com a atenção focada noutro lado. Isto tem a ver com a minha primeira intervenção [§4]" (idem, p. 23). Do seu ponto de vista, embora este desacordo tenha "surgido mais ou menos espontaneamente porque um aluno apresenta uma ideia [Renata] e outros rebatem logo [§1]" (idem), a objecção que é apresentada, porque pouco desenvolvida — "não desenvolvem muito" (idem) —, pode não ser muito inteligível para alguns elementos da turma. Assim, importa dar visibilidade ao desacordo por duas ordens de razões: "Para já para que mais alunos se envolvam e depois para argumentarem de uma maneira mais clara" (idem).

Argumentar de uma maneira mais clara poderia passar, por exemplo, (a) pela explicitação de ideias que tornassem visível para a turma porque é o facto de 4 ser múltiplo de 2 — a "garantia" que, nomeadamente Tomás, apresenta para apoiar a sua objecção — permite eliminar os múltiplos de 4 da formulação da conjectura, (b) pela apresentação de novas garantias que introduzam uma maior transparência na passagem dos dados à conclusão, e/ou (c) pela indicação de elementos justificativos que permitam apoiar estas garantias. Para poder emergir qualquer uma ou várias destas justificações é fundamental que a discussão prossiga centrando-se na primeira parte das conjecturas formuladas.

Assim, em segundo lugar, Anita tenta assegurar que o debate não se desvia para as "condições de excepção" das conjecturas (§8) e destacar o objectivo da troca de ideias (§14): "Depois a seguir tento que os alunos se foquem no que está a ser discutido ou seja, que analisem a primeira parte das conjecturas do Tomás e da Renata" (TST 41, p. 23). Começam a emergir novos argumentos, apresentados por iniciativa dos alunos ou na sequência de incentivos à explicação (§12, §19, §21) ou pedidos de justificação que a professora lhes dirige (§16). Estes argumentos apoiam a ideia de que pode prescindir-se da referência aos múltiplos de 4. Reflectindo sobre o papel que procurou desempenhar, ao longo deste processo, Anita indica: "Tento também que tornem mais claro o que estão a dizer que é quando eu digo, por exemplo *o que queres dizer com coincide?* [§16] ou quando abano as mãos. Tento que justifiquem o que dizem" (TST 41, p. 23). O gesto de "abanar as mãos", que utiliza com frequência, tem, do seu ponto de vista, "muitas vezes" (idem, p. 21) subjacente "a intenção de que eles avancem, que continuem a argumentar" (idem).

Por último, Anita foca-se nos elementos da turma que não participaram activamente na discussão (§23). Este movimento tem subjacente várias intenções interligadas: "Tentar envolver mais alunos na discussão, ao mesmo tempo perceber se estão a ouvir ou não e também perceber o que é que eles estão a reter da discussão" (TST 41, p. 23).

Todas as contradições são boas para esclarecer

O episódio *Todas as contradições são boas para esclarecer* surge no âmbito da análise da conjectura de Roberto e permite ilustrar o processo de resolução do desacordo (7). Na altura, tinham sido já discutidos alguns candidatos a contra-exemplos que se veio a revelar não o serem devido às condições de excepção da conjectura. Este aluno tinha já explicado, de uma forma detalhada e apoiando-se em registos que fez no quadro, o percurso que tinha conduzido à sua formulação. Instantes antes do episódio, Roberto interpela a professora sobre a possibilidade de apresentar aos colegas as descobertas relativas às regularidades existentes nos denominadores das fracções que originam dízimas finitas quando estes se decompõem em factores primos. Anita partilha com a turma esta possibilidade o que, implicitamente, denota que não a exclui. Roberto escreve no quadro 50 preparando-se para iniciar a decomposição e é neste momento que emerge a intervenção (§1) que faz surgir o desacordo.

Todas as contradições são boas para esclarecer

1. Aluna: Roberto, espera aí Roberto, então e o 45, o 1/45?
2. Roberto *(para a professora)*: Vou decompor o 50 em factores primos.

O Roberto começa a fazer a decomposição no quadro. Alguns alunos começam a discutir, entre si, o caso 1/45.

3. Aluna: Com o 1/45 dá...
4. Renata: Não dá, o 9 é ímpar...
5. Júlia: Então, mas o 45 é um múltiplo de 9 e 9 já é outro número ímpar.
6. Várias alunas *(para a Júlia)*: Por isso mesmo, por isso mesmo é que não dá.
7. Júlia *(para as colegas)*: Outro ímpar! *(ênfase)*
8. Várias alunas *(para a Júlia)*: Por isso mesmo.

9. Júlia *(para as colegas)*: Mas ali diz que não pode ser de outro ímpar.
10. Anita *(para o Roberto)*: Estás a ouvir o que estão a dizer? *(para a turma)* Esperem aí… Todas as contradições são boas para esclarecer. Toda a gente já percebeu? Independentemente de… Diz lá Júlia, estás a discutir a mesma, ou já estás a arriscar...
11. Júlia: Múltiplo de 2 ou de 5 não podendo ser múltiplo de outro *(ênfase)* número ímpar.
12. Roberto *(para a Júlia)*: Este 10 é múltiplo de 2 e é múltiplo de 5, mas só.
13. Júlia *(para o Roberto)*: Eu não estou a falar do 10!
14. Outra aluna: É o 45.
15. Anita: Ouve o que ela diz. Ouve lá, Roberto, espera aí.
16. Júlia: O 15 e o 45 não se tiram. O 15 é múltiplo de 3 e o 45 é múltiplo de 9, mas dizes que não podem ser múltiplos de outro número ímpar.
17. Aluna: Por isso mesmo.
18. Roberto *(para a Júlia)*: Por isso mesmo. Então o 3 não é número ímpar?
19. Anita: Ela não percebeu. Acho que podias… Vamos discutir o 1/45. Pronto, qual é o problema? Desde que se discuta bem isto, não tem problema nenhum.

O Roberto escreve no quadro 1/45 e representa 45 na forma de produto. A professora circula entre os alunos. Quando se aproxima da mesa de Renata, esta aluna, falando em voz baixa, diz: "Mas ela não percebe!". A professora, também em voz baixa, responde: "Está bem, então ajudem-na a perceber. Não sejam é crrr, crrrr…" (faz um gesto expressando "corte").

20. Renata: Oh Júlia, Júlia, vou explicar, posso?

O Roberto começa a querer explicar o que se passa com o 45.

21. Anita *(para a Renata)*: Pede ao Roberto, se não às tantas...
22. Renata: Espera aí Roberto, que é para ver se ela percebe.
23. Anita *(em voz muito baixa)*: Ai, ai…
24. Renata *(para a Júlia)*: É assim: O Roberto diz que dá dízimas finitas quando o denominador é múltiplo de 2 ou de 5. Quando o denominador é múltiplo de outro número ímpar dá infinita. Logo 45 não dá, porque é múltiplo de 9 que é um número ímpar.
25. Cristina: Pois.
26. Anita: O vosso "não dá" significa o quê? O que é que quer dizer "não dá"? Eu percebo, mas queria que vocês explicassem melhor.
27. Renata e Cristina: Não dá porque é uma dízima infinita.
28. Anita: Mas não dá para quê? Completa lá...
29. Cristina: Não dá para aquilo.
30. Anita: Mas falta dizer para que é que não dá. Falta esse pormenor. 1/45 está a ser oferecido como quê?
31. Renata: Contra-exemplo.
32. Anita: Aquilo está a ser oferecido como contra-exemplo e o que a Renata está a tentar dizer é que 1/45 não é um contra-exemplo, não é?
33. Renata e Cristina: É.
34. Anita: Porque...

35. Cristina: Porque não corresponde ao que está ali.
36. Anita: Não corresponde ao que está ali como ficando. É isso que estás a querer dizer, Roberto, mais a Renata?

O Roberto concorda e começa a explicar porque é que 1/45 se exclui. Olha para a professora enquanto fala.

37. Anita *(para o Roberto)*: Mas não estejas a dizer para mim… Não fui eu que disse que isso não era… Qual é o problema? O problema é que tem que se discutir e não faz mal nenhum, então… Júlia, percebeste o que ele está a dizer?

A Júlia abana a cabeça exprimindo que não.

38. Anita *(para o Roberto)*: Ainda não conseguiste convencê-la a ela. Tenta organizar a frase toda, não suprimindo coisas. Tudo, diz tudo. Não é aos bocadinhos. Júlia, ouve lá agora o Roberto um bocado. Olha lá para ele um bocadinho.
39. Roberto *(olhando para a professora)*: A diferença entre o 45 e o 10...
40. Anita: Estás a olhar para mim porquê? *(risos)* Quer dizer, digo à Júlia para olhar para ti e tu olhas para mim… Entããããooo… *(risos)*

O Roberto explica, de novo, o percurso que conduziu à formulação da conjectura e porque, contrariamente a 1/10, excluíram 1/45. (...) A certa altura a professora senta-se num lugar vago próximo da Júlia com um ar bem disposto.

(TA 16/01/03, pp. 12-14)

Interpretando os acontecimentos da aula, Anita dá-se conta que os elementos da turma se situam em patamares diferenciados relativamente à compreensão da conjectura de Roberto e à avaliação que dela deve ser feita: "Apercebi-me que o Roberto estava muito mais além do que os outros. Os colegas estavam mais atrás, não estavam ainda muito esclarecidos se a conjectura do Roberto devia ser refutada ou não" (TST 42, p. 5). Constata, também, que emerge um desacordo focado na possibilidade de 1/45 constituir, ou não, um contra-exemplo para esta conjectura: "Uns achavam que o 1/45 falsificava e outros achavam que não" (idem). Porque considera importante que a turma se debruce sobre as ideias que estão a surgir, decide alterar o rumo da aula e cria uma abertura para que este desacordo possa ser instituído como objecto de reflexão:

> Por isso resolvi fazer uma espécie de ponto de situação, uma paragenzinha. Foi uma opção. (...) apercebi-me que havia ali qualquer coisa e inflecti o sentido do que estava a fazer. (...) Achei que era importante que eles pensassem nisso e inflecti. (TST 42, p. 5)

Globalmente, as intervenções de Anita ao longo do episódio, parecem ter sido orientadas, por um lado, pela intenção de promover a resolução do desacordo do ponto de vista matemático, ou seja, encorajar a apresentação de argumentos matemática e logicamente válidos que permitam revelar porque é que 1/45 não refuta a conjectura. Intimamente entrelaçada com esta intenção, surgem, também, preocupações de outra natureza. Estas prendem-se (a) com a desvalorização do erro e a protecção do direito à compreensão; (b) com a preservação das relações entre os alunos e a diminuição dos riscos, para os autores da ideia que é revista, em termos de auto-estima e imagem perante os pares; (c) e com o modo como a comunicação, em geral, se deve processar na aula. As várias reflexões apresentadas por Anita sobre as suas intervenções e movimentos podem contribuir para iluminar e apoiar estas ideias.

Face à existência de posições divergentes sobre 1/45 ser, ou não, contra-exemplo, procura, em primeiro lugar, salientar as potencialidades do confronto de ideias, independentemente da sua correcção, para a "compreensão das coisas":

> É valorizar o que é dito independentemente de estar certo ou errado (...) O que importa é que quando surgem na aula contradições entre ideias, elas sejam discutidas e não abandonadas, mostrar que as contradições, se forem analisadas e discutidas, também têm valor, podem permitir ir mais além na compreensão das coisas [comentário a §10]. (TST 42, p. 6)

> E depois, mais à frente quando digo *Vamos discutir o 1/45. Pronto, qual é o problema? Desde que se discuta bem isto, não tem problema nenhum* [§19] estou, por um lado, a valorizar a discussão e, por outro, a tentar relativizar o erro. É dizer não tem importância mesmo que as coisas estejam erradas. Importa é discutir para perceber. É para eles não se retraírem. Foi uma opção. (TST 42, p. 7)

Em segundo lugar, gere o discurso de tal modo que Júlia — a principal defensora de que 1/45 é um contra-exemplo (§5, §7, §9) e o único elemento da turma que torna público o que, para si, justifica esta ideia — tenha oportunidade de explicar o seu pensamento e fundamentar a posição que assume (§10, §15). Ou seja, protege o direito desta aluna seguir e partilhar raciocínios em que encontra sentido mesmo que, do ponto de vista matemático, não sejam válidos. Neste processo, procura ensinar aos alunos a importância de se esforçarem por entender o ponto de vista do outro: "É importante que o Roberto ouça o que a Júlia tem para dizer para poder perceber [comentário a §15]" (TST 42, p. 7). Procura, também, mostrar à turma que se "há uma aluna que não percebeu (e) tem direito a perceber e por isso os colegas devem continuar a esforçar-se para que ela entenda [comentário a §19]" (idem, p. 14). Tornar inteligível para a turma, através de Júlia, este direito à compreensão e, simultaneamente, tornar visível que quando se pretende pôr em causa uma ideia de alguém importa fazê-lo de modo a que, em particular, os argumentos sejam compreensíveis por este alguém, foram preocupações que orientaram outros movimentos posteriores de Anita. Por exemplo, referindo-se à intervenção correspondente ao §38 diz:

> Depois a Júlia continua a dizer que ela não percebeu... Ou ela está bloqueada mesmo com a situação que está a ser discutida ou então bloqueou pelas outras razões e pode nem sequer estar a ouvir... Aqui já não digo nada!... (...) De qualquer maneira, tentei que o Roberto explicasse: *Ainda não conseguiste convencê-la a ela. Tenta organizar a frase toda, não suprimindo coisas. Tudo, diz tudo. Não é aos bocadinhos* [§38]. É porque ele às vezes fala assim aos bocadinhos... (...) Eu aqui, para já, estou nitidamente a tentar... Como é que eu hei-de dizer? Gerir a discussão... Pronto, que é importante o Roberto convencer a Júlia, ou seja, tem que apresentar os argumentos de forma a que ela os entenda, tem que procurar fazer isso... Ela tem o direito a perceber, não é? Tento que ele complete as frases, para que se perceba o que ele diz... (...) E que não é para mim que deve ser claro, é para os outros, principalmente para a Júlia que é quem está a procurar mais... (TST 42, pp. 15-6)

Em terceiro lugar, Anita preocupa-se com o tom do discurso. Em qualquer ocasião de discussão de ideias, quem expressa publicamente o seu pensamento, expondo-se a vê-lo contestado, fica numa situação de vulnerabilidade. Os riscos pessoais e sociais acrescem quando este pensamento se revela inadequado, como sabia ser o de Júlia. Podem agravar-se ainda mais, quando se é o único defensor de uma ideia que vem a ser posta de lado porque incorrecta. No caso do desacordo entre Júlia e os colegas, a situação era particularmente problemática devido às características particulares desta aluna e à situação que, na altura, se vivia na turma. Anita sabe que Júlia, quando as suas contribuições são postas em causa, "encara tudo isso como ataques à pessoa dela" (TST 42, p. 8). Sabe, também, que na aula em que o desacordo surge, as suas relações com os colegas não são as melhores:

> Ali naquela altura estava a passar-se qualquer coisa naquela turma. Apercebi-me porque a Júlia me contou. Tem a ver com umas confusões relacionadas com a mudança de horários. Muitos querem, a Júlia não quer... A Júlia além dos problemas que tem de não querer ficar atrás dos outros, e de retrair, ainda tinha mais esse problema. E os outros, mais competitivos, podiam-se aproveitar disso para o mínimo erro que ela desse. "Deixa lá que agora... estás aqui armada em 'coiso'..." Pelo menos ela sentiu assim e verbalizou por duas ou três vezes. (TST 42, pp. 7-8)

Apercebendo-se da estranheza de Renata e Cristina face à colega não entender porque é que 1/45 não é um contra-exemplo, ou seja, porque é que a posição que defende não é sustentável do ponto de vista matemático, Anita encoraja-as a ajudarem-na a compreender. No entanto, tenta sensibilizá-las para a importância de o fazerem com respeito e de um modo que não a faça sentir-se mal. Esta sensibilização era tanto mais importante porque uma destas alunas tem, a seu ver, uma forma de falar "um bocadinho mais aguda" (TST 42, p. 7), o que poderia contribuir, se não tivesse cuidado, para agravar os riscos de Júlia se vir a sentir desconfortável. Agindo deste modo, procura ensinar às alunas que na aula de Matemática há lugar para a crítica fundamentada de ideias, mas não para uma crítica pessoal aos seus autores. Procura, também, evitar que Júlia — uma aluna muito centrada em si própria, com muito receio do erro, mas que "teve uma pré-evolução" (TST 41, p. 4) em termos da sua participação no trabalho colectivo — regrida:

> Se elas, a Renata ou a Cristina, falassem assim com um tom mais "coiso", ainda era pior. E a Cristina, se tu repares, fala assim de uma maneira mais a disparar. (...) Por um lado, quis que a ajudassem a perceber mas, por outro lado, que não fosse em tom de crítica. Quando eu disse *Não sejam é crrr, crrrr…* é tenham cuidado com a forma como falam. (...) É criticar as ideias matematicamente. Matematicamente muito bem, mas não é criticar os outros em termos pessoais. A intenção, sem dúvida, foi esta. É criticar mas com respeito pelo outro. Não é que eles faltem ao respeito aos outros, mas faltam no sentido em que há determinadas maneiras de dizer as coisas que são mais... Eles não se insultam, mas... Como é que eu hei-de explicar isto? Isto sente-se, não se explica (risos). É no ritmo, no tom com que estão a falar... Não sei explicar... (risos) (...) Então, olha lá, quando estás a falar com uma pessoa em termos de discussão, há várias maneiras de falar. Com qualquer pessoa, quer sejam crianças, adolescentes ou adultos. E o tom influencia. Eu aqui chamei a atenção, principalmente, para o tom. Se não a Júlia regride. (TST 42, p. 8)

Renata "teve muito cuidado" (Anita, TST 41, p. 4) com o tom que usou para justificar porque é que 1/45 não refuta a conjectura. No entanto, de certo modo, esta justificação é ambígua na medida em que a conclusão que a aluna tira — "Logo 45 não dá" (§24) — tem pressuposta a informação de que este caso está a ser apresentado como contra-exemplo. Esta informação é importante para a resolução do desacordo do ponto de vista matemático e, assim, Anita tenta que ela seja articulada de modo a evitar a ambiguidade existente (§26, §28, §30, §32, §34, §36):

> Depois peço para explicar o que querem dizer com "não dá" (...) o 1/45 está a ser apresentado como um contra-exemplo e não o é porque não corresponde às fracções que ficam quando se tem em conta a conjectura. Portanto foi para clarificar o que se está a passar, para tornar visível o que está a ser discutido, o que se está a discutir. (TST 42, p. 15)

Por último, visando contrariar a tendência que alguns alunos têm para se centrar em si quando apresentam uma ideia mesmo que ela surja como reacção a contribuições dos colegas, Anita, ao longo do processo de resolução do desacordo e através de Roberto e Júlia, tenta ensinar que "é importante que a comunicação se faça olhos nos olhos" (TST 42, p. 16). Quando se dá conta que a explicação deste aluno sobre a exclusão de 1/45 pela conjectura lhe é endereçada, começa por, explicitamente, o incentivar a dirigir-se a Júlia (§37) e a focar nela o seu olhar (§40). Simultaneamente, tenta que a atenção desta aluna incida sobre o colega: "Digo *Júlia ouve, olha lá para ele um bocadinho* [§38], portanto, é está lá com a atenção a ele, não é a mim" (TST 42, p. 16). Através destes movimentos procura evidenciar que as explicações não lhe devem ser dirigidas tanto mais que quem "estava a trazer a situação à tona" era Júlia: "Claro que eu quando olho não posso olhar para todos, mas olho mais ou menos. Mas se era mesmo a Júlia que estava a trazer a situação à tona, o Roberto devia olhar para ela... " (TST 42, p. 16). É esta mesma intenção que está subjacente à estratégia que adopta quando constata que embora este aluno, ao prosseguir a explicação, faça alguns esforços para olhar para a colega, a sua tendência dominante é instituir a professora como o auditório prioritário a quem dirige as suas palavras:

> E depois ele continua com a tendência de falar para mim e eu "pumba" sento-me (risos). Escondi-me mesmo... (risos) Fui-me sentar ao pé da Júlia, da outra Júlia e escondi-me um bocadinho lá atrás no sentido de o obrigar para já a olhar naquela direcção e principalmente para a colega. Assim já não tem como olhar para mim. (TST 42, p. 17).

A estratégia de se sentar no lugar dos alunos, a expressão facial de Anita muito reveladora da intenção que lhe esteve subjacente e o humor que a acompanhou, contribuiu para criar um momento de boa disposição na turma que deu os seus frutos. Roberto começa a falar com Júlia e a partir de determinada altura esta aluna começa a contribuir com ideias que revelam ter compreendido porque é que a posição que assumia não era matematicamente sustentável. Além disso, permitem tornar mais claro, para outros colegas, que a conjectura não pode refutada pelo exemplo proposto. Anita considera o desacordo ultrapassado e a actividade da aula prossegue na direcção que estava a ser seguida no momento em que ele emergiu.

Em geral, ao longo das três aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*, o trabalho de Anita que mais directamente se relaciona com a emergência e resolução de desacordos, teve muitos aspectos em comum com o realizado no âmbito dos episódios *Estão a aparecer duas conjecturas muito parecidas* e *Todas as contradições são boas para esclarecer*. Por vezes, há maior brevidade na troca de ideias que permite ultrapassar o desacordo porque os argumentos apresentados convencem, rapidamente, o autor ou autores de uma das posições. Noutras ocasiões, não são visíveis movimentos relacionados, por exemplo, com o tom de voz, mas a discussão nunca enveredou por caminhos em que o modo de falar entre os alunos fosse não civilizado ou agressivo. Recorrente foi a preocupação de evidenciar, através do modo como agiu e procurou que os alunos agissem, que aula de Matemática há lugar para a divergência de posições, que quando esta surge importa instituí-la como objecto de análise colectiva, que a discussão se deve processar de um modo respeitoso, que é a turma, e não apenas a professora, quem é responsável pela apresentação de argumentos que contribuam para ultrapassar a divergência e que as decisões devem fundar-se em argumentações baseadas no raciocínio matemático e não na autoridade. Algumas destas ideias encontram eco no que Anita escreve ao reflectir sobre as três aulas que estão a ser objecto de análise relativamente a intervenções que fez:

> No sentido de que os alunos (...) tenham consciência dos desacordos que aparecem dando visibilidade a esses desacordos (...) evidenciar o autor de um dado argumento ou autores no caso de mais de uma posição (desacordos — alinhamento de posições) e defesa das mesmas com argumentos matematicamente válidos (aliás os argumentos apresentados são em geral dessa natureza). (DEA 25/02/03, p. 4)

Problemas experienciados

Incluo nesta subsecção a análise do desacordo 9 que considerei não visivelmente resolvido. As reflexões apresentadas por Anita revelam o que pode ter contribuído para nesta ocasião, contrariamente a qualquer das outras, não ter ficado claramente perceptível na turma qual dos pontos de vista divergentes é matematicamente válido.

Fui pelo implícito e não devia ter ido...

O desacordo (9) emerge no contexto da investigação da conjectura “c. pot.” visando averiguar se ela se mantém para fracções com numeradores diferentes de 1. O que está em confronto é se o caso 3/15 permite, ou não, refutá-la. Como referi a propósito do episódio *Apareceram-se aqui dois exemplos que estavam a tentar falsificar aquela conjectura*, esta e outras fracções são simplificadas e, a partir de determinado momento, a actividade da turma envereda pela reformulação desta conjectura.

Ao reflectir no grupo de pesquisa sobre estes momentos da aula, Rebeca expressa dúvidas sobre se os alunos terão ficado “conscientes” (TST 42, p. 48) de que “a conjectura, tal como estava, era falsa para todas as fracções que dão origem a dízimas finitas” (idem). Do seu ponto de vista, antes de se iniciar a fase de aperfeiçoamento teria sido importante fazer “um ponto de situação (...) para ficar bem visível que, tal como a conjectura estava formulada, sem se acrescentar nada, aqueles exemplos, refutavam a conjectura” (idem). Debruçando-se sobre as interacções que ocorreram no decurso do referido episódio, Anita considera que estas dúvidas são relevantes, tal como considera pertinente a possibilidade de recorrer a um ponto de situação para tornar transparente e destacar quais as consequências de não acrescentar a palavra "irredutível" ao enunciado da conjectura, informação que, do seu ponto de vista, esteve implícita nalgumas das intervenções que fez:

> Devia ter deixado explícito, devia... (...) Na altura, realmente, fui pelo implícito e não devia ter ido. Lá está. Neste caso foi. Teria sido uma boa opção ter ali feito um ponto da situação. Porque vou dizendo implicitamente essas coisas, mas o dizer só assim, não chega... (TST 42, pp. 49-50)

Na altura em que o episódio supramencionado surge, o tempo que resta da aula começa a ser pouco para ser produzida uma prova algébrica para a reformulação da conjectura "c. pot.", tal como Anita pretendia. Estava sobretudo preocupada em que a actividade da turma incidisse neste aspecto: "Eu acho que aqui estava mais preocupada com a ponte para o que vinha a seguir, com o aproveitar o que a Tita sugeriu. E esqueci-me do ponto de situação" (TST 42, p. 50). Além disso, não se deu conta, no momento, que existia alguma novidade nesta actividade: "Neste caso estava a partir para uma situação ligeiramente nova que era a reformulação da conjectura, mas na altura não pensei, se calhar, logo bem nisso" (idem, p. 51).

A conjugação destes aspectos contribuiu para que não lhe ocorresse a necessidade e importância de, tal como fez noutras ocasiões, apresentar um ponto de situação, apoiado nas ideias que tinham emergido na turma, que permitisse clarificar porque é que alguns dos exemplos analisados são contra-exemplos: "Parti [para a reformulação] e não fiz o ponto da situação. Devia ter feito" (TST 42, p. 51). Esta via seria uma possibilidade de resolver o desacordo sobre o papel que 3/15 desempenha quando o que está em causa é a avaliação da conjectura "c. pot.".

Ensinando para e através da constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático

Tendo por referência as fases de trabalho com toda a turma existentes ao longo das três aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas,* nesta secção apresento e analiso aspectos relativos ao papel dos alunos no discurso da aula, bem como a vertentes do trabalho de Anita, que mais directamente, se prendem com a constituição e manutenção de uma comunidade de discurso matemático.

Constituindo e mantendo uma comunidade de discurso matemático

O ambiente durante as três aulas em que decorreu a exploração da tarefa foi atravessado pela tranquilidade no trabalho e nas relações. Anita proporcionou aos alunos tempo para pensarem nas ideias apresentadas, aguardou que emergissem contribuições e face à sua inexistência ou laconismo esperou enquanto, simultaneamente, procurava encorajá-los a reflectirem. Mantém com os alunos uma relação calorosa, preocupada e empenhada e procura criar um ambiente livre de riscos em que se sintam confortáveis para partilharem as suas ideias. Gosta, como refere, de "brincar" (TST 41, p. 36) mas, nas suas palavras, "não gosto de muita confusão" (idem, p. 9). Esta expressão significa que embora valorize e deseje que os alunos participem nas actividades da aula, seja por iniciativa própria, seja na sequência de intervenções suas, não considera adequadas conversas marginais a esta actividade que possam interferir negativamente com as tarefas de ensino ou aprendizagem, casos em que, explicitamente, destaca que este não é o comportamento que pretende: "Eles não são muito conversadores, porque quando conversam eu também ralho" (idem).

O modo de estar e participar dos alunos no discurso

O envolvimento dos alunos no discurso foi variado, tal como foram diversificados o ritmo e a dinâmica de vários momentos das aulas. Houve muitas ocasiões em que sobretudo alguns elementos da turma participaram animadamente na conversação. Noutras, como foi o caso das partes iniciais da segunda e terceira aulas e da produção da prova da conjectura "c. pot. f. i.", o seu silêncio foi acentuado o que constituiu um factor de desagrado e de perturbação para Anita. Por vezes, para tentar inverter a situação, recorreu ao humor. Foi o caso, por exemplo, do início da aula de dia 16 leccionada às 8h 15m da manhã num dia em que a temperatura na sala era muito baixa e em que os alunos estavam, nitidamente, cheios de frio e sonolentos:

> E eu dou tempo a ver se eles falam e eles não falam e mando aquelas bocas a dizer que vou buscar café e que vou não sei quê, para ver se eles se tocam... Gosto de brincar com eles. Mas não... (TST 41, p. 9)

Apesar do baixo nível de participação que, por vezes, e com alguns elementos da turma existiu, não foram visíveis sinais de dispersão ou desinteresse em relação às actividades da aula. Os alunos não mantêm, entre si, conversas perturbadoras do trabalho, estão atentos ao que é escrito no quadro, fazem anotações nos seus cadernos e tentam corresponder às solicitações de Anita que, em nenhum momento, teve necessidade de fazer intervenções de carácter disciplinar. Além disso, não surgiu, entre si, qualquer tipo de conflito relacional ou troca de palavras menos amigável.

Uma fonte significativa das ideias matemáticas analisadas na turma nasceu nos alunos que, deste modo, constituíram um recurso substantivo para o trabalho de ensino. Por vezes, apresentaram contribuições por sua iniciativa, algumas das quais também influenciaram a direcção da aula. Por exemplo, a prova da conjectura de Maria foi feita na sequência de Cristina ter sugerido "podemos fazer todos para ver" (TA 16/01/03, p. 6). Foi também uma questão levantada por Tomás que possibilitou a clarificação do significado da utilização de variáveis numa expressão algébrica (episódio *Que era igual... E então qual é o problema?*). E foi a proposta apresentada por Roberto para lidar com o problema da transformação de $k/2^n x 5^m$ numa fracção decimal, que possibilitou a Anita ensinar à turma que há caminhos que, embora matematicamente válidos, podem não ser adequados porque não permitem atingir o objectivo pretendido (episódio *Aquilo resultou com aquele exemplo. E no geral?*).

O envolvimento dos alunos em processos de avaliação de pensamentos publicamente expressos foi frequente, ou seja, o padrão "interpelação pelo professor, resposta pelo(s) aluno(s), avaliação ou *feed-back* pelo professor" não se ajusta ao discurso que ocorreu nas aulas. Por exemplo, durante os momentos em que analisaram as conjecturas formuladas para fracções do tipo 1/n, emergiram vários desacordos porque elementos da turma, por iniciativa própria, apresentaram candidatos a contra-exemplos posteriormente contestados pelos colegas. Os pontos de vista foram apoiados por explicações e justificações apresentadas por alunos que nalguns casos foram sistematizadas e/ou subtilmente reformuladas por Anita. Os vários episódios relativos, por exemplo, à discussão da conjectura de Júlia são ilustrativos destes aspectos.

Por vezes, a avaliação de contribuições surge a partir de iniciativas da professora. Noutras ocasiões, emerge no âmbito de interacções que, espontaneamente, se geram entre alunos. Um exemplo ilustrativo desta última situação é o modo de agir de Cristina, Tita e Renata quando está em causa a posição a tomar face à conjectura de Maria (desacordo 4). As duas primeiras alunas reagem à afirmação apresentada por um colega — "Está certa mas incompleta" — (TA 16/01/03, p. 4) — defendendo a legitimidade de Maria enunciar esta conjectura pois, na perspectiva desta colega, ela "está certa, não está incompleta" (idem). Renata não põe em causa esta legitimidade. O que questiona é, por um lado, que a responsabilidade pela avaliação da conjectura fique restrita a quem a enunciou: "Mas não é para ela só, é para a turma toda (...) (para a Cristina) A nossa também estava incompleta, mas não é para nós, é para todos" (Renata, idem, pp. 4-5). Por outro lado, questiona que o "certo" seja o único critério a usar para avaliar a qualidade da descoberta feita: "Mas está incompleta, ela pensava que era só isto, mas há mais (...) Sôtora, o que está ali está bem, mas está errado quando ela não fala sobre coisas gerais" (idem). Comentando o diálogo, "muito interessante" (Anita, TST 41, p. 38), que ocorreu nestes momentos da aula entre estas alunas, Anita refere: “Para ela [Renata] é natural que as ideias que surgem sejam analisadas e discutidas por todos” (idem).

A direccionalidade das intervenções dos alunos não se restringiu à professora. Há alturas em que, autonomamente, endereçam aos colegas comentários ou questões sobre ideias que estes apresentam. Por exemplo, quando 1/23 é referido como um exemplo de uma fracção que origina uma dízima finita, Tita, que parece não encontrar grande sentido na justificação enunciada por alguns elementos da turma — falta um dígito no quociente que surge na calculadora —, questiona-os perguntando: “Então vocês já fizeram a conta à mão? Já vos deu resto zero?” (TA 20/01/03, p. 3). Do mesmo modo, quando Tomás, no âmbito da análise da conjectura de Roberto, apresenta 1/9 como contra-exemplo, este aluno, dirigindo-se ao colega, revela porque não o é. E também no momento em que as contribuições de Júlia parecem indiciar que esta conjectura é refutada por 1/45, vários colegas dirigem-se-lhe procurando mostrar-lhe que este caso é excluído pelo enunciado da conjectura (episódio *Todas as contradições são boas para esclarecer)*. Noutras ocasiões, a referida direccionalidade surge na sequência de intervenções de Anita que, explícita ou implicitamente, destaca que é importante que os alunos conversem entre si a propósito das contribuições que surgem. Por exemplo, quando Maria apresenta 8/15 como uma possibilidade de refutação da conjectura “c. pot.” e Cristina discorda de que o seja, dirigindo-se a esta aluna diz: “Fala com a Maria para ver se a convences de alguma coisa. (...) Olha para ela, a sério, para ver se ela se concentra em ti” (TA 20/01/03, pp. 8-9).

No seu conjunto, as ideias anteriormente apresentadas, em simultâneo com a observação da globalidade das aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*, revela que vários elementos da turma se sentem à-vontade para partilharem o seu pensamento mesmo que seja diferente do de outros, para colocarem questões sobre a actividade desenvolvida e para expressarem a sua incompreensão quando esta actividade não é inteligível para si. Anita, evocando o modo de estar dos alunos nas primeiras aulas gravadas no início do projecto, salienta que, presentemente, surgem mais contribuições espontâneas, que dialogam mais com os colegas e que há mudanças na forma como participam no discurso da aula: "Eu acho que eles estão diferentes e que estão a evoluir em termos de participação (...) estão mais independentes de mim" (TST 41, pp. 23-4). Este novo modo de participar no discurso da aula constitui, para si, um factor de satisfação. Esta ideia é apoiada pela reflexão que apresenta sobre a aula de dia 16 em que, comparativamente à última leccionada — com que, nas suas palavras, "não fiquei muito bem impressionada" (TST 42, p. 27) —, os alunos "argumentaram mais uns com os outros" (idem):

> Eu acho que gostei mais da maturação dos alunos. E da minha, atenção! Eu fico babosa com eles, mas também com a minha, não te esqueças disso. Mas claro, a gente quer é ver os alunos. Gostei da minha actuação, mas por causa deles, percebes? (...) A minha motivação são eles... (risos). (TST 42, p. 25)

Há, no entanto, um problema que, segundo Anita, é relevante quando se equaciona e reflecte sobre o nível de participação dos alunos da turma envolvida no projecto. Para eles não é indiferente a existência da câmara de registo em vídeo e/ou a minha presença na sala de aula:

> Eu tenho essa questão de eles não falarem. Ou aquilo é uma mistura de envergonhados com competitividade ou então eles também não estão assim muito à-vontade nas aulas gravadas. Eles perguntam-me: *Então quando é que a sôtora Ana vem*? (TST 41, p. 8)

Os alunos de Anita "lembram-se" (TST 41, p. 8) que as aulas são filmadas, contrariamente ao que acontece com os da colega: "Em termos do à-vontade não noto diferença nenhuma entre quando tu [Ana] lá estás ou não. (...) Eles não valorizam muito o facto de lá estares ou de estares a filmar" (Rebeca, TST 41, p. 9). Considera que "quando falam têm coisas importantes para dizer" (Anita, idem, p. 39), só que, na sua perspectiva, "não são como os alunos da Rebeca" (idem). São "tímidos e ainda são mais tímidos com a câmara..." (idem), além de que "o facto de estar lá outra pessoa nunca é igual" (idem, p.9). Estes factores têm, a seu ver, consequências que a perturbam e que se reflectem na postura e no envolvimento dos alunos: "Os meus nas aulas filmadas estão um bocadinho mais hirtos, mais direitinhos, mais caladinhos... (...) Por isso é que eu às vezes os pico e brinco com eles, faz-me nervos estarem tão direitinhos (risos)" (idem).

O modo de estar e aspectos do trabalho da professora

Reflectindo sobre as diferenças que considera existirem no papel desempenhado pelos alunos, Anita associa-as, por diversas vezes, ao papel que ela própria foi aprendendo a desempenhar e aos cuidados que foi tendo para não boicotar, sem se dar conta, o tipo de discurso matemático que valoriza e deseja para as suas aulas:

> Eu agora também tenho mais estratégias, de forma a envolvê-los, do que aquelas que tinha anteriormente, percebes? Agora é diferente. Tenho mais estratégias para os levar a discutir uns com os outros. Já sei movimentar-me melhor, digamos assim... (risos). (TST 41, pp. 23-4)

> Eu acho que estou mais hábil para aquilo que quero. Eu deixava-me mais ir, até... tudo... até o próprio ir ao lugar durante as discussões, repara. E não só. Estou mais hábil. Isso eu sei. Ganhei com as nossas conversas. Vocês têm-me ajudado a ganhar isso. A gente às vezes sozinha também não sabe... (...) Uma coisa é reflectir sozinha e outra completamente diferente é reflectir com companhia... (...) Isso então ainda é muito melhor [ter as gravações das aulas e as transcrições]. Isso é fundamental. Lembrarmo-nos do que fazemos exactamente e como o fazemos é difícil. (TST 41, p. 31)

Anita procurou, de uma forma sistemática, fazer surgir as ideias dos alunos e esteve "atenta às contribuições que aparecem para as rentabilizar" (DEA 25/02/03, p. 4), ou seja, preocupou-se em descortinar o significado do que era dito e onde ele se enraizava, não perdendo de vista os objectivos que orientavam, na altura, o seu modo de agir. A análise das fases de trabalho com toda a turma revela que, neste processo, surgiram vários padrões de interacção.

Há ocasiões em que alunos particulares conversam entre si a propósito das ideias que surgem ou em que se dirigem à professora. Noutras as suas mensagens são endereçadas, prioritariamente, à turma como aconteceu, por exemplo, quando Júlia explicou o significado da sua conjectura ou quando Roberto apresentou as descobertas relativas às regularidades existentes nas decomposições em factores primos dos denominadores das fracções que originam dízimas finitas. Anita, procurando inverter a tendência dos alunos se focarem em si própria quando apresentam contribuições, preocupou-se, nestas ocasiões, com a existência de contacto visual entre os interlocutores, com o tom do discurso e com o evitar a marginalização de outros elementos da turma. Esta preocupação transparece em vários dos episódios anteriormente analisados — nomeadamente em *Então, então... Vocês estavam a discutir o quê?* e *Todas as contradições são boas para esclarecer* — e também no que escreve a propósito de algumas intervenções que fez durante as aulas em análise:

> No sentido de que os alunos (...) se olhem entre si quando discutem entre si algum aspecto mais particular embora de forma a ser partilhado pela turma e a serem bem vindas contribuições de outros alunos (uma estratégia sentar-se no lugar do aluno) (...) e que as questões, comentários ou aspectos que complementem o que está a ser apresentado, dos outros alunos, se dirijam ao seu autor (recorre a estratégias como não fui eu que disse...). (DEA 25/02/03, p. 4)

Durante a prova da conjectura "c. pot. f. i." as interacções entre alunos tiveram uma expressão muito pouco significativa, embora Anita tenha tentado, por vezes, incentivá-las. Por exemplo, quando Renata refere não compreender porque Roberto multiplicou o denominador de $k/2^n x5^m$ por uma potência de base 2, incita-a a perguntar ao colega o porquê desta indicação (§18, episódio *Aquilo resultou com aquele exemplo. E no geral?*). Também quando este mesmo aluno, para fazer face à necessidade de representar $3/2^5 x5^3$ sob a forma de fracção decimal, sugere que se multiplique o denominador desta fracção por 5^2 e deixa o numerador inalterado, tenta que os colegas o ajudem a ultrapassar esta situação (§1, episódio *Mas dava-me tanto jeito ter ali aquilo...*).

Há também ocasiões em que as interacções se processam entre a professora e a turma ou entre a professora e alguns dos seus elementos a quem, particularmente, se dirige. Nestas alturas, Anita, para fazer emergir contribuições dos alunos, recorre a questões e a outro tipo de intervenções que alimentam a conversação e favorecem a emergência de ideias.

As questões que colocou assumiram vários formatos, visaram diversos objectivos e o que estava em causa não era um simples apoio ao seu próprio discurso ou um mero teste aos conhecimentos dos alunos. Algumas foram mais convergentes. Apelavam, por exemplo, à clarificação de palavras que usaram, à explicitação pública de posições sobre ideias em confronto ou a pequenas contribuições: "Então o que é que se passava com aquelas fracções? O que tivemos que lhes fazer" (§13, episódio *Apareceram-se aqui dois exemplos que estavam a tentar falsificar aquela conjectura)*. Outras questões foram mais abertas e divergentes. Visaram, em especial, averiguar a compreensão dos alunos sobre contribuições apresentadas, indagar fontes de dificuldades, obter justificações ou explicações ou incentivar o estabelecimento de conexões entre ideias discutidas e o que fundamentava as decisões. Neste formato mais aberto a que Anita recorre para fazer surgir ideias que não sejam da sua autoria, pode enquadrar-se o pedido de comentário que endereça frequentemente à turma na sequência de alguns dos seus elementos terem tornado público o que pensam.

Várias das questões colocadas por Anita tiveram um carácter provocador do pensamento. Por exemplo: "É uma dízima infinita *(escreve no quadro dízima infinita junto a 1/35)*. Isto tem alguma consequência, não tem, em relação ao que estamos a dizer?" (§8, episódio *Ficam ali, mesmo cortando os múltiplos de 15, alguns que não servem*). Ou então: "É essa coisa? *(aponta para* 5^2*)*. Como é que eu dou a volta àquela coisa que me dá tanto jeito ter em baixo?" (§18, episódio *Mas dava-me tanto jeito ter ali aquilo…*). Questões houve cujo objectivo prioritário parece ter sido o de gerar interacções. Por exemplo:

- "Então, a opinião ali da secção do lado direito acerca da primeira conjectura?" (TA13/01/03, p. 8);
- "Eu não estou cá. (pausa) Pede ajuda. Porque é que tu não pedes ajuda aos outros, Roberto? Hum?" (§14, episódio "E então o que é que acham do Roberto tem ali?", aula 16/01/03);
- "Então e agora?" (TA 20/01/03, p. 15).

Surgem também ocasiões em que as questões que Anita dirige à turma não são da sua autoria. Por exemplo, "E se for 10?" é uma repetição da que lhe foi endereçada por Tomás durante o processo de escrita da conjectura "c. pot." (§10, episódio *Que era igual... E então qual é o problema?*). Com pouca frequência as suas questões são afunilamentos de outras que previamente apresentou, estratégia que parece ser usada visando, sobretudo, desbloquear algumas situações de impasse: "Está bem. Mas porque é que aqui *(aponta para o expoente do 5^2)* é um 2 e não é um 4?" (§36, episódio *Aquilo resultou com aquele exemplo. E no geral?*).

Para fazer surgir novas ideias na turma ou aprofundar aspectos de outras já apresentadas, há vários momentos em que Anita "rediz o que foi dito" (DEA, 25/02/03, p. 4). Subjacentes às diversas estratégias discursivas contempladas no "redizer", estão várias preocupações que, no seu conjunto, contribuem para uma orquestração matematicamente produtiva das discussões. Por vezes, "aproveita (...) certos comentários dos alunos ou argumentos para os repetir exactamente como foram ditos tipo 'X disse isto... O que é que vocês acham'" (DEA, 25/02/03, p. 4). Isto é, recorre a relatos de contribuições que emergem — seguidos, ou não, de "o que é que vocês acham" ou outra expressão sinónima — procurando incentivar os elementos da turma que não são os seus autores a analisarem, seja a sua legitimidade matemática, seja a sua adequação para fazer face aos objectivos da conversação. Um destes casos surge aquando da produção da prova da conjectura "c. pot. f. i" no momento em que Anita, procurando fazer emergir ideias que permitam transformar $3/2^5x5^3$ numa fracção decimal, anima uma elocução de Maria, tentando que Cristina participe activamente no discurso: "Ela *(aponta para Maria)* acha que não pode porque têm expoentes diferentes. Tu... *(aponta para Cristina)*" (TA 20/01/03, p. 14). Outros exemplos de relatos surgem no episódio *Há sempre excepções, excepções, excepções... Não se podem achar assim as dízimas finitas...* e também nas ocasiões em que apresenta, no âmbito das discussões que ocorrem, pontos de situação.

Noutras alturas, Anita recorre à repetição ou reformulação das contribuições dos alunos visando, particularmente, que vão mais longe na explicação dos raciocínios — "Tomás: É múltiplo de 5. Anita: É múltiplo de 5 e…" (TA 16/01/03, pp. 7-8) —, destacá-las e/ou torná-las mais claras e precisas. Por exemplo, no âmbito da análise da conjectura de Roberto, Tomás diz "É falsa. O 9 dá dízima infinita" (TA 16/01/03, p. 11). Anita rediz esta intervenção reformulando-a ligeira mas significativamente e endereça a mensagem aos seus colegas: "O Tomás está a pôr a seguinte questão. É falsa porque 1/9 dá dízima infinita" (idem). Através deste movimento, nas suas palavras, "o que estou a procurar fazer é a dar evidência à questão do Tomás para os outros alunos pegarem nela" (TST 42, p. 4). Ao mesmo tempo, as alterações que introduz permitem tornar não ambígua a terminologia que ele usou — é 1/9 e não 9 que origina uma dízima finita — e explicitar o que, para Tomás, justifica a falsidade da conjectura ("porque") informação que estava pressuposta.

O tom de voz é um recurso útil a Anita no processo de orquestração das discussões que se desenvolvem na turma. Através dele procura, em particular, enfatizar ideias e controlar o aparecimento extemporâneo de contribuições que possam limitar as possibilidades de participação de alguns alunos. Por exemplo, quando Júlia, no âmbito da partilha de conjecturas, expressa dúvidas sobre se estaria certa a descoberta que fez, a professora enfatiza a palavra "conjectura" procurando, através desta via, ajudar a aluna a ultrapassar a sua insegurança e, simultaneamente, salientar que a certeza não é, neste contexto, um critério de avaliação adequado (§4, episódio *É uma conjectura, é uma conjectura!!!*). Na altura em que a turma se debruça sobre a avaliação da conjectura desta aluna e surgem, em simultâneo, dois candidatos a contra-exemplos um dos quais, de facto, a refuta e outro não, tenta que a discussão se centre apenas num destes candidatos destacando, através da entoação que usa, a expressão "só um" (§8, episódio *Estavam há bocado a falar no 10, mas o 10 é múltiplo de 5 e o 5 é primo*).

Um caso ilustrativo da utilização do tom de voz para controlar o andamento da discussão, surge no âmbito do episódio *Vamos então discutir o 3/15*. Contrariamente ao que fez nos dois exemplos que atrás apresentei, nesta ocasião, Anita expressou-se num tom de voz de tal modo baixo que apenas Tita e, eventualmente, um ou outro colega muito próximo, puderam escutar o que dizia: "Antes de tu dizeres isso, está bem?" (§1). A discussão sobre se 3/15 permitia, ou não, refutar a conjectura "c. pot." estava no início e era prematuro tornar pública a sugestão desta aluna pois constituía uma via para o aperfeiçoamento desta conjectura. A propósito deste tipo de intervenções, Anita, ao reflectir sobre o modo como procurou gerir as discussões que ocorreram ao longo da exploração da tarefa *À procura de dízimas finitas,* escreve que "quando se apercebe de que algum aluno vai apresentar argumentos muito avançados, relativamente ao ponto em que a discussão vai, faz sinal ao aluno para aguardar ou diz mesmo baixinho para aguardar" (DEA 25/02/03, p. 4).

A inteligibilidade do discurso da aula foi uma das preocupações que orientou o modo de agir de Anita. Tenta gerir as discussões de modo a que "não se sobreponham demasiado as intervenções a ponto de não se conseguir compreender o ponto de vista de cada aluno pelo geral da turma" (DEA 25/02/03, p. 4) e, quando considera necessário, "torna visível o que está em discussão" (idem). Tenta, também, que alunos "apresentem argumentações mais completas, não entrecortadas e que clarifiquem certas palavras que usam (o que é que queres dizer com...)" (idem). Procura, assim, que as suas explicações ou justificações sejam suficientemente detalhadas para ela própria e outros elementos da turma poderem entender os pontos de vista expressos e o que os fundamenta. Quando, a seu ver, as contribuições que surgem, pelo seu laconismo, obscurecem a clareza e dificultam a compreensão, intervém no sentido de mostrar que este modo de falar não é desejável na aula de Matemática, mesmo que não esteja em causa a perceptibilidade, para si própria, do que querem significar:

> Por exemplo aquela minha intervenção relacionada com a parcimónia de palavras tem a intenção de fazer passar a ideia de que valorizo respostas completas, de que não quero argumentos curtinhos, que não quero coisas do tipo *falta isto e não sei quê... 3, 7 não sei quantos*. É para mostrar que quero respostas que sejam claras para todos. É uma norma que estou a tentar fazer passar, que estou a explicitar. Eu até percebia o que os alunos estavam a dizer, mas disse *Eu cá não percebo nada* [idem] e acrescentei *E eu que adivinhe! E os outros que adivinhem tudo o que querem dizer (risos)* [idem]. (TST 41, p. 38)

A expressão audível do pensamento matemático, a importância da escuta, o alargamento de discussões que ocorrem entre alguns elementos da turma e o tentar que os alunos também assumam responsabilidades pela aprendizagem dos colegas, foram outras intenções que orientaram o modo de agir de Anita e que transparecem não só em vários dos episódios anteriormente analisados, mas também noutros momentos das aulas. O episódio *Vamos pegar mais pessoas* é um dos momentos que revela a simultaneidade destas intenções. Paralelamente, contribuiu para elucidar de que modo usou os acontecimentos para negociar normas de acção e interacção que tenta que regulem a actividade da aula, ao mesmo tempo que procurava promover o envolvimento dos alunos no discurso e descentrar de si própria esta actividade.

Vamos pegar mais pessoas

1. Anita: Vamos ver. Vamos pegar mais pessoas. O que está a dizer a Renata, Tomás?
2. Tomás: Não consegui ouvir.
3. Anita: Ela falou… Por acaso até falou numa voz mais ou menos audível desta vez. Vocês têm que ouvir...
4. Tomás: Estava concentrado naquilo *(aponta para a conjectura projectada)*.
5. Anita: Pois, mas quando ela está a falar, estamos a tentar fazer uma discussão, portanto, é para ouvir.

O Roberto diz que estava "outro" na sua conjectura (...)

6. Renata: O 5 também é um número ímpar, logo quando ele fala nos múltiplos de 2 e de 5 o 5 não ia estar incluído. Ficavam só os múltiplos de 2.
7. Anita: Vitória, estás a ouvir?
8. Vitória: Não estou a perceber.
9. Anita: Então, vamos lá ver. A Vitória está a dizer que não percebe. Tentem lá explicar a ela, vá.

(TA 16/01/03, pp. 10-1)

Nas palavras de Anita, através da primeira intervenção, "alargo à turma, que é para os outros participarem na discussão" (TST 42, p. 3). Em seguida, procura ensinar os alunos, através de Renata e Tomás, a importância da escuta e das ideias serem apresentadas de forma a que possam ser ouvidas:

> Tem a ver com normas, com a necessidade de ouvir o que os outros dizem. (...) E quando o Tomás diz que estava concentrado eu repito, digo que é para ouvir quando estamos numa discussão. Se estamos a discutir é para tentar ouvir, não é para estar concentrado noutras coisas. (...) Também estou a reconhecer que a Renata até falou num tom de voz mais ou menos audível e, portanto, estou a valorizar este aspecto. (TST 42, pp. 2-3).

A expressão audível, pela globalidade da turma, do pensamento de cada um, é um aspecto da comunicação na aula que Anita considera fundamental para todos poderem pensar sobre as ideias que vão surgindo e interagir a propósito dessas ideias. Este aspecto foi objecto de um intenso e persistente investimento da sua parte desde o início do projecto. No caso de Renata, este investimento parece ter dado os seus frutos: "E lembras-te que esta miúda [Renata] era muito envergonhadinha, ao princípio? Falava muito baixiiiiinho... Mudou" (TST 41, p. 38). No entanto, a expressão audível é um problema não resolvido e agravado pelas "lindas, maravilhosas... (risos)" (TST 42, p. 59, falando ironicamente) condições acústicas das salas em decorrem as aulas de Matemática. Este problema continua a exigir a Anita a imaginação de estratégias que permitam inflectir a tendência que, em particular, alguns alunos têm para falar num tom de voz bastante baixo:

> Não pude mudá-lo [Roberto] lá para trás, porque senão o rapaz morria... (risos). Teve que ser para o lado, mas foi boa ideia. Fala mais alto. E expliquei-lhe porque o fazia. E não foi só o Roberto que mudei de lugar. Mudei mais alguns. Foi boa ideia. (TST 41, p. 24)

Através da última intervenção (§9) incluída no episódio *Vamos pegar mais pessoas*, Anita está "a passar a bola à turma" (TST 41, p. 40), procurando mostrar aos alunos que "todos devem perceber e que quem deve explicar é quem proferiu as afirmações" (TST 42, p. 3). O significado da expressão "passar a bola à turma", que utiliza com muita frequência, pode ser intuído pela análise do que diz quando, no âmbito da quarta entrevista, a interpelo, directamente, sobre este significado:

> "Passar a bola" é quando te perguntam qualquer coisa, chutar a pergunta para outra pessoa qualquer. Isto se for uma pergunta, por exemplo. No fundo é: se algo vem a mim, eu faço de reflector, passo de mim para outro. (E4, p. 9)

Evocando os primeiros tempos do projecto, Anita refere que "de início escorregava mais em ser eu a ir logo à bola do que agora" (TST 41, p. 40), ou seja, perante dúvidas ou dificuldades dos alunos, assumia, fundamentalmente, ela própria o papel de facilitar a compreensão independentemente da autoria das ideias apresentadas. O facto de considerar que, presentemente, é capaz de uma melhor gestão do discurso da aula no sentido de conseguir que os alunos se envolvam, com mais frequência, na apresentação, explicação e justificação das suas ideias, na análise crítica das dos colegas e na tomada de decisões matematicamente fundamentadas sobre contribuições que surgem, prende-se, também, com o controle que aprendeu a exercer sobre o seu próprio discurso:

> Eu acho que lucrei com as nossas interacções porque às vezes, a gente sem querer escorrega... Acho que agora tenho outras maneiras de conseguir gerir o discurso (...) Antes agarrava muito [a bola]... Mal eles "coiso" lá ia eu... Controlo mais essa parte e consigo gerir melhor. (TST 41, pp. 40-1).

A ideia de "passar a bola" à turma prende-se com a partilha do controle do discurso da aula e do poder decisório relativo à validação ou invalidação das ideias que emergem. A preocupação de Anita com a partilha deste poder com os alunos sobressai, por exemplo, quando se analisam os processos de resolução dos desacordos. Sobressai, também, quando se tem em conta a expressão "submeter ao escrutínio da turma" que utiliza amiúde, quer para comentar intervenções que fez no decurso das discussões que ocorreram, quer quando escreve a propósito do seu papel nas aulas em análise: "Coloca ao escrutínio da turma situações para que os alunos assumam uma posição e a defendam/se responsabilizem pelos seus pontos de vista" (DEA 25/02/03, p. 4). Sobressai, ainda, na avaliação que faz de uma das suas questões considerada como não sendo a mais adequada:

> Há aqui uma coisa que não devia ter dito. Eu disse assim: *Está bem, mas isso é já a explicação do raciocínio todo. Mas agora ligando ali com o contra-exemplo, porque é que esta serve?* Não devia ter dito *porque é que esta serve*. Assim já estou a dizer que serve, já estou a influenciar a resposta. Devia só ter dito: Será? Ou outra coisa qualquer do estilo. Foi sem querer... (TST 41, p. 39)

A liderança da aula foi também partilhada com os alunos e Anita preocupou-se em não usurpar o poder que detinham. Esta ideia é apoiada pela explicação que apresenta para uma das suas intervenções quando, no âmbito da análise da conjectura de Roberto, Júlia defende que o caso 1/45 não é excluído pelo enunciado da conjectura tendo subjacente a ideia que a refuta e Renata se dispõe a explicar-lhe porque é que esta posição não é matematicamente adequada:

> Quando digo *Pede ao Roberto, se não às tantas...* Tenho aqui assinalado que é importante. É porque ela [Renata] pede para falar e é o Roberto que está no quadro. (...) a Renata está a querer explicar mas entretanto eu lembrei-me que tenho um aluno que estava a gerir também, não é? E apesar de dizer à Renata para não ser *"crrr, crrr"*, pensei que tenho que respeitar o aluno que está no quadro, que estava a gerir também... Tenho aqui um "olhinho" que quer dizer que isto é importante. (...) Eu pensei assim: Dou autorização, mas espera aí, se ele está a gerir também, vou-lhe dar mesmo o enfoque a ele, não é? (TST 42, pp. 14-5)

Tal como aconteceu no episódio *Vamos pegar mais pessoas*, em várias outras ocasiões, nas palavras de Anita, "tentei potenciar os acontecimentos da aula para as fazer passar as normas" (TST 42, p. 13). As normas que refere são normas sociais e sociomatemáticas, no sentido de Cobb, Yackel, e Wood (documento 3, tabela 7, capítulo V), reguladoras da actividade matemática da aula e que, segundo estes autores, contribuem para e sustentam culturas de sala de aula caracterizadas pela explicação, justificação e argumentação.

A análise de vários dos episódios anteriormente apresentados, bem como das reflexões a eles associadas, deixa transparecer que no que se prende com as aulas em análise, os esforços de Anita incidiram na negociação de normas sociais relacionadas com a importância da escuta, da expressão audível, da explicação clara e detalhada do pensamento, da apresentação de argumentos convincentes e com sentido para todos e não apenas para o professor, com a direccionalidade das mensagens, com o valor do confronto de ideias enquanto meio de compreensão, com a responsabilização dos alunos pela avaliação das contribuições que surgem e pela aprendizagem dos colegas e com o tom a usar para rebater ideias apresentadas. Os comentários que tece às suas intervenções deixam transparecer que subjacente a várias, esteve o propósito intencional de ajudar os alunos a compreenderem qual o papel que espera que desempenhem no discurso da aula:

> Eu digo para o Roberto: *Vá Roberto... Vê lá se alguém… Se estão convencidos, se não estão... Vá...* E depois logo a seguir: *Não olhes para mim, porque eles é que têm que estar convencidos. Por exemplo, o Tomás não te está a ligar nenhuma, está a olhar para a luva…* Isto tem a ver com as normas. É para

> mostrar que os alunos têm que ver se o que os outros dizem os convencem e quem apresenta uma ideia tem que tentar convencer os colegas e não só a professora... E também estou a responsabilizá-los a eles por isso. (TST 42, p. 4)

> A importância de explicar as coisas para convencer os outros, de explicar com clareza e de quando se está a explicar uma coisa a uma pessoa e a argumentar com uma pessoa é para ela que se deve olhar e não é para mim. São normas e também são opções, percebes? Aliás são todas opções. Mas estas são importantes, digamos assim. (...) São escolhas conscientes. (TST 42, p. 12)

> E eu digo-lhe *Eu não ouvi nada. Disseste alguma coisa? Só em pensamento… Vê lá ela não ouviu!…* Isto tem a ver com as normas...É para ele falar em voz alta, para mostrar que tem que se fazer ouvir. Ele falou baixinho. E depois vê lá o que a Cristina disse logo: *Alto, Roberto, alto…* (risos). (TST 42, p. 44)

A par destes comentários surgiram, ao longo das sessões de reflexão focadas no trabalho com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, vários outros do mesmo tipo que, em conjugação, com a análise dos movimentos de ensino, deixa transparecer que Anita contribui para o processo de negociação de normas sociais através, nomeadamente de duas vias ambas visíveis no episódio *"Vamos pegar mais pessoa"* e nos comentários atrás incluídos.

Uma via que actua pela positiva, ou seja, que revela as expectativas que tem sobre o discurso da aula e os comportamentos que são aceitáveis e desejados através do que solicita aos alunos que façam ou do destaque que dá a modos de agir que considera adequados. Renata expressou-se de forma passível de ser ouvida e Anita procurou destacar este aspecto. Vitória não compreendeu o que tinha sido dito e a professora, através do modo como agiu, procurou ensinar os alunos que "são responsáveis pelas ideias que apresentam e por ajudarem os outros a perceberem" (TST 42, p. 3). Os argumentos devem ser apresentados de modo a serem convincentes para todos e Anita, através das mensagens que dirigiu a Roberto (primeiro comentário), procurou evidenciar que todos têm responsabilidades neste processo. O professor pode cuidar de aspectos relacionados com esta via ao preparar as aulas. Por exemplo, um dos objectivos de Anita era que os alunos "argumentassem em relação às conjecturas que formulassem" (TST 41, p. 2). É plausível considerar que antes das aulas tenha reflectido sobre modos de agir próprios possibilitadores de ir ao encontro deste objectivo e consistentes com as normas valorizadas. Os seus vários pedidos de explicação, justificação, comentário ou situações em que submete uma ideia ao escrutínio da turma, permitem apoiar esta hipótese.

A segunda via actua pela negativa, ou seja, vai em sentido contrário do que os alunos fazem ou dizem e surge quando transgridem as referidas normas. Anita não consegue prever se nem quando haverá transgressões. O que procura fazer é estar atenta e interpretar os acontecimentos para, apoiando-se neles, ensinar aos alunos como e para quem devem falar na aula de Matemática. Por exemplo, a sua intervenção sobre a "parcimónia de palavras" é feita numa altura em que as contribuições, porque muito lacónicas, não desvelam os raciocínios subjacentes. Tomás apenas enuncia a impossibilidade de escutar Renata na sequência de ter sido interpelado pela professora e, além disso, justifica esta impossibilidade dizendo que estava "concentrado" em algo diferente do que estava a ser analisado. Assim, Anita procurou mostrar à turma que, no decurso de uma discussão, este modo de estar não é desejável. Durante o episódio *Todas as contradições são boas para esclarecer*, Roberto, ao explicar a Júlia porque é que 1/45 não pode ser um contra-exemplo para a sua conjectura, dirige frequentemente as suas mensagens à professora e noutra ocasião "falou baixinho", ou seja, a sua contribuição não podia ser ouvida pela globalidade da turma. Anita, através do que disse e do que fez, procurou destacar que não é deste modo que a comunicação se deve processar na aula de Matemática.

O processo de negociação de normas parece ser também alimentado por cuidados que Anita aprendeu a ter relativamente à forma como, em particular, se desloca na sala nas alturas em que procura orquestrar uma discussão colectiva. Ao debruçar-se sobre as aulas em análise, apenas faz uma breve referência a este aspecto: "Eu deixava-me mais ir, até... tudo... até o próprio ir ao lugar durante as discussões, repara. E não só. Estou mais hábil" (TST 41, p. 31). Sessões de trabalho anteriores às destinadas à reflexão sobre a tarefa das dízimas, contribuíram para que tomasse consciência de que ao ir aos lugares dos alunos durante as discussões, nas suas palavras, "acabo por contrariar que têm que falar em voz alta e para todos, que não podem falar só para mim" (TST 39, p. 15, 23/11/02). Esta tomada de consciência ajudou-a a não "estragar" (E3, p. 42) o que valoriza relativamente ao papel dos alunos no discurso da aula e contribuiu para uma evolução deste papel "sendo, assim, possível uma interacção entre os alunos à volta de ideias comuns" (idem, p. 41)[67].

Problemas experienciados

Para mim a questão da participação influencia tudo logo

Quando prepara aulas pensando no envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, uma das maiores preocupações de Anita é "tentar ter perguntas para os ajudar a avançar" (TST 41, p. 8) e uma das maiores dificuldades que prevê "é pensar que os alunos podem não falar" (idem, p. 5). Para fazer face a esta dificuldade, nas suas palavras, "tento pensar que tenho que lhes colocar determinadas questões, provocá-los" (idem, p. 6). Considera, no entanto, que no decurso da acção há alturas em que não encontra a melhor forma de conseguir que os alunos participem no discurso da aula: "Tento provocá-los, mas às vezes não os consigo provocar muito bem" (idem). A ausência de participação constitui, para a professora, não só uma fonte de dificuldades, mas também um forte factor de perturbação, ideia que, recorrentemente, exprime quando se debruça sobre alguns dos momentos das aulas em que foi explorada a tarefa *À procura de dízimas finitas*:

> As minhas maiores dificuldades no início da aula eram eles não dizerem nada. O único recurso que consegui arranjar foi o do café. Pode não resultar mas foi o que consegui arranjar (risos). Gosto de brincar. Mas foram dificuldades. Lanço a provocação à Júlia e ela não fala. Parece-me que o Roberto quer falar e eu aproveito logo e digo-lhe: *Diz Roberto, estás a querer falar. Fala!* (TST 41, p. 36)
>
> Dificuldade terrível: Iniciar a participação [aula de 20/01/03]. Depois outra dificuldade foi a prova em si mesmo. (...) Mas para mim a questão da participação influencia tudo logo. Quando não consigo que eles comecem a participar, quando eles não pegam, fica tudo de "pernas para o ar" (risos). Isto é verdade, a sério! Fico perturbada, mesmo!... Há um efeito em mim... (risos)

[67] Fundamentarei esta ideia em *Cuidando do discurso da aula*, capítulo VIII.

Um dos principais recursos que Anita utilizou para incentivar a participação dos alunos, tanto nas fases iniciais da segunda e terceira aulas, como durante o processo de prova da conjectura "c. pot. f. i.", foi o tempo. Ou seja, perante a inexistência contribuições ou face a ideias pouco prometedoras enquanto apoio para o desenvolvimento do trabalho de ensino, aguardou, entrelaçando a espera com intervenções que, numa primeira fase, se destinaram, sobretudo, a incitar a reflexão ou o envolvimento dos alunos. A apresentação de ideias substantivas para o progresso da actividade da aula — o que designa por "dicas" ou "pistas" — foi reservada para uma segunda fase, isto é, para os momentos em que, nas suas palavras, "vê que os alunos não avançam e perde a esperança... de que o consigam sós" (DEA 25/02/03, p. 4). Nas aulas em análise, Anita utilizou a palavra "dica" ou "pista" para nomear alguns dos seus movimentos, quase exclusivamente no âmbito da produção da prova da conjectura "c. pot. f. i.".

O tempo dedicado à espera, do ponto de vista de Anita, nem sempre é um desperdício, pois como aconteceu perto do início das aulas de 16/1 e 20/1, mesmo na ausência de "dicas" começam a emergir na turma contribuições da autoria dos alunos que possibilitaram o progresso da actividade:

> Independentemente de outros momentos em que poderia ter rentabilizado melhor o tempo, há sempre um primeiro impasse... Primeiro que eu consiga pô-los a falar é um problema... (...) Primeiro, quando eles não falam, dá-me logo vontade de começar a disparar, mas aguento, porque acho que é importante eles falarem e eles hão-de começar. E eles, às vezes, acabam por pegar... Agora até estão melhores. (TST 41, p. 33)

Numa turma com as características da sua, saber esperar pode, a seu ver, "levar também os alunos a terem que vencer as barreiras..." (E3, p. 11), ou seja, o silêncio do professor pode, em certas circunstâncias, ser uma arma para combater o silêncio dos alunos:

> E agora isto, se calhar, tem de se ligar com a evolução toda (...) Vês que ao princípio eles não falavam. O saber esperar também pode ter contribuído um bocadinho para que… *vocês vão falar, não vou eu fazer mais nada, vocês falam!* (risos). Percebes? (...) *Portanto, bebam café, saltem, brinquem, façam o que quiserem, mas falem...* (risos) (...) Isso também pode ter contribuído um bocadinho, não sei, para eles deixarem de ser tão caladinhos. (E3, pp. 11-2)

Em termos do desenvolvimento da actividade na aula, "o ideal era serem eles a fazerem as coisas por eles... eles dizerem e eu apanhava..." (TST 42, p. 63). Anita sabe "que não pode ser sempre assim", mas desejava que o fosse: "Eu gostava, gostava! (...) Isso era o ideal..." (idem). Neste modelo, a espera parece funcionar como uma estratégia que lhe permite lidar com o problema da ausência ou fragilidade de contribuições dos alunos. No entanto, esta estratégia adoptada para fazer face a um problema, transforma-se, ela própria, num problema para Anita. Esta ideia encontra eco em várias das reflexões que apresenta quando, no grupo de pesquisa, nos debruçámos sobre as suas aulas em análise. Por exemplo, referindo-se, em geral, à gestão do currículo refere: "Agora eu gostava de conseguir arranjar uma maneira de andar mais depressa... Isto é um dos meus maiores *stresses*" (TST 41, p. 33). Também ao debruçar-se, em particular, sobre as consequências da via que escolheu seguir durante o processo de prova da conjectura "c. pot. f. i." — "Só depois de ter tentado muito tempo e de ver que os alunos não avançavam é que dava as dicas" (TST 42, p. 68) — salienta que esta opção não foi a mais adequada: "Depois acaba por ser uma má opção, mas então!... (risos)" (idem). Conduziu a que a mobilização dos alunos decrescesse e que fossem remetidos para plano secundário objectivos que considera importantes e que tinha estabelecido para a aula: "Perdi tempo e eles se calhar esmoreceram e depois não fiz o resto" (idem p. 64).

Para Anita "nem sempre compensam" (E3, p. 11) as pausas que faz "que têm a ver com as expectativas que tenho em relação aos alunos responderem" (idem). Ao reflectir por escrito sobre as aulas focadas na exploração da tarefa *À procura de dízimas finitas*, inclui, sob a designação "dilemas", o que designa por "gestão de possibilidades que aparecem, que pensamos que podem aparecer e objectivos visados (dar mais tempo quando não avançam logo ou não, (...))" (DEA 25/02/03, p. 4). Procurando imaginar possibilidades de acção futura para lidar com este dilema, sublinha que uma das estratégias possíveis para quebrar o silêncio que, às vezes, caracteriza as fases iniciais das suas aulas é o "levar algo desafiador para o arranque" (DEA 25/02/03, p. 4). Quanto às situações em que os alunos se deparam com dificuldades, como foi o caso da prova da conjectura "c. pot. f. i.", os principais desafios parecem prender-se (a) com o controle das próprias expectativas para estas não a impedirem de se dar conta de que pode ser necessário desempenhar um papel que vai para além da regulação da actividade que se desenvolve e (b) com o encontrar um equilíbrio entre o tempo que concede às discussões e os objectivos que visa:

> Ponderar mais os tempos que por vezes concedo à "discussão", ou ao que pretendia que fosse uma discussão, quando os alunos por dificuldade — devido a maior abstracção... (caso da última aula) — não apresentam ideias/sugestões que possa rentabilizar para as poder discutir. Fico a pensar se por acaso tivesse dado nem que fosse 2 minutos para pensarem será que não tinham surgido algumas ideias? Já não tinha muito tempo de aula... Se calhar não avançavam sem as sugestões, mas se tivesse na altura mais tempo podia ter tentado. Controlar mais as minhas expectativas. Eu na altura pretendia que me apresentassem alguma ideia para discutirem na turma e a partir daí que utilizassem argumentos matemáticos de forma a justificarem essa ideia ou a recusá-la e a partir daí promover a argumentação. Devia ter dado as sugestões que acabei por dar mais cedo, uma vez que tinha outros objectivos importantes para essa aula e os alunos não estavam a conseguir. (DEA, 25/02/03, p. 3)

Foi o sentido de oportunidade que, se calhar, falhou...

A análise do desacordo considerado não visivelmente resolvido (9) desencadeou, no grupo de pesquisa, uma troca de ideias focada no papel dos pontos de situação no decurso de uma discussão que contribuiu para reforçar a importância destes recursos. Simultaneamente, permitiu revelar questões com que, do ponto de vista de Anita, o professor se confronta quando pretende que sejam feitos adequadamente e no momento apropriado.

Na sua opinião, "quando há muita argumentação, muita interacção, convém fazer balançozinhos" (TST 42, p. 51). Estes contribuem para, no meio da multiplicidade de contribuições que emergem, haver um fio condutor que facilita a compreensão da actividade em desenvolvimento e seu propósito e ajuda os alunos a não se dispersarem: "Se não eles perdem-se" (idem).

Só que os balanços "têm que se apoiar no que é dito na aula" (TST 42, p. 51). Como não se pode antever o que os alunos "vão dizer, nem como, nem quando" (idem), há que "saber decidir na hora" (idem), ou seja, ser capaz de identificar, no decurso da acção, quais os momentos em que é relevante fazê-los tendo em conta os objectivos que, na altura, se visam e a actividade já desenvolvida: "Temos que pegar nos exemplos que os alunos apresentam, no que eles fizeram, no que eles disseram, temos que ter em conta tudo isso..." (idem, p. 52). Por exemplo, quando Anita encaminhou a actividade dos alunos no sentido da reformulação da conjectura "c. pot." sem antes ter deixado claro que alguns dos exemplos discutidos refutavam esta conjectura, nas suas palavras, "escapou-me um desses balanços" (idem, p. 51). Nessa altura, "foi o sentido de oportunidade que, se calhar, falhou... O problema foi esse (idem).

Tendo identificado este problema, Anita preocupa-se em identificar aspectos que a ajudem a não deixar "escapar" ocasiões em que é fundamental a existência dos referidos balanços:

> Se a gente não pensou antes e ali, conscientemente, não pensa vou mudar agora para uma situação nova... (...) É estar muito atenta e assim que vir que vou fazer qualquer coisa de novo, fazer um ponto da situação sobre o que se passou anteriormente sobretudo se a discussão for mais longa. (TST 42, p. 51).

> Em situações de argumentação longa entre alunos, quando se muda substancialmente de discussão de um dado assunto para outro e em situações em que os alunos apresentem maior dificuldade devo fazer balanços do que foi discutido até aí e marcar bem que vou mudar de "assunto". Fiz uma ou outra vez esse balanço mas seria oportuno fazê-lo mais vezes em pontos cruciais. (DEA, 25/02/03, p. 3)

Todas estas ideias revelam que fazer, no decurso de uma discussão, balanços oportunos e substancialmente significativos é uma actividade muito exigente para o professor. Implica que tenha um conhecimento prévio da sua importância, que tenha uma atenção permanente e abrangente que lhe permita considerar tudo o que já aconteceu e o que pretende que venha a acontecer, que seja capaz de improvisar, na altura, tendo em conta o que disse e o que ouviu e que tenha sentido de oportunidade que lhe permita identificar a sua necessidade. Implica, também, que quando a prossecução da actividade envolve novidade — situação em que esses balanços têm uma relevância acrescida sobretudo em discussões longas ou naquelas em que os alunos se confrontam com maiores dificuldades — tenha consciência, no decurso da sua acção, da própria existência desta novidade e da mudança que ela acarreta.

Há alguns alunos que dificilmente falam

A participação de todos os alunos, e não apenas de alguns, nas discussões que ocorrem nas aulas e, por esta via, a possibilidade de todos se envolverem em actividades de argumentação matemática no âmbito de conversações desenvolvidas conjuntamente com os seus pares e/ou com a professora, é um problema que preocupa Anita, tal como preocupa a colega, e que ambas consideram não resolvido: "Mas há alguns alunos que dificilmente falam. O ideal era que falassem todos" (TST 42, p. 9). Esta questão, que surge por minha iniciativa no âmbito da reflexão sobre as aulas em análise, originou uma troca de ideias que fez emergir problemas com que, na perspectiva de Anita, o professor se confronta quando pretende promover um discurso argumentativo na aula de Matemática e também estratégias possíveis para diminuir o silêncio de vozes que raramente se ouvem.

A pouca familiaridade dos alunos com um tipo de trabalho na aula propício à aprendizagem da argumentação matemática é, na perspectiva de Anita, um dos problemas com que o professor se depara e que não é fácil de ultrapassar rápida nem isoladamente. A seu ver, "a competência argumentativa é uma competência transversal... Mas os alunos não estão nada habituados a este tipo de coisas..." (TST 42, p. 11). Nesta situação, os professores não estão isentos de responsabilidades: "Podemos não ser suficientemente persistentes, se calhar... às vezes também não sabemos como fazer... ou somos só um dos vários professores do conselho de turma... basta isso" (idem). O desenvolvimento da referida competência poderia ser facilitado pela existência de uma atitude concertada entre todos os docentes de uma mesma turma: "Todos deviam ter a mesma atitude... Facilitava o trabalho" (idem). Esta concertação é tanto mais relevante porque, segundo Anita, criar condições para os alunos participarem em práticas argumentativas passa, também, por conseguir que alterem alguns dos seus hábitos e esta mudança é difícil de conseguir. Práticas escolares com determinadas características ou a vivência em culturas familiares em que há elementos de referência cujo ensino da Matemática foi outro, vão em sentido contrário, por exemplo, à valorização dos processos justificativos:

> É a tal coisa dos hábitos que os alunos têm e que é difícil mudar... (...) Muitas vezes os alunos valorizam outro tipo de coisas, não valorizam as justificações, só querem fazer outras coisas, os próprios pais também não valorizam porque tiveram outro ensino... (TST 42, p. 10)

Através da própria experiência e da troca de impressões com colegas, Anita sente que quando o professor tenta contrariar os referidos hábitos dos alunos e trabalhar no sentido de os envolver em actividades de argumentação matemática, eles "não agarram e parece que até estranham" (TST 42, p. 10). Lidar com esta estranheza, do seu ponto de vista, não é simples, sobretudo se não existir, contrariamente ao que aconteceu consigo, um contexto de trabalho em equipa que possa proporcionar apoio e oportunidades de reflexão sobre o que se vai tentando fazer:

> Ela [uma colega] diz que quando tenta fazer este tipo de coisas sozinha... Eu também senti isso. Eu por acaso, tenho o vosso apoio, a gente trabalha em conjunto e acho que isso é óptimo... Como é que eu hei-de dizer? Não me sei expressar... Eu acho que trabalhar em equipa ajuda, ajuda a reflectir, sentimo-nos apoiadas... (TST 42, p. 10)

Equacionando possibilidades de acção futura para incentivar a participação dos alunos cuja voz raramente está presente no discurso da aula, Anita indica que uma possibilidade é "colocar perguntas directamente a esses alunos" (TST 42, p. 10). Um risco que daqui advém é a necessidade de um grande investimento de tempo que pode não dar frutos mas que, mesmo assim, vale a pena correr: "Mas corre-se o risco de nunca abrirem a boca e depois desperdiças, não é? Leva-se um tempo infinito. (...) Mas é assim, obviamente que uma pessoa não deve desistir, deve ir tentando sempre" (TST 42, p. 10). Na sua perspectiva, esta possibilidade pode ser adequada para alguns dos seus alunos que, espontaneamente, pouco participam. No entanto, pode não ser a melhor para outros devido ao seu modo de ser: "Na minha turma a maior parte dos mais calados são bastante tímidos" (DEA, 25/02/03, p. 4). A timidez de alguns leva à inibição quando confrontados com uma interpelação directa: "Interrogá-los directamente parece inibir esses alunos" (idem).

"Talvez tentar que sejam porta-vozes de um trabalho de grupo" (idem) pois assim "talvez se sintam mais seguros e a partir daí (...) defendam o que apresentam" (idem) é, a seu ver, uma alternativa possível e uma via a experimentar.

Encerrando o capítulo. Anita escolheu ser professora de Matemática porque gostava da profissão e gostava da disciplina. Na altura em que negociámos o projecto de investigação colaborativa, iniciava o seu quinto ano de ensino. Entregava-se intensamente à profissão e vivia-a movida pela vontade de aprender e de enfrentar desafios em que encontrasse sentido, fossem eles originados por questões mais directamente relacionadas com a prática lectiva ou não. Um dos lemas por que a professora se orienta é "aprende-se a partir do erro". Sabe que percorrer novos caminhos acarreta riscos e possibilidades de nem sempre conseguir concretizar, da melhor forma, aquilo que imagina. No entanto, esta consciência não a impede de enveredar por estes caminhos, afrontando o pouco conhecido com energia e força interior.

Quando iniciámos o trabalho conjunto, justificar, demonstrar e conjecturar eram actividades que associava a argumentação/argumentação matemática. Conseguir que os alunos se envolvessem nestas actividades era uma das suas "grandes batalhas" que englobava várias frentes de "luta". Uma destas frentes prendia-se com o ajudar a turma a compreender a necessidade e importância destes processos matemáticos. Concepções dos alunos sobre o que é a Matemática e sobre o papel que devem desempenhar na sala de aula, complexificavam esta tarefa. Outra frente de "luta" era combater e competitividade entre os alunos considerada pouco saudável, o individualismo e a desvalorização de contribuições apresentadas por colegas. Uma das razões pelas quais Anita aderiu, de imediato, à proposta de participação no projecto de investigação colaborativa foi o encontrar mais "armas" para a ajudar a travar esta "batalha".

A aula em que Anita trabalhou com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*, analisada na segunda parte deste capítulo, surgiu cerca de quatro meses após o início do projecto. Se exceptuarmos as aulas de familiarização foi a primeira desta professora que observei. Cerca de dez meses depois surgem as três aulas desenvolvidas a partir da tarefa *À procura de dízimas finitas*. Em qualquer uma das quatro, Anita enfrentou problemas diversos que suscitaram uma actividade reflexiva individual, alimentada e alimentando a reflexão colectiva no grupo de pesquisa. Esta actividade reflexiva foi favorável à identificação e debate de várias questões de que apresento em seguida exemplos ilustrativos, associando-os aos problemas analisados que organizei em quatro tabelas relativas a cada uma das categorias orientadoras da análise das aulas.

Apoio à formulação e avaliação de conjecturas

1. Tarefa *mdc/mmc*: *Que relações*?	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
P1: E depois os alunos começam a avançar com conjecturas! E eu não queria dizer nada, nem queria que fossem lá. P2: E no meio daquilo tudo, mesmo já depois dos contra-exemplos e tudo.	P3: Mas se eu os deixasse aperfeiçoar as conjecturas não estaria a alimentar aquela perfeição exagerada desvalorizando o resto? P4: O 1/23 passou um bocado à margem, se calhar...	Q1/P1: O que fazer com conjecturas formuladas pelos alunos não incluídas na agenda do professor? Alterar a agenda ou não? Em que circunstâncias? Remeter, ou não, para a turma os raciocínios dos alunos? Q2/P2: Como ajudar os alunos a compreender que a prova de uma conjectura não consiste na sua verificação por exemplos? Como os ajudar a compreender que não encontrar contra-exemplos não basta para uma conjectura ser considerada provada? Q3/P3: Como organizar a apresentação e discussão de conjecturas, em particular quando são diferentes? Numa turma em que os alunos são perfeccionistas, como agir de modo a valorizar qualquer conjectura formulada, não reforçar a ideia de que as conjecturas têm que ser “perfeitas” e, ao mesmo tempo, evitar a artificialidade resultante de não permitir aos alunos aperfeiçoarem as suas conjecturas durante a fase da partilha/compreensão? Q4/P4: Como lidar com acontecimentos supreendentes quando não é perceptível o que os ocasiona sem fazer depender o rumo da aula da autoridade que a professora detém?

Ensino do discurso de prova

1. Tarefa *mdc/mmc: Que relações?*	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
P5: Por um lado eu digo que os exemplos não provam e, por outro, vou recorrer a um exemplo. P6: É caso para dizer que o professor tinha mais expectativas.	P7: Mesmo com um exemplo houve ali problemas em termos do que fazer e como pela parte dos alunos	Q5/P5: A opção pelo exemplo generalizável enquanto processo de prova, não reforçará a concepção de que os exemplos provam conjecturas? Como lidar com a situação? Q6/P6: Como encontrar um equilíbrio entre o tempo que se concede aos alunos para que ultrapassem, por eles próprios, dificuldades e ajudá-los a progredir? Como apoiar todos os alunos sem constranger o desenvolvimento da sua autonomia matemática e, neste processo, não negligenciar os que têm mais dificuldades? Q7/P7: De que modos e através de que vias a análise de exemplos pode ser uma fonte inspiradora para o processo de prova? Que cuidados importa ter?

Emergência e exploração de situações de desacordo

1. Tarefa *mdc/mmc*: *Que relações*?	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questões/Problemas associados
--------	P8: Fui pelo implícito e não devia ter ido...	Q8/P8: Qual o papel e importância dos pontos de situação numa discussão? Quando importa fazê-los? Que cuidados ter?

Constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático

1. Tarefa *mdc/mmc*: *Que relações*?	2. Tarefa *À procura de dízimas finitas*	Questõe*s*/Problemas associados
P9: Alguns continuam com as conjecturas, outros querem avançar para a ficha. P10: Eles estavam muito calados, mais do que o habitual. P11: Só que fala muito baixinho e depois não diz mais alto. P12: É muito difícil eu conseguir pôr um a interagir com outro. P13: Tem muito valor aquele caminho que os ajudo a percorrer, embora, se calhar, se eles o conseguissem percorrer sozinhos ganhassem mais.	P14: Para mim a questão da participação influencia tudo logo. P16: Foi o sentido de oportunidade que, se calhar, falhou... P17: Há alguns alunos que dificilmnente falam.	Q9/P9: De que forma compatibilizar interesses dos alunos com objectivos e intenções do professor? Q10/P10/P11/P14: Como incentivar os alunos a expressarem publicamente as suas ideias de forma audível por todos e não só pela professora? Como ajudar os alunos a compreender que uma das suas responsabilidades é participarem no discurso da aula? Q11/ P12: Como promover, incentivar e facilitar as interacções entre alunos? Que fazer para os ajudar a descentrarem-se da professora? Como ajudar os alunos a compreender que são responsáveis por tentar entender as ideias dos colegas e avaliarem as contribuições que surgem? Como lidar com alunos que relutam em assumir este papel? Q6/P13/P14: Como encontrar um equilíbrio entre o tempo que se concede aos alunos (...). Q8/P16: Qual o papel e importância dos pontos de situação (....). Q12/P17: Que estratégias adoptar para incentivar a participação de alunos que dificilmente assumem a palavra?

A análise global do conjunto das quatro tabela permite evidenciar que, também, com Anita os problemas têm incidências variadas e surgem a partir de fontes diversas destacando-se a constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático, tal como acontece com Rebeca. Algumas das questões são analisadas a propósito de vários problemas como é o caso da questão 6, discutida a partir dos problemas número 6, 13 e 14. Todos eles se relacionam com encontrar equilíbrios entre o apoio à actividade dos alunos e a criação de criações favoráveis ao desenvolvimento da sua autonomia, problema também experienciado por Rebeca. Além disso, há questões debatidas no âmbito de aulas de Rebeca que também o foram das de Anita e vice-versa. Inquietações significativas para Anita na primeira aula que presenciei, foram o silêncio de muitos alunos, a voz pouco audível de outros, a instituição da professora como auditório privilegiado, ou mesmo único, a quem as mensagens eram dirigidas e a não assunção da responsabilidade por avaliarem os seus raciocínios. Este modo de estar permaneceu durante um tempo digno de nota na primeira fase do projecto. Nesta fase, muitas conversas do grupo de pesquisa focaram-se, precisamente, neste aspecto e na procura de meios que pudessem contribuir para construir uma cultura de argumentação. Pouco a pouco começam a surgir algumas mudanças. Os alunos começam a interagir entre si e há mais contribuições da sua iniciativa. No entanto, as questões não estão ultrapassadas. Cerca de meio ano após a aula com a tarefa do máximo divisor comum, Anita comenta que a aluna que nesta aula encontrou um contra-exemplo para a conjectura mas não conseguiu explicar o seu raciocínio aos colegas porque falou em voz muito baixa, "continua sem voz" (Anita, TST 35, p. 5) pois não se consegue fazer ouvir. Tal como esta aluna, outros colegas continuam também sem voz. Na perspectiva da professora, há alterações significativas na segunda fase do projecto. Começam a existir nas suas aulas episódios de argumentação matemática em que os alunos são os principais protagonistas, como a aula com as tarefas das dízimas revela. Esta situação começa a ir ao encontro do seu ideal de argumentação que, ao iniciarmos o trabalho conjunto, desejava mas não conseguia concretizar. Abordarei este aspecto no capítulo VIII.

Capítulo VIII

-

Ensinar a argumentar em Matemática no contexto do projecto

Procurando destacar aspectos que se afiguraram como relevantes para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática ao longo do projecto de investigação colaborativa, centro este capítulo na análise do trabalho de Anita e Rebeca considerando-o numa perspectiva diacrónica. Retomo alguma informação apresentada nos três capítulos anteriores a este e incluo, também, as vozes das professoras através de extractos do seu discurso diferentes dos associados à reflexão sobre as aulas analisadas nos capítulos VI e VII.

Organizo o capítulo em três secções. Na primeira, abordo perspectivas de Anita e de Rebeca sobre argumentação matemática consideradas em dois momentos distintos: quando iniciámos o trabalho conjunto e perto do seu final. Dedico a segunda secção à preparação do ensino pelas professoras, ou seja, ao trabalho prévio às aulas que presenciei[68] e em que intencionalmente procuraram envolver os alunos em actividades de argumentação matemática. Na terceira secção, a mais

[68] Com o objectivo de simplificar a escrita, ao longo deste capítulo designarei as aulas de Anita ou de Rebeca que presenciei e registei magneticamente apenas por aulas, devendo subentender-se, salvo indicação em contrário, que me refiro a estas aulas.

longa, destaco aspectos considerados significativos no trabalho desenvolvido durante a leccionação destas aulas.

Pensando a argumentação matemática

Com o propósito de evidenciar os significados atribuídos por Anita e Rebeca a *argumentação matemática* no início do projecto de investigação colaborativa e também o modo como, na ocasião, procuravam incorporá-la nas suas práticas, retomo, nesta secção, ideias apresentadas na primeira parte dos capítulos VI e VII. Apresento, também, o seu olhar sobre argumentação matemática quando encerrámos o trabalho do grupo de pesquisa e saliento as principais transformações que, neste âmbito, destacam.

Rebeca: Do carácter pontual ao sentido holístico

Rebeca, em Novembro de 2001, exprime o que pensa sobre argumentação matemática usando duas vias complementares: o que não é e o que é. Como refere, não é, apenas, a apresentação, pelos alunos, dos produtos dos seus raciocínios, mas é também, e sobretudo, a explicação do percurso que lhes possibilitou chegarem a eles e sua justificação. Como exemplos de envolver os alunos em actividades de argumentação matemática, indica os pedidos de justificação que inclui em testes ou as explicações que solicita na aula na sequência da resolução de um exercício visando tornar visível, para ela própria ou para a turma, "como fizeram" (E1, p. 9). Conseguir que os alunos experienciassem estas actividades não lhe era simples. De facto, quando considerava pouco claros certos aspectos de uma explicação, interferia, por vezes, na própria explicação com o propósito de aumentar a sua inteligibilidade. Do seu ponto de vista, este modo de agir não era adequado. No entanto, controlá-lo era-lhe difícil.

Explicação e justificação são, assim, os processos argumentativos em que Rebeca procurava envolver os alunos. Estes processos surgiam na turma a partir de interpelações que lhes endereçava. Exercício e raciocínio, com a ambiguidade que esta última palavra encerra, são exemplos de objectos sobre os quais fazia incidir a argumentação.

Com o desenvolvimento do projecto, Rebeca começa a examinar os significados que atribui a explicação e a justificação, a interrogar-se sobre "o que é mesmo uma argumentação" (TST 8, p. 14, 22/01/02) e a suspeitar que a sua visão de argumentação matemática como "simples justificações" (idem, p. 15) talvez seja algo "redutora" (idem, p. 14). O confronto com as ideias de Cobb, Yackel e Wood referidas num dos textos que discutimos (documento 3, tabela 7, capítulo V), a identificação de episódios de argumentação matemática na sua aula gravada por um colega e a necessidade de seleccionar alguns dos episódios ocorridos em aulas que leccionou para os narrar no grupo de pesquisa, parecem ter sido elementos que contribuíram para este questionamento. Por seu turno, as dúvidas que sentiu e explicitou criam um contexto favorável para reflectirmos sobre significados associados a argumentação, ou a argumentação matemática, tendo em conta as ideias de diversos autores — análise e discussão do documento 8, tabela 7, capítulo V —, para decidirmos sobre o significado a adoptar para argumentação matemática no âmbito do projecto e para elucidar aspectos relativos ao envolvimento dos alunos em actividades que a pudessem fazer surgir. Com a prossecução do nosso trabalho, o entendimento aprofunda-se, facto a que não foram alheias as várias conversas sobre o porquê de termos seleccionado, para discutir nas sessões de reflexão, determinados episódios considerados de argumentação matemática ocorridos nas suas aulas. Perto do final da primeira fase do projecto, começa a ser frequente, por exemplo, todos os elementos do grupo de pesquisa escolherem o mesmo conjunto de episódios.

Todo este percurso foi propício a que surgisse, em Rebeca, um outro modo de pensar sobre o que está em jogo quando se pretende orientar o ensino para o envolvimento dos alunos em argumentação matemática:

> Comecei a pensar de outra maneira, a pensar na argumentação como um processo mais dinâmico entre os alunos, a ver que é útil haver os tais

> desacordos para eles argumentarem e a tentar pô-los em evidência. Agora tenho a ideia de que a argumentação é um processo mais dinâmico. (...) A reflexão que fomos fazendo no âmbito do desenvolvimento do projecto fez com que nós fôssemos alterando as nossas perspectivas. (E3, p. 33, 12/03/03)

Fazendo o contraponto entre o que designa por "antes" e "agora", Rebeca refere "alterações" (E3, p. 33) reveladoras de facetas do seu novo olhar sobre argumentação matemática, deixando transparecer que estas alterações se organizam, fundamentalmente, em torno de três eixos, que apresento em seguida.

- Alterações relativas ao auditório privilegiado da argumentação:

> Antes: os alunos deviam apresentar-me justificações das afirmações que faziam de modo a que todos percebessem. A argumentação era entre mim e eles. O que eu acho agora é: a argumentação é essencialmente entre os alunos; é um processo mais dinâmico. (E3, p. 33)

- Alterações relacionadas com o quê e quem pode fazer emergir actividades de argumentação:

> Antes surgiam: não percebo, explica melhor; agora surgem também não concordo, porquê... São mudanças. E estes "não percebo" surgiam para mim. Por exemplo, os alunos diziam: professora, não percebo o que é que ele diz e agora já surgem, se for preciso, directamente para outros alunos. (E3, p. 33)

- Alterações focadas na abrangência da argumentação:

> Antes, para mim, [a argumentação] não era um processo tão dinâmico. Se calhar associava mais a argumentação a justificações, a coisas mais pontuais. Argumentação igual a justificação, se calhar. Agora não, tenho uma visão mais ampla. A argumentação envolve muito mais coisas. Justificações são apenas uma pequenina parte. Envolve a formulação de conjecturas, o eles tentarem explicar uns aos outros, o terem opiniões diferentes e confrontarem-nas, resolverem desacordos... (E3, p. 33)

Argumentação matemática perde, para Rebeca, por um lado, o carácter pontual, deixando de estar meramente associada a momentos particulares das aulas passíveis de surgirem quando endereça aos alunos pedidos de explicação ou justificação das suas contribuições. Por outro lado, amplia-se o conjunto de situações que percepciona como potencialmente geradoras de actividades deste tipo: haver possibilidades dos alunos confrontarem entre si opiniões e envolverem-se na resolução de desacordos, incentivá-los a dirigirem questões aos colegas quando pretendem obter clarificações sobre ideias que estes enunciam e proporcionar ocasiões em que formulam conjecturas. Por esta via, aumenta o número de elementos da turma que pode desencadear a argumentação. Esta torna-se um processo mais dinâmico em que, do ponto de vista de Rebeca, os protagonistas principais são os alunos e muda ou alarga-se o auditório a quem é dirigida. Deixa de ser constituído, apenas, pela professora, e passa a incluir também, ou mesmo prioritariamente, os colegas a quem é necessário convencer do sentido, pertinência ou adequação do que é dito.

A argumentação matemática ganha, assim, um sentido mais holístico: pode mobilizar a turma no seu todo e ser desencadeada quando se trabalha com qualquer tarefa ou tópico matemático. Nos contributos do projecto para o seu desenvolvimento profissional, Rebeca, entre outros aspectos, inclui: "Passei a estar mais alerta para aproveitar observações dos alunos que podem levar a pequenos momentos de argumentação se forem postas em evidência para toda a turma" (DER, 19/03/03, p. 1). Todas as alterações que referiu são, para a professora, também "transformações" que ocorreram em si: "São alterações mas são também transformações minhas, porque se calhar alterou-se porque eu passei também a ver de outra maneira. Porque se eu antes já visse a argumentação de outra maneira já fazia isso antes" (E3, p. 33).

Anita: Do desejar ao conseguir

Ao conversarmos a propósito de argumentação matemática durante a primeira entrevista, os exemplos indicados por Anita denotam que inclui aqui a justificação de afirmações, a formulação e teste de conjecturas e a demonstração de relações conjecturadas pelos alunos ou apresentadas por si. A sua preocupação com estas dimensões transparece, nomeadamente nas considerações que tece sobre o projecto focado na utilização das TIC (Tecnologias de Informação e Comunicação) no ensino da Matemática por que foi responsável. No entanto, traduzir esta preocupação em acções práticas que originassem o envolvimento dos alunos nessas actividades constituía, para a professora, um campo de investimento e, simultaneamente, uma fonte de dificuldades. Tentar, batalhar e lutar são verbos que sobressaem no seu discurso quando evoca as experiências que fazia orientadas para este envolvimento.

Anita lutava contra concepções dos alunos que eram entraves à valorização dos processos de justificação. Batalhava, também, contra a competitividade e individualismo de vários elementos da turma, contra uma desvalorização das contribuições para o discurso da aula que não tinham origem em si própria e contra uma concepção de perfeccionismo que poderia boicotar o assumir riscos e dificultar a partilha construtiva de ideias, entre todos os elementos da turma, que desejava para as suas aulas. Procurava inverter a situação tentando "convencer" os alunos da importância da cooperação e dos processos de justificação, tentando transmitir-lhes a ideia de que se aprende a partir do erro. Apostava, assim, em vias explícitas de valorização do papel que pretendia que assumissem na actividade da aula:

> Mais no início, a minha perspectiva sobre o significado da argumentação matemática estava associada aos alunos apresentarem as suas ideias e justificarem-nas ou provarem-nas. Implicitamente, eu tinha sempre aquela ideia de complementaridade entre os alunos, mas lá está, implicitamente numa concepção ideal, percebes, quando tu imaginas uma situação de argumentação. Agora, lá está, como é que eu ia lá? Não sabia muito bem. A tal maneira de como envolver os alunos uns com os outros é que não sabia muito bem como. Essa parte estava mais nas perspectivas futuras do que na realidade do que eu conseguia. A minha ideia de tentar envolver os alunos em actividades de argumentação era o valorizar esse mesmo envolvimento investindo bastante numa forma explícita de o valorizar. (E3, p. 39, 18/03/03)

Ao começarmos o projecto, Anita tem consciência, como este extracto revela, que as tentativas feitas até ao momento não permitiram alcançar aquilo que idealizava ser uma situação de argumentação matemática. As suas palavras revelam, também, que "não sabia muito bem" como prosseguir o seu trabalho de modo a conseguir que existisse "complementaridade entre os alunos", ou seja, que interagissem entre si de modo a existir uma partilha de ideias matematicamente relevante, efectiva e respeitosa.

Várias dificuldades prévias à colaboração, experienciadas por Anita ao orientar o seu ensino no sentido de envolver os alunos em actividades de argumentação matemática, perduraram durante o desenvolvimento do projecto. Uma destas dificuldades — aquela que se manteve durante mais tempo e que exigiu à professora esforços vários tanto cognitivos, como emocionais — prende-se, precisamente, com a referida ideia de "complementaridade entre os alunos". Esta complementaridade passa, antes de mais, por proporcionar-lhes oportunidades para assumirem a palavra e por os alunos a assumirem na realidade. A análise da aula com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*, analisada no capítulo VII, ilustra alguns dos movimentos feitos por Anita nesse sentido. Por exemplo, para incentivar a participação não responde a uma aluna de uma forma muito detalhada porque tenta que a colega, que na altura está no quadro, lhe responda; tenta, também, evitar constrangimentos noutra usando várias estratégias para a encorajar a expressar-se de forma audível de modo aos colegas poderem compreender o seu raciocínio; e insiste bastante com uma outra para partilhar com a turma o processo por si descoberto para a justificar uma conjectura formulada. Estes esforços não dão frutos. O padrão de interacção dominante é entre os alunos e a professora, situação que pode ter sido agravada pela intrusão de elementos estranhos no espaço da aula. No entanto, independentemente desta intrusão, Anita destaca, ao reflectir sobre a referida aula, que é "muito difícil" (TST 15, p. 64, 28/03/02) promover a interacção entre os alunos e conseguir que se descentrem de si própria enquanto auditório privilegiado para as suas mensagens ou enquanto fonte de autoridade, derivada do seu estatuto de professora, donde exclusivamente emana o poder decisório sobre a correcção, ou não, destas mensagens.

Anita sente que ultrapassar as dificuldades associadas à "complementaridade entre os alunos" exige criar condições que permitam "destruir os tais tabus" (TST 15, p. 62), expressão que, implicitamente, traduz as concepções dos alunos contra as quais já lutava quando iniciámos a colaboração. Ao mesmo tempo, exige que seja capaz de fazer face, em termos emocionais, ao que experiencia quando constata a "relutância" (idem, p. 66) de alguns alunos em enveredarem pelos caminhos que deseja, ou ao incómodo de outros quando está em jogo a análise, pelos colegas, das suas contribuições. Sentir-se mal, sentir-se triste, estranha, "em baixo", são expressões que utiliza para verbalizar estes sentimentos. Ao longo do projecto refere-os frequentemente, o que evidencia o significativo abalo e a perturbação que as reacções dos alunos lhe causavam.

As considerações tecidas por Anita a propósito de um episódio ocorrido na aula em que os alunos trabalharam com a tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*, revelam a sua inquietude face às referidas reacções e, simultaneamente, a sua preocupação pela busca de novos caminhos que lhe permitam alterar "este tipo de postura [dos alunos] e uma cultura demasiadamente agarrada ao que é 'melhor', ou, por outras palavras, ao que parece melhor" (E3, p. 3):

> As interacções entre os alunos, o tentar-se aproveitar as ideias deles para que outros e eles próprios reflictam sobre elas, o aprender a partir dos erros, nem sempre é bem compreendido. Parece que provoca estranheza nos alunos, sentem-se visados... Tu lembras-te que ao início eu falava muito em tentar fazer isto ou aquilo? É porque eu, às vezes, também sentia que estava a tentar fazer uma coisa e que às vezes àquilo… (pausa) Como é que eu hei-de dizer? Por exemplo, lembras-te quando o Joel (...) foi apresentar aquela tal conjectura? Lembras-te da reacção dele? (...) Ficou muito inibido. E é este tipo de reacções que eu, às vezes, não percebo muito neles... Percebo, por um lado, e não percebo, por outro. Ao tentar aproveitar este tipo de acontecimentos, às vezes eu própria me sentia estranha por o estar a fazer, porque a reacção dos alunos era como se eu os estivesse a expor. Quando nós estamos a fazer estas coisas e nós até as valorizamos — porque até se vê que uma pessoa está entusiasmada no meio daquelas coisas — porque é que os alunos continuam a ter ainda este *feeling*? (...) em certas alturas, quando os alunos ficavam inibidos, acaba o professor até por ficar também triste, sabes? Nós próprios ficamos... (pausa) (...) Ficas para baixo. Porque se o aluno também se sentir muito incomodado, quem acaba por ficar estranho também é o professor, porque não é essa a intenção, não é deixar os alunos assim. Claro que tenho de arranjar uma maneira rápida de mudar aquilo de maneira a que os alunos também não se sintam mal... Percebes? (E3, pp. 4-6)

Quando ocorre o episódio com Joel referido neste extracto, Anita dá-se conta da inibição provocada no aluno pelo facto de ter submetido à discussão da turma uma contribuição sua que, mais tarde, foi aperfeiçoada. Considera que, apesar de sempre ter tido "uma atitude aberta e não penalizadora em relação àquilo que eles dizem" (Anita, TST 23, p. 15, 24/05/02), esta sua atitude "pode é não ser suficiente" (idem). Manifesta o desejo do grupo de pesquisa identificar e problematizar possíveis "estratégias" (idem, p. 15) que, tendo em conta as características da turma, possam ser potencialmente favoráveis ao reforço e compreensão de que "a existência de desacordos e a discussão de pontos de vista é natural, legítima e desejável" (idem) nas aulas de Matemática: "É como é que se muda. (...) Podíamos discutir isso um pouco mais (idem, pp. 15, 16).

No final da primeira fase do projecto, Anita sente haver uma evolução no modo como alguns alunos estão na aula de Matemática. O nível de participação aumenta, surgem mais intervenções por iniciativa dos alunos, há um maior à-vontade para assumirem, explicarem e justificarem as suas ideias, começam a gerar-se, entre os alunos, pequenos diálogos, e mesmo se "não valorizam muito, às vezes, o que os colegas dizem, (mas) já estão um bocadinho melhor" (E2, p. 4, 22/07/02). Facilitou esta evolução, do seu ponto de vista, sobretudo o investimento persistente na negociação de normas sociais reguladoras da actividade da aula, no sentido das discutidas pelo grupo de pesquisa a partir do texto *Dinâmica da argumentação na aula de Matemática: Normas sociais e normas sóciomatemáticas* (doc 3, tabela 7, capítulo V):

> Fui batendo, digamos assim, nas normas, de uma maneira assim mais insistente… (risos) (...) Por exemplo, antigamente eu diria uma vez ou outra *falem* ou qualquer coisa, agora pus isso mais à tona, digamos assim, insisti muito e vê-se nos diálogos que eu tenho nas aulas. Digo *falem e argumentem e discutam, não falem só comigo, falem com os vossos colegas.* No fundo insisti mais, finquei um bocado o pé mais. Porque como eu dizia em relação às minhas turmas, os alunos vinham um bocadinho habituados num sistema um bocadito diferente, percebes? Estarem mais fixados no professor, e portanto uma pessoa tem que batalhar muito. (E2, p. 4)

Entre aquilo que Anita considera ter aprendido durante a primeira fase do projecto, inclui o estar "mais atenta (...) até à negociação mais explícita de normas em que insisto na troca de ideias entre eles, em que se escutem..." (DEA, p. 2, 1/08/02). Contudo, apesar das mudanças percepcionadas nalguns elementos da turma, continua a constatar "alguma tendência que estes alunos têm em não partilhar/escutar /respeitar/discutir as ideias e raciocínios entre eles, uma espécie de 'cultura' de não dar muito valor ao que outros alunos dizem" (idem, p. 1, 1/08/02). Esta é, do seu ponto de vista, uma "dificuldade" (idem) que ainda persiste.

Anita sente haver uma evolução significativamente possibilitadora de uma maior aproximação da sua "concepção ideal" de uma situação de argumentação matemática com a partilha de ideias que lhe associa, quando começa a investir, também, no que designa por "uma valorização mais implícita" do envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, em contraponto ao investimento explícito desta valorização:

> E aqui é que houve uma evolução que foi muito importante. Como é que eu te hei-de explicar? Portanto, começa a haver uma valorização mais implícita desse envolvimento dos alunos e isto era o mais difícil, acho eu. Entramos mais também com determinadas maneiras que nós discutimos relacionadas com o como havemos de fazer para levar os alunos também, um bocado, a alterar a maneira de estar e a postura e a valorização que eles davam às coisas. (...) E era esta maneira de levar à prática essa valorização que no início do projecto não tinha bem como. Há um "como". Mas como fazer? (...) Principalmente que partilhassem, era a parte mais rica. (...) Como é que o professor pode fomentar isso. Estamos no "como". (E3, pp. 39-40)

A expressão *valorização mais implícita* prende-se, nas palavras de Anita, com o "como fazer isso [negociar normas] sem estar a dizer sempre: *Agora tu vais ter que não sei quê porque tens que ligar ao que ele está a dizer...* Percebes? Sem ser desta maneira, porque esta maneira não resulta sempre" (E3, p. 39). Este aspecto será abordado com mais detalhe em *Investindo na negociação de normas de acção e interacção*, subsecção incluída neste capítulo. Terminadas as sessões de trabalho dedicadas à reflexão colectiva, considera que "mesmo em relação a aulas não gravadas" (E3, p. 88), os alunos "se sentem mais à-vontade quando, no fundo, algum colega pega numa ideia deles e a completa, mesmo criticando-a, e pode até refutá-la. Já estão melhor, já não se inibem tanto (idem).

Em suma, as reflexões de Anita associadas ao envolvimento da turma em actividades de argumentação matemática, evidenciam uma transformação que vai no sentido de uma consciência crescente da importância da negociação contextualizada de normas sociais de determinado tipo e da coerência nos processos de negociação, enquanto via passível de alterar o modo de estar dos alunos na aula de Matemática e o papel e responsabilidades que assumem no discurso que aí se desenvolve. Previamente ao projecto, incentivar este envolvimento "estava mais (...) no meu gosto por... no transmitir que gosto" (Anita, E3, p. 5). A primeira fase do projecto fá-la ficar "muito mais consciente em relação (...) às normas, como negociá-las" (E2, p. 9). Nesta fase investia na "negociação mais explícita" (DEA, p. 2, 1/08/02) e, por vezes, potenciava, para o efeito, acontecimentos da sala de aula: "A Tita diz que já percebeu e eu digo: *Não, mas o facto de perceberes não faz mal. Diz outra vez*. É para reforçar a importância da partilha de ideias" (Anita, TST 28, p. 22, 4/07/02). No entanto, nas suas palavras, "faltava-me, se calhar, algumas — como é que eu hei-de chamar? — artes de rentabilizar implicitamente também" (E3, p. 6). A segunda fase do projecto proporcionou uma maior consciência sobre o poder das vias mais implícitas de negociação de normas, do papel do professor quando estão em jogo transgressões e da importância da coerência nos processos de negociação. Todo este percurso, a par do apoio que Anita sentiu existir no grupo de pesquisa — "tenho o vosso apoio" (TST 42, p. 10, 21/02/03) —, contribuiu, na sua perspectiva, para o seu desenvolvimento profissional:

> Com a minha evolução, já há uma mudança, uma maneira diferente de encarar as coisas e de saber o "como" de outra maneira. (...) de alguns "comos", porque há sempre mais outros. Além disso, os alunos mudam, o tempo muda, tudo muda... Mas pronto, mas já há mais as tais... eu nem sei que palavra hei-de usar... mas tem também a ver com o desenvolvimento profissional na sua prática mesmo. Tem a ver com o nosso desenvolvimento profissional mesmo, com coisas mais específicas. (...) Conheço mais estratégias para envolver os alunos e, principalmente, para tentar levá-los a partilhar determinadas coisas, determinadas ideias, para que haja uma partilha efectiva, digamos assim, dessas ideias e não quase um acrescento, ou seja um participa, depois, olha, o outro já falou e, se calhar, não estou a ligar tanto e agora *toma lá atenção*, e se calhar ele não liga muito, etc. E isso vai-se conquistando com essas ideias que nós trabalhámos. Deve haver mais, mas pelo menos, essas são já um bom ponto de partida para ajudar. (E3, pp. 40-41)

Preparando o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática

Esta secção incide sobre a preparação do ensino orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Uso o termo “preparação” para designar o tipo de trabalho realizado por Anita e Rebeca para se aprontarem para uma aula ou conjunto de aulas (Lampert, 2001). Neste sentido, entendo que a preparação do ensino é uma actividade mais abrangente do que aquela que, tradicionalmente, é designada por planificação, embora a inclua. Contempla a elaboração, preliminar à acção, de planos destinados a organizar e orientar o trabalho de ensino que especificam, com maior ou menor detalhe, cada uma das suas partes ou etapas, que podem, ou não, assumir um formato escrito e que visam a consecução de determinados objectivos. Contempla, também, a consciência de que aquilo que se prepara é algo que se coloca em estado ou condições de *poder* — e não *dever* — ser utilizado posteriormente. Contempla, ainda, a predisposição para tentar enfrentar o melhor possível a imprevisibilidade de qualquer aula, que é acrescida pela criação de situações didácticas de risco, nem sempre fáceis porque o inesperado dificulta a tomada das melhores decisões (Perrenoud, 2001).

Organizo a secção em duas partes principais. Na primeira, abordo vertentes gerais da preparação do ensino contempladas por Anita ou Rebeca. Na segunda, foco-me em aspectos que se intensificaram e complexificaram, fruto de procurarem orientar o seu ensino para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática.

Vertentes da preparação

Diversas intervenções ao longo do desenvolvimento do projecto revelam que há aspectos transversais à preparação das aulas por Anita e Rebeca independentes destas aulas terem, ou não, por principal propósito, a emergência e desenvolvimento de actividades de argumentação matemática. Em geral, ambas iniciam a sua preparação com a análise do texto curricular. Referindo-se ao que “habitualmente” (E4, p. 24,31/07/03) faz, Anita diz:

> Penso no que pretendo desenvolver, nos conteúdos que pretendo introduzir e quando o pretendo fazer, penso nas estratégias a que recorrerei, selecciono os materiais, por vezes ou mesmo sempre, exploro as tarefas, adapto-as, adopto-as ou crio-as, e penso na gestão do tempo (E4, p. 24).

Rebeca, usualmente, faz uma planificação curricular por temas e por tarefas. Começa por ir "ao programa copiar os conteúdos e objectivos de cada tema para uma folha à parte" (E4, p. 20) e prepara "fichas de trabalho, para cada um dos conteúdos e de acordo com os objectivos" (idem). Nesta fase, preocupa-se não com a preparação de cada aula, mas antes com a identificação de um "conjunto de tarefas que possam servir para introduzir os conteúdos" (idem, p. 21) ou que permitam elaborar fichas "um bocadinho diferentes" (idem, p. 22). Nestas fichas, usualmente, não inclui "exercícios porque os que os livros têm costumam chegar" (idem, p. 21). Perto de cada aula, selecciona as tarefas a propor aos alunos de entre os materiais que preparou ou entre aquelas que o compêndio adoptado inclui, resolve-as, nem que seja apenas "de cabeça" (idem, p. 22) se forem "muito fáceis" (idem) e equaciona o desenvolvimento da aula usualmente sem tomar decisões sobre a distribuição do tempo pelas várias actividades: "Não fixo tempos, normalmente. Depois na aula é que, conforme as coisas correm, é que decido como é que vou continuar" (idem). Assim, tal como diz, vai vendo "se cobri tudo o que estava lá [no programa] previsto" (idem, p. 20).

Parece, pois, que para Anita ou Rebeca, "um programa não é só conteúdos" (Anita, TST 26, p. 32, p. 18/06/02). Esta frase, ou outras com o mesmo significado, foram proferidas em diversas ocasiões para destacarem que ao equacionarem o seu trabalho, não devem negligenciar os tópicos matemáticos constantes do currículo instituído mas não podem, também, esquecer que há competências a desenvolver e que as metodologias adoptadas na aula não são neutras. Neste âmbito, ao iniciarem o projecto não remetiam para plano secundário objectivos associados ao desenvolvimento do que amiúde se designa por capacidades "de ordem superior": por exemplo, resolução de problemas, comunicação, justificação matemática. Preocupavam-se com o ensino dos conteúdos matemáticos constantes do currículo instituído; empenhavam-se em procurar tarefas que pudessem permitir uma aprendizagem da Matemática com compreensão e, neste processo, as suas fontes de pesquisa iam para além dos compêndios adoptados na escola; e cuidavam de delinear modalidades de trabalho que enquadrassem interacções e permitissem, aos alunos, ter um papel activo na aprendizagem.

Em suma, ao iniciarmos o trabalho conjunto, o *currículo moldado* (Gimeno, 2000) por Anita e Rebeca requeria dedicar atenção, simultaneamente, a tópicos matemáticos, a objectivos curriculares, a materiais de apoio à actividade a desenvolver e a aspectos relativos à organização e gestão da aula. Estas eram *vertentes* a ter em conta na preparação do trabalho de ensino. Ao longo do projecto, continuaram a dedicar atenção a todas estas vertentes e, nessa medida, o trabalho colectivo não trouxe novidades à estrutura geral que adoptavam ao prepararem o ensino, embora Anita destaque que um dos contributos deste trabalho para o seu desenvolvimento profissional foi "o reforço da ideia de que cada aula deve ser preparada pensando nos seus objectivos, nas estratégias e tarefas a propor" (DEA, 13/04/03, p. 2). No entanto, o projecto trouxe alterações na preparação da acção lectiva. Estas alterações, que abordarei na subsecção seguinte, estão associadas à intensificação e complexificação do trabalho de preparação, fruto do maior investimento nalguns dos aspectos com que anteriormente se preocupavam ou da incorporação neste trabalho de elementos a que antes não dedicavam uma atenção consciente.

Intensificando e complexificando a preparação

Vou abordar a intensificação e complexificação da preparação de aulas a partir dos dois aspectos que mais se destacam no discurso das professoras: (a) reforço ou ampliação dos objectivos orientadores da acção e (b) a maior frequência da apresentação de tarefas abertas e suas repercussões.

Via objectivos

A análise do conjunto dos objectivos indicados por Anita e Rebeca referentes à fase da preparação das aulas, revela que se organizam em torno de dois eixos. Um, que poderia nomear como *eixo de conteúdos matemáticos*, centra-se na compreensão de tópicos matemáticos incluídos no currículo prescrito para o 8º e 9º anos de escolaridade: por exemplo, "pretendia também discutir as equações literais dentro e fora do contexto de um problema e introduzir tudo o que está ligado às equações literais: resolução em ordem a uma das variáveis, etc." (Anita, TST 40, p. 3, 2/01/03). Inspirando-me em NCTM (2000), designo o segundo eixo por *eixo dos processos* e entendo-o como focando-se em objectivos que mais directamente se prendem com a formulação, avaliação e prova de conjecturas ou que se relacionam, de perto, com a promoção e gestão do discurso na aula de Matemática: por exemplo, "formular conjecturas (...) demonstrar as conjecturas... (...) justificar raciocínios (...) confrontar ideias, discuti-las em pequenos grupos e no grupo turma (...) e depois levá-los a resolverem desacordos entre si" (Rebeca, TST 27, p. 7, 28/06/02).

O desenvolvimento do projecto trouxe uma intensificação dos objectivos referentes ao segundo eixo, fruto das professoras considerarem que a acção por eles orientada era favorável à emergência de actividades de argumentação matemática e ao envolvimento dos alunos nestas actividades. Neste âmbito destaco objectivos focados:

a) na promoção e apoio à formulação, avaliação e prova de conjecturas, não explícita e prioritariamente centrados na importância destas actividades ou na compreensão do seu significado;

b) na valorização da actividade de formulação de conjecturas independentemente da sua posterior refutação;

c) na compreensão dos significados de conjectura e de prova evidenciando o carácter provisório das conjecturas e a necessidade de provar as conjecturas não refutadas;

d) na exploração de situações de desacordo visando a obtenção, pelos alunos, de consensos matematicamente fundamentados;

e) no incentivo e sustentação das interacções entre alunos.

A análise das aulas leccionadas por Anita e Rebeca a propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas* revela que o modo de agir de qualquer uma das professoras foi, significativamente, orientado por qualquer um dos objectivos referentes a (a) (b), (c), (d) e (e). Esta simultaneidade não é tão visível nas primeiras aulas sobre as quais incidiu a reflexão colectiva do grupo de pesquisa analisadas nos capítulos VI e VII, respectivamente em *A propósito da tarefa Números em Círculos* e *A propósito da tarefa Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* Em qualquer destas aulas, por exemplo, as interacções entre os alunos tiveram uma expressão muito débil e o seu envolvimento em processos de resolução de desacordos, também.

Anteriormente ao projecto, os objectivos relativos a (a) já orientavam as práticas de Anita e Rebeca. Com efeito, o trabalho com conjecturas e provas não era desconhecido para qualquer uma das turmas na altura em que o iniciámos. Rebeca, em mais de uma ocasião, refere que "não é a primeira vez que estou a provar algo com estes alunos" (TST 19, p. 19, 26/04/02). Também Anita, nomeadamente na primeira entrevista, conversa sobre a iniciação dos alunos "na demonstração das coisas" (E1, p. 7, 23/11/01) ou sobre as conjecturas que formulavam ou refutavam quando trabalhavam com o computador. No caso destes objectivos, a intensificação da preparação das aulas surge pela atenção mais sistemática e frequente que as professoras passaram a dedicar-lhes.

No caso dos restantes — (b) a (e) — a situação é um pouco diferente, pois não se trata, apenas, de mudanças relacionadas com sistematicidade e frequência. Há um grau de consciência na assunção desses objectivos, não existente anteriormente ao projecto, que contribuiu para que, na fase da preparação das aulas, Anita e Rebeca passassem a dedicar atenção a aspectos que não eram objecto de reflexão intencional e deliberada. Um destes aspectos é a negociação de normas sociais favoráveis à emergência de actividades de argumentação matemática. Um outro aspecto é a preocupação de ajudarem os alunos a compreenderem o valor da actividade da formulação de conjecturas ou averiguarem se compreenderam os significados de conjectura e de prova. Ilustrativa desta preocupação é a pesquisa feita por Rebeca na *internet* para descobrir uma conjectura cuja prova, ainda não encontrada, é motivo de prémio monetário, que foi referida no capítulo V (subsecção *Preparação de aulas*). São também as "provocações" que esta professora apresenta na aula depois de ter sido provada algebricamente uma conjectura[69]: "Também preparei antes da aula as provocações (risos). Provocação: trabalho para casa múltiplos de 50, 70 e 80" (TST 22, p. 8, 17/05/02). Estes movimentos revelam que a acção de Rebeca foi orientada por (b) e (c).

Os objectivos relativos a (d) e (e) sobressaem como aqueles em que houve, não apenas um investimento forte, cuidado e continuado durante todo o projecto, mas também como os que originam papéis que eram mais débil ou não intencionalmente desempenhados antes do nosso trabalho conjunto. Com frequência, qualquer uma das professoras indicou que, ao pensar numa determinada aula, um dos objectivos que estabeleceu para si própria foi o de estar atenta a desacordos e levar os alunos a resolverem-nos entre si. Anita considera ter "mais consciência" (E2, p. 9) sobre a importância da exploração destas situações que, como diz, "foi e é uma maneira bastante útil de levar a água ao meu moinho" (idem). Esta frase traduz, implicitamente, o contributo que lhes reconhece para o progressivo envolvimento dos alunos em discussões matemáticas associadas ao seu ideal de argumentação matemática. No mesmo sentido, também Rebeca destaca que a relevância dos desacordos surge com o trabalho que desenvolvemos: "aqueles [papéis] com que eu fiquei a preocupar-me mais com o projecto (...) é pôr em evidência os desacordos, servir de moderador no processo de resolução de desacordos e levar os alunos a resolver os desacordos entre si" (E2, p. 19, 19/07/02).

[69] Trata-se da extensão da conjectura "GT=10×C+4" aos múltiplos de *n*. "GT=10×C+4" é a designação que usei na secção *A propósito da tarefa Números em Círculos* (capítulo VI) para referir a conjectura "O grande total é igual a dez vezes o número do centro mais quatro". A tarefa *"Mais Números em Círculos"* representa uma extensão de *Números em Círculos*. O padrão descrito nesta última tarefa mantém-se e solicita-se aos alunos que encontrem uma relação entre o número do centro do padrão e o grande total para os múltiplos de *n*. A relação provada foi: O grande total é igual ao número de centro vezes 10 mais 4 vezes *n*, cuja representação algébrica assumiu a forma $GT=10x+4n$, em que x representa o número do centro do padrão.

Quanto a (e), Rebeca destaca recorrentemente que, com o desenvolvimento projecto, começou a cuidar mais da interacção entre os alunos. Passou a ver de um novo modo a partilha da palavra na aula e a "valorizar muito mais esta interacção entre os alunos" (E3, p. 38) que até então "valorizava muito pouco" (idem). No caso de Anita, os esforços para incentivar e sustentar estas interacções estão bem patentes na subsecção *Do desejar ao conseguir*, incluída neste capítulo.

Via tarefas

Analiso a intensificação e complexificação da preparação do ensino via tarefas, focando-me em três aspectos: (a) a compatibilização das tarefas apresentadas nas aulas com o currículo de Matemática, (b) o cuidado na formulação de tarefas e (c) a preparação meticulosa de aulas com tarefas abertas.

Compatibilizar tarefas abertas com o currículo de Matemática

Anita e Rebeca assumiram que, no âmbito do projecto, apresentariam aos alunos dois tipos de tarefas: problemas e tarefas de investigação. Em momento algum questionaram a legitimidade curricular de qualquer um dos tipos. Desde o início do nosso trabalho, consideraram poder proporcionar o envolvimento dos alunos em actividades matemáticas consistentes com os objectivos gerais definidos no currículo do 3º ciclo. Consideraram, também, possibilitar um aprofundamento das aprendizagens pela via da mobilização de saberes relativos a tópicos matemáticos diversos e ao estabelecimento de conexões entre eles. Pretendiam, no entanto, que esta legitimidade não proviesse apenas dos objectivos curriculares mais gerais. Desejavam que, através das tarefas, pudessem ser trabalhados conteúdos matemáticos específicos que tinham a responsabilidade de ensinar pelo facto dos alunos frequentarem os níveis de escolaridade que leccionavam.

Uma preocupação transversal à preparação de todas as aulas, foi a de procurar relações estreitas entre os problemas ou tarefas de investigação a propor aos alunos num dado momento e os tópicos matemáticos do currículo do 8º ou 9º anos de escolaridade trabalhados proximamente ou a introduzir através das tarefas. Esta preocupação complexificou o trabalho de preparação e restringiu as opções que, noutras circunstâncias, poderiam ter sido tomadas. No entanto, a actividade desenvolvida revelou que é possível encontrar formas de compatibilizar o ensino de tópicos curriculares com a opção por tarefas abertas de qualquer um dos tipos. Por exemplo, operações com monómios e polinómios, casos notáveis da multiplicação, teorema de Pitágoras e operações com potências, foram utilizados na prova de conjecturas formuladas no âmbito de tarefas de investigação; os problemas aparecem associados a probabilidades, equações literais e propriedades de triângulos semelhantes.

Apoiam esta ideia vários comentários das professoras. Rebeca, referindo-se à globalidade das tarefas que escolheu apresentar aos alunos, salienta ter tido "também a preocupação de ver se conseguia que as tarefas encaixassem no programa" (E4, p. 23, 04/08/03). Como referi no capítulo VII, Anita opta por propor *À procura de dízimas finitas* numa altura em que esta tarefa "estava integrada curricularmente nos conteúdos que eu ia dar" (TST 41, p. 2, 7/02/03). O caso do adiamento da tarefa *Mais números em círculos* ilustra a estratégia adoptada por Rebeca para articular o ensino das operações com polinómios com o ensino do discurso de prova, em condições favoráveis ao envolvimento dos alunos na produção da prova de uma conjectura que envolvia cálculo algébrico com duas variáveis:

> Inicialmente a tarefa [*Mais números em círculos*] era para ser só discutida com eles e ficava na base das conjecturas. Para os múltiplos de *n* não era provada. Mas depois quando comecei a preparar a tarefa lá em frente ao computador começou-me a fazer uma confusão terrível (risos). E pensava: *Então eu insisti tanto com eles que era preciso provar, nos outros casos, apesar de eles já estarem convencidos que eram aqueles resultados que davam... (...) e agora nesta vou-lhes deixar como uma conjectura e não vou provar!?* (risos). *Será que não é mesmo possível provar?* Isto estava-me a incomodar. E então fui tentar provar e ao tentar provar apercebi-me que não estava fora do alcance deles a prova (...) com mais algumas dificuldades em termos de cálculo algébrico (...) E foi aí que eu decidi fazer a prova (...) Eu, se propusesse a tarefa quando tínhamos combinado, ia fazer a prova com eles na base da intuição. (...) E então resolvi passar para depois de trabalhar os monómios e os polinómios e a redução de termos semelhantes. E isso notou-se quer na linguagem utilizada quer na facilidade deles. (...) aproveitei o facto de a propor nesta altura para ligar com as outras coisas. A tal história de falar nos termos semelhantes, de explicar porque é que acontecia aquela relação falando em monómios

> simétricos, tentei relacionar a tarefa, o máximo possível, com aquilo que estávamos a trabalhar agora. (TST 22, pp. 7-9)

As palavras de Rebeca incluídas neste extracto revelam, ainda, a importância do professor possuir um bom conhecimento da globalidade do currículo para poder identificar conexões entre conteúdos e processos matemáticos através da exploração das tarefas que apresenta.

Cuidar da formulação de tarefas sem esquecer que elas não bastam

Uma das vertentes significativas da actividade do grupo de pesquisa ao longo do desenvolvimento do projecto, e sobretudo na sua primeira fase, foi, como procurei fundamentar no capítulo V, encontrar modos de formular tarefas possibilitadoras de discussões matemáticas significativas e, por esta via, potencialmente favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. A intensificação do trabalho de preparação das aulas aconteceu pelo tempo que conjuntamente dedicamos a este aspecto e também pelos maiores cuidados que, individualmente, as professoras passaram a ter na análise de enunciados de tarefas já existentes ou na adaptação/construção de novos enunciados. Nas palavras de Rebeca, "tenho que ter o cuidado de analisar como é que a tarefa está formulada" (E2, p. 8). Pronuncia esta frase quando refere a preparação de aulas em que intencionalmente tem uma preocupação mais intensa com a argumentação matemática. Focando-se nestas mesmas aulas, Anita salienta estar "muito mais consciente em relação (...) ao tipo de tarefas" (E2, p. 9) e ter "mais cuidado (...) na formulação, na escolha" (idem, p. 12).

Ambas as professoras consideram que há tarefas que são favoráveis à emergência de episódios de argumentação matemática. As suas características não diferem das referidas no capítulo V (subsecção *À procura de tarefas*) a propósito do *slide* usado na dinamização do grupo de discussão realizado no ProfMat. No entanto, Anita e Rebeca, sublinham, recorrentemente, que as tarefas, por si só, não bastam para estes episódios surgirem e se desenvolverem:

> Nas aulas que nós preparámos e depois já com essas ideias a gente tem um certo cuidado na forma como formulamos as questões, as tarefas. Pode ser bastante útil, porque se for bastante aberta, não quer dizer que seja causa-consequência, porque às vezes dá-se a volta, mas eu creio que há certas vantagens em formular as questões de certa maneira… (...) Portanto, os cuidados que há a ter é, no fundo, também estar a ver o que é que se pode perguntar e o que é que se pode aproveitar... Mas a gente nunca sabe muito bem o que é que eles vão dizer, não é?.... Mas podem-se ter algumas coisinhas na manga, lá está. Algumas questões, no fundo para suscitar o espírito argumentativo. (Anita, E2, p. 9)

> Uma das coisas que tínhamos considerado importantes e continuo a achar que é importante é a tarefa. Se for uma tarefa aberta e propícia à formulação de conjecturas, isso é importante. Claro que só isso não chega, porque a tarefa pode ser muito aberta, mas se os alunos não tiverem o à-vontade para expressar as suas opiniões ou se surgirem opiniões diferentes e se os alunos não as transmitirem ou se o professor não puser em evidência essas várias opiniões ou não conseguir gerir esses confrontos, se calhar fica-se por ali e não se avança muito mais… (Rebeca, E2, p. 1)

Estes extractos revelam que, na perspectiva das professoras, orientar o ensino para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática passa pelo investimento numa cuidadosa procura[70] de tarefas com determinadas características mas que, por si só, confrontá-los com estas tarefas não é suficiente para ocorrerem episódios de argumentação. Intencionalmente, retirei os extractos das entrevistas realizadas no final da primeira fase do projecto com o propósito de salientar a importância do trabalho realizado nesta fase para o fortalecimento da ideia de que é importante cuidar da formulação de tarefas mas sem esquecer que elas não bastam. Apresento um exemplo que pode permitir ilustrar no que me fundamento e, simultaneamente, revelar como foi ganhando força esta ideia.

O facto da tarefa e da sua formulação não ser indiferente para a emergência e desenvolvimento de actividades de argumentação, sobressai através do confronto entre a actividade matemática passível de surgir a partir de um enunciado incluído num compêndio de Matemática e uma alternativa a ele originada pela análise colectiva do documento 4 (tabela 7, capítulo V) na sessão de trabalho realizada em 4/1/2002. Pouco depois desta data, Rebeca apresentou esta alternativa na sua turma. A reflexão sobre a aula permitiu destacar que, por mais aberta que a tarefa seja, o

[70] Uso a palavra "procura" no sentido que lhe atribuí no capítulo V na subsecção *Preparação de aulas*. Ou seja, entendo a procura de tarefas como incluindo a análise, selecção, adaptação ou criação.

que o professor faz com ela e com os alunos não é irrelevante: "não devia logo a seguir dar o contra-exemplo (...) Não dei tempo de eles verem se a conjectura era válida ou não. Vi logo eu!... (...) Mas isso é o maior problema que eu vejo e que dificulta a argumentação" (Rebeca, TST 9, pp. 7-8, 29/01/02). Cerca de um mês mais tarde, a discussão do documento 11 (tabela 7, capítulo V) reforçou a importância de se dedicar atenção à tarefa e, simultaneamente, a outros aspectos da acção do professor. Anita e Rebeca, ao seleccionarem ideias chave deste documento tendo em conta o tema do projecto, sublinham que, além da formulação das tarefas, importa, também, cuidar da criação de condições para os alunos assumirem a palavra e zelar pelo ambiente da aula de modo a que o respeito mútuo seja uma realidade e a exposição pública de pontos de vista não gere desconforto.

Ao longo do projecto estas perspectivas não foram alteradas mas, antes, fortalecidas. Na quarta entrevista, ou seja, no final do nosso trabalho, Anita continua a salientar a importância do tipo de tarefa chamando a atenção para a relevância do modo como, em situação de aula, são rentabilizados os acontecimentos que surgem: "aproveita-se para desencadear argumentações, etc. E o argumentar pode até surgir no contexto de exercícios, percebes?" (E4, p. 25).

Discussões sobre modos de formular tarefas e cuidados a ter na escolha da ocasião em que se apresentam, ou no texto escrito a entregar aos alunos, mantiveram-se até ao final do projecto. Frequentemente a actividade reflexiva sobre as aulas incidiu na análise do enunciado, com o propósito de problematizar o que era de manter ou alterar. Várias ideias para reformulação futura das tarefas provieram desta actividade que, a partir da segunda fase do projecto, começou a ser enriquecida pelos conhecimentos que a frequência da parte curricular do Mestrado proporcionou a Anita e Rebeca. Foi-se aprofundando o que aproxima e distingue vários tipos de tarefas e sobressaiu, mais fortemente, a ideia de que a formulação de conjecturas pelos alunos, enraizadas na identificação de regularidades, não é incompatível com problemas cujo contexto não é puramente matemático:

> Se calhar o meu problema é que eu não estou habituada a chamar conjectura a uma coisa que nasce num problema. Será isso? Se calhar é isso e é uma

> maluquice minha. Mas, por outro lado, quando estive a analisar a aula achei que aquilo devia ser alvo de uma coisa mais fundamentada, digamos assim. (...) Foi uma adivinhação informada, como dizem os *Standards*... Lá está... Oh pá! Mas eu não estava a pensar numa conjectura no contexto de um problema de *semi-realidade*[71]. Foi o meu problema, pronto!... (risos) (Anita, TST 40, p. 26, reflexão apresentada a propósito da aula em que trabalhou com a tarefa *Uma questão de candeeiros*)

Sobretudo a aula leccionada por Anita com a tarefa *Jogo da soma e do produto* contribuiu para destacar que, em certas ocasiões, pode haver vantagens significativas em não incluir no enunciado da tarefa todas as questões que se pretendem discutir a partir dela:

> Em termos de preparação da aula. Houve a preparação da tarefa em si própria, com a tua ajuda, para a abrir mais. Porque acho que é muito grande a diferença entre como estava no compêndio e como depois ficou. Acho que se ganhou muito em levar na manga a tal questão "como transformar os dados de modo a tornar o jogo do produto num jogo justo?". Acho que foi uma excelente ideia. (...) Acho que em determinados momentos lançar isto ou aquilo influenciou a dinâmica. (...) E se eu tivesse posto aquele título "jogos justos" como tinha pensado, estava, para já, a denunciar-me e a levar os alunos a desconfiarem que havia pelo menos um que não seria. Perdia-se um bocado o efeito da curiosidade. (...) há coisas que fazem mais efeito numa discussão se forem postas ali. (Anita, TST 37, pp. 11-12, 17/10/02)

Tal como o faz neste extracto, Anita sublinha, por diversas vezes, o apoio que a experiência de participação no projecto lhe proporcionou para conseguir desenhar tarefas mais abertas. Alguns meses depois de iniciarmos o trabalho, tem uma posição crítica sobre a primeira parte de *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?,* cuja autoria lhe pertence por inteiro: "Não está formulada abertamente, se calhar também foi um bocadinho de falta de jeito na altura" (E2, p. 3). Na sua perspectiva, "a reflexão sobre a concepção das próprias tarefas" (DEA, 13/04/03, p. 2) foi um dos contributos relevantes do projecto para o seu desenvolvimento profissional.

---

[71] A expressão "semi-realidade", usada por Anita, deve ser entendida no sentido que lhe é atribuído por Skovsmoze (2000). Durante a parte curricular do mestrado ambas as professoras contactaram com ideias deste autor e usaram-nas, nalgumas ocasiões, para reflectir sobre a natureza de algumas tarefas que propuseram aos alunos no âmbito do projecto.

Preparar meticulosamente as aulas com tarefas abertas

Quando nos conhecemos, Anita e Rebeca tinham pouca experiência de ensinar Matemática através de tarefas de investigação. A opção por este tipo de tarefas, em conjunção com a abertura que procurámos para os problemas, contribuiu para a preparação das aulas se tornar uma actividade mais exigente e abrangente. Rebeca não diferencia a intensificação da preparação consoante se trata de problemas ou tarefas de investigação, embora alguns cuidados que refere se prendam, mais directamente, com o segundo tipo de tarefas. Contrariamente, Anita foca-se, sobretudo, nas "diferenças" (E4, p. 24) associadas à preparação das aulas com tarefas de investigação, aquelas com que, nas suas palavras, "tenho mais cuidados (...) [e em] que eu noto mais diferenças" (idem).

Através de uma preparação cuidada acrescem, para ambas as professoras, as possibilidades de entenderem os raciocínios dos alunos e de não deixarem escapar aspectos que poderão ser importantes: "O facto de já ter aberto mais o leque ao explorar a tarefa, também me ajuda mais a entender o que os alunos dizem em princípio (e como o dizem), não é?" (Anita, E4, p. 26); "acontece muitas vezes não percebermos o que eles dizem, não é? E se eu já tivesse pensado na maior parte das possibilidades havia menos hipóteses que isso acontecesse. (Rebeca, E4, p. 24). Além disso, essa preparação possibilita investirem, no decurso da acção, maior atenção em aspectos que não podem ser antecipados. Anita coloca a ênfase na sua utilidade para os processos de decisão do professor. Rebeca centra-se na maior liberdade para a gestão das interacções, para a compreensão das novidades que podem emergir dos alunos e para potenciar as situações que ocorrem:

> As aulas em que estão envolvidas tarefas de investigação (...) exigem uma maior apropriação, por parte do professor, para decidir, ao longo da aula, quais os aspectos mais importantes mediante o que se pretende a desenvolver. Por exemplo, quando dar mais algum tempo aos alunos para explorarem uma nova ideia que surja na discussão... (Anita, E4, p. 26)

> Se eu tinha que estar com atenção a várias coisas, a várias possibilidades que pudessem surgir, e se queria potenciá-las, convinha que eu soubesse bem e estivesse bem preparada para não ter que estar ainda na aula a decifrar todas as possibilidades e pudesse pensar nas que surgiam neles, nas novidades. Para me

> libertar para outras coisas, não é? Estava mais liberta em termos de gestão de diálogo na sala de aula. (Rebeca, E4, p. 24)

A análise das reflexões de Anita e Rebeca, a propósito das diferenças introduzidas na preparação de aulas quando se trata de tarefas de investigação e/ou problemas, permite evidenciar que a intensificação do trabalho se organiza em torno de cinco aspectos. O primeiro prende-se com uma profunda exploração matemática da tarefa tendo em vista imaginar possíveis percursos de exploração pelos alunos: “Depois exploro a tarefa tentando várias possibilidades de caminhos que imagino que os alunos poderão seguir, mas, atenção, tenho consciência de que podem surgir outros” (Anita, E4, p. 25); “resolvo mais vezes — não resolvo só por alto algumas coisas — prevendo todas as possibilidades que possam surgir na aula. Não prevejo todas, mas pelo menos prevejo aquelas de que eu me vou lembrando” (Rebeca, E4, p. 23). Rebeca inicia a preparação com uma antecedência considerável para se dar tempo de maturação de ideias e, diferentemente do que faz noutras ocasiões, elabora registos pormenorizados das hipóteses que lhe ocorrem: “E andava ali a remoer um bocado, não é? E normalmente até preparava com mais antecedência e ia pensando, e ia fazendo, e depois na véspera ou no dia antes fazia as tais hipóteses todas, escritinhas” (idem, p. 23).

O segundo aspecto centra-se no levantamento de possíveis sugestões a apresentar no decurso da exploração da tarefa. Nestas sugestões, Anita inclui “algumas formas de provocar os alunos” (idem) ideia que vai ao encontro do que a colega designa por “possibilidades” (Rebeca, E4, p. 23) que “às vezes, levava na manga (...) para o caso deles não argumentarem” (idem). Anita refere, também, o que designa por “dicas”, ou seja, algo a apresentar “no caso dos alunos não avançarem” (E4, p. 25). Costuma identificar estas “dicas” pensando “naqueles casos mais concretos (...) por exemplo, *então pensem nas operações elementares*” (idem). Considera, no entanto, importante ir para além deles e começar, também, a reflectir sobre como poderá tirar partido das “memórias da turma” (idem).

O terceiro aspecto é referido por Anita e prende-se com o imaginar o desenvolvimento da actividade da aula numa tentativa de identificar recursos para fazer emergir "momentos de discussão ricos":

> Dentro daquilo que eu consigo imaginar, daquilo que me ocorre, o que é que eu costumo fazer? Penso no que poderá ser rentabilizado durante a discussão. Penso: *Se acontecer isto, o que é que eu posso aproveitar e fazer? O que é que eu quero, o que é que eu não quero, desenvolver com determinadas coisas em termos de argumentação matemática?*. Depois, na aula, surgem sempre outras, mas então!... (risos). (Anita, E4, p. 25)

A articulação das modalidades de trabalho na aula e a previsão de alturas em que poderá ser importante fazer pontos de situação é o quarto aspecto em que incide a intensificação do trabalho de preparação. Tal como o anterior, também é destacado por Anita. Na sua perspectiva, quando se trata de tarefas de investigação, as aulas "merecem uma reflexão mais cuidada sobre o quando, o como interromper o trabalho dos alunos" (E4, p. 26). Assim, pensa e anota os momentos para "interromper o trabalho de pares, ou em grupo, e alargar a discussão à turma" (idem, p. 25) e, embora reconheça que nem sempre tem "sangue frio" (idem, p. 27) para suspender uma discussão quando o final da aula se aproxima, salienta a importância de "se prever tempo para (...) fazer uma reflexão sobre o que se fez até ao momento" (idem, pp. 26-7).

Por último, destaco que a gestão do tempo da aula constitui para Anita e Rebeca, simultaneamente, um aspecto a que dedicam atenção mas que é, simultaneamente, uma fonte de dificuldades. Os comentários que tecem à preparação das aulas leccionadas após o término das sessões de trabalho do grupo de pesquisa (Maio 2003) apoiam esta ideia e ilustram de que modo procuraram lidar com a gestão do tempo:

> Tipo de trabalho realizado antes. (...) Pensei na gestão do tempo, tanto tempo para isto tanto tempo para aquilo... Faço sempre um bonequinho mas depois normalmente não respeito os meus bonequinhos, vá-se lá saber porquê... (risos). Eu bem faço, mas depois!!!... Eu bem escrevo: tanto tempo para a exploração, tanto para a recolha das conjecturas, tanto para a discussão, mais tanto para pensarem e não sei quê... Há ali aquela planificaçãozinha... (Anita, E4, pp. 1-2)

> Penso que vai ser mais rápido... (...) acabo por me alargar mais, a maior parte das vezes, e acabo por nunca conseguir fazer tudo o que tinha pensado. Ou seja, faço mas é na aula a seguir. Naquela aula não consigo. Portanto, tenho mas é, se calhar, que começar a marcar tempos... Mas também não sei se resulta, porque eu na última aula [aula gravada em Maio de 2003] marquei tempos e também não consegui (risos)... Ou então tenho que ser muito disciplinada!... (risos). (Rebeca, E4, p. 22)

Com as expressões "marcar tempos" e fazer "bonequinhos", as professoras querem significar que fazem a distribuição do tempo total da aula pelas principais componentes imaginadas numa tentativa de melhor o rentabilizar. Com Rebeca, esta estratégia começa a surgir apenas perto do final do projecto: "E agora, por último, até já destinei tempos para cada uma das coisas" (E4, p. 23). Contudo, apesar disso, e tal como acontece com a colega, o tempo continua a escapar-se sem que consiga concretizar tudo aquilo que tinha delineado. Como as palavras das professoras revelam, quando terminámos o projecto, a gestão do tempo continua a ser um problema não resolvido para ambas.

Criando contextos para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática

Esta secção centra-se na análise do que designo por argumentação matemática em acção, ou seja, do trabalho realizado nas aulas intencionalmente preparadas para surgirem e se desenvolverem episódios de argumentação matemática. Estruturo-a em três partes onde me debruço sobre as facetas do trabalho de Anita e Rebeca que, na sua perspectiva, contribuíram, globalmente, para o que consideram ter sido uma evolução positiva dos alunos no que concerne ao seu envolvimento em actividades de argumentação. Foco-me, em primeiro lugar, em factos ou circunstâncias relacionadas com a formulação, avaliação e prova de conjecturas. Em segundo lugar, debruço-me sobre potencialidades da exploração de desacordos e cuidados e riscos associados a esta exploração. Por último, abordo vertentes relativas ao desenvolvimento do discurso da aula, centrando-me na negociação de normas de acção e interacção consideradas favoráveis ao referido envolvimento e em aspectos respeitantes à orquestração de discussões colectivas.

Incentivando a formulação, avaliação e prova de conjecturas

Das catorze[72] tarefas apresentadas às turmas nas aulas que presenciei, onze apelavam à geração de exemplos e sua análise, à identificação de padrões e à construção de enunciados generalizadores desses padrões, de validade provisória mas razoáveis. A actividade de formular conjecturas prende-se com todos estes aspectos e, nesse sentido, incluo nesta actividade a particularização, generalização e formulação de conjecturas no sentido de Mason, Burton e Stacey (1984).

Analiso o trabalho das professoras que mais directamente se prende com o incentivar a formulação, avaliação e prova de conjecturas a partir de três aspectos: (a) negociação dos significados destas actividades e sua valorização; (b) apoio à formulação de conjecturas pelos alunos e sua partilha na turma; e (c) envolvimento dos alunos em experiências de prova, incluindo aqui a refutação pela apresentação de contra-exemplo(s) ou outro tipo de prova.

Negociando significados, valorizando as actividades

Nalgumas ocasiões em que os alunos se envolveram em actividades de formulação ou prova de conjecturas, Anita e Rebeca introduziram mudanças no discurso da aula que possibilitaram que estas actividades se tornassem um objecto explícito de discussão ou reflexão focada nos significados de conjectura, contra-exemplo ou prova, na natureza dos processos de formulação ou refutação de conjecturas, no valor da actividade de formulação de conjecturas ou na necessidade de provar as que não se refutam. Por vezes, este *discurso reflexivo* (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997) desenrolou-se durante as fases de trabalho de pares/grupos. Foi o que aconteceu, por exemplo, no grupo que integrava duas alunas

[72] Nestas catorze tarefas considero as doze apresentadas nas aulas que foram objecto de reflexão no grupo de pesquisa (tabela 8, capítulo V) e as duas que Anita e Rebeca propuseram aos alunos nas aulas gravadas na terceira etapa da segunda fase do projecto.

que não pertenciam à turma no anterior ano lectivo, numa das aulas leccionadas por Rebeca, com a tarefa *À procura de dízimas finitas,* analisada no capítulo VI. Outras vezes, a reflexão era colectiva, no sentido em que a actividade envolvia a turma no seu conjunto. Um exemplo é a discussão desencadeada pelo desafio lançado por Anita à turma, para destacar o carácter provisório das conjecturas, na sua primeira aula que foi objecto de reflexão no grupo de pesquisa e cuja análise é apresentada no capítulo VII em *A propósito da tarefa Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*

Uma preocupação recorrente e transversal das duas professoras, ao longo do projecto, foi aproveitarem acontecimentos ocorridos no âmbito da exploração de tarefas concretas para destacar o carácter provisório das conjecturas. Passados cerca de dezoito meses de o termos iniciado, na turma de Anita continuavam a surgir situações que, na sua perspectiva, justificavam manter a insistência nesta ideia: "É uma conjectura fundamentada, que não aparece assim do nada... Como é que uma conjectura assim pode estar mal? Não pode. Aproveitei para discutir isto... (...) Quis fazer passar, outra vez, a ideia de que uma conjectura não pode estar errada" (Anita, E4, p. 3).

A ênfase na provisoriedade das conjecturas foi acompanhada, de perto, pela valorização da própria actividade de formulação de conjecturas. Anita e Rebeca recorreram, com frequência, a conversas sobre o trabalho dos matemáticos através das quais procuraram evidenciar como se "constrói o conhecimento matemático" (Rebeca, TST 19, p. 14) e que a descoberta de conjecturas é uma parte essencial deste trabalho: "Também lhes contei aquela história da conjectura que não estava provada e que havia um prémio. (...) E sobre a conjectura de Fermat. (...) É importante perceberem isso" (Anita, TST 24, p. 10, 28/05/02). Estas conversas contribuem, na perspectiva de Anita, para ajudar os alunos a "compreender como se constrói a Matemática" (idem), ideia que vai ao encontro de uma outra expressa pela colega: "Se calhar também é positivo explicar tudo aquilo das conjecturas, do trabalho dos matemáticos, das conjecturas que demoraram muito tempo a provar, etc. (...) porque nota-se uma evolução" (Rebeca, TST 39, p. 16, 2/01/03). A análise das aulas leccionadas a propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas,* apresentada nos capítulos VI e VII, inclui exemplos destas conversas.

Para além das conversas sobre o trabalho dos matemáticos, Anita e Rebeca recorreram, também, a outras estratégias que, a seu ver, poderiam contribuir para tornar inteligível que o valor da actividade de formulação de conjecturas não depende destas se refutarem ou não. Estas estratégias justificavam-se porque os alunos de qualquer uma das turmas tendiam a desprezar e não anotar aquelas para as quais encontravam contra-exemplos, o que dificultava, nomeadamente servirem-se delas para descobrirem novas conjecturas. Entre essas estratégias está a insistência no registo de todas as conjecturas formuladas durante o trabalho de pares/grupos, o pedido para serem partilhadas na turma mesmo que a actividade posterior tivesse conduzido à sua refutação, a análise colectiva de muitas das conjecturas partilhadas e, no caso de Rebeca, a solicitação de relatórios sobre a actividade desenvolvida no âmbito de tarefas de investigação.

Ambas as professoras investiram esforços significativos na negociação do significado de prova. Esta negociação assumiu vários contornos. Dedicaram muita atenção à prova da falsidade pela apresentação de contra-exemplo: qual o significado de contra-exemplo, quais os efeitos da descoberta de um contra-exemplo na validade de uma conjectura e o que é necessário para que um exemplo seja um contra-exemplo, são questões que originaram discussões frequentes em qualquer uma das turmas. Este último aspecto é particularmente visível nalgumas das aulas leccionadas a propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas*. A ideia de que a prova de uma conjectura não consiste na sua verificação por um número limitado de casos foi, também, objecto de atenção intensa por Anita e Rebeca que, sistematicamente, se esforçaram por tornar inteligível que para se estar perante a prova da veracidade de uma conjectura, o raciocínio tem que lidar com a generalidade dos objectos referidos no seu enunciado.

Por vezes, há movimentos de ensino cujo propósito é evidenciar que resultados previamente provados podem ser usados para garantir a veracidade de afirmações, o que não é possível na ausência de prova, ou para analisar se os alunos compreenderam esta ideia. Por exemplo, no âmbito da produção da prova da "conjectura do paralelogramo"[73], Anita evoca uma proposição da aula anterior e depois de incentivar os alunos a analisarem se eram verificadas as condições que permitem aplicá-la, refere: "Essa proposição nós já demonstrámos, podemos usar. Então o que é que acontece, por essa proposição que nós já demonstrámos?" (TA 21/05/02, p. 7). Além disso, justapõe ao registo do passo da prova da conjectura, cuja justificação depende desta proposição, a frase "por uma proposição demonstrada na aula anterior" (idem). Outro exemplo de um dos referidos movimentos, preparado previamente à aula, são as "provocações" apresentadas por Rebeca na sequência da prova da conjectura $GT=10x+4n$ formulada no âmbito da exploração da tarefa *Mais números em Círculos*.

Em suma, o que anteriormente apresentei permite apoiar a ideia de que Anita e Rebeca concretizaram, ao longo das aulas, movimentos de ensino de vários tipos favoráveis à compreensão, pelos alunos, do significado e importância das actividades de formulação e prova de conjecturas. Estes movimentos incluem-se entre os aspectos que, segundo Rebeca, "facilitam o processo de argumentação matemática na sala de aula" (E2, p. 10). A experiência vivida ao longo do desenvolvimento do projecto contribuiu para que "estivesse mais atenta" (idem) a eles ou os introduzisse nas suas práticas: "antes discursos explícitos assim não tinha [referência às conversas sobre o trabalho dos matemáticos] (TST 39, p. 16). As reflexões apresentadas na terceira entrevista revelam, também, que esta experiência trouxe mudanças que, em conjunto, evidenciam maiores preocupações com a clarificação de conceitos associados à formulação e prova de conjecturas:

> Mudou inclusivé porque antes, apesar de eles já fazerem fichas de trabalho em que lhes pedia para formularem conjecturas e para tentarem explicar, nomeadamente com o *Sketchpad* e tudo isso, mas era diferente... (...) Porque acho que não dava tanta visibilidade, se calhar, às conjecturas... Era diferente, de certeza. Acho que as coisas não ficavam tão... como é que eu hei-de dizer?

[73] Esta conjectura foi formulada pelos alunos de ambas as turmas a partir da exploração da tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*. Indica que o polígono resultante da união dos pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer é um paralelogramo.

> Se calhar não reforçava tanto as coisas, não chamava tanto a atenção, não havia tantos discursos no sentido de "porque é que isto é uma conjectura?" "como é que formulam conjecturas?", ... Não me preocupava, se calhar, com esse tipo de discurso, com a interacção entre eles sobre o significado dessas coisas. E, se calhar, isso não era tão interiorizado pelos alunos, precisamente porque também não havia discussões entre eles no sentido de clarificar esses conceitos. Se calhar passei a preocupar-me com isso. (Rebeca, E3, p. 6)

Contrariamente ao que acontece com Rebeca, não transparece no discurso de Anita se algum dos referidos movimentos é fruto da sua participação no projecto. É, no entanto, plausível considerar que, pelo menos, se intensificaram significativamente, fruto da maior frequência com que apresentou tarefas que envolviam formulação e prova de conjecturas e das reflexões que foi fazendo e ouvindo sobre experiências próprias ou da colega.

Apoiando a formulação e partilha de conjecturas

A actividade de formulação de conjecturas foi desenvolvida em trabalho de pares/grupos ou em trabalho com toda a turma. Designarei esta última modalidade por trabalho colectivo. Em cada turma envolvida no projecto estas modalidades tiveram, contudo, incidências predominantes diferenciadas.

Durante o trabalho de pares/grupos — fundamentalmente em pares, no caso de Anita, e em grupo no de Rebeca — foram formuladas a maior parte das conjecturas que, posteriormente, vieram a ser analisadas e discutidas pelas turmas. O trabalho colectivo incidiu, sobretudo, na partilha das conjecturas, no aperfeiçoamento do seu enunciado visando evitar ambiguidades ou introduzir uma maior correcção, e na filtragem destas conjecturas pela indicação ou procura de contra-exemplos com o propósito de seleccionar aquelas que pareciam ser verdadeiras. Menos frequente durante o trabalho colectivo foi (a) a reformulação de conjecturas tendo em vista evitar a refutação, ou (b) a construção completa de enunciados a partir da observação, pela turma, de regularidades identificadas por alguns dos seus elementos. Nas análises das aulas apresentadas nos capítulos VI e VII leccionadas a partir da tarefa *À procura de dízimas finitas*, o aperfeiçoamento das conjecturas de dois alunos a partir de iniciativas de Anita e o da conjectura "c. pot. f. i." constitui um exemplo do que considero uma actividade do tipo (a). No âmbito da exploração da mesma tarefa, o processo de elaboração do enunciado da conjectura "c. pot." em ambas as turmas, ilustra o significado que atribuo à expressão "construção completa de um enunciado" incluída em (b). Nestes últimos casos, contrariamente aos outros, não existia um texto elaborado durante o trabalho de pares/grupos que era aperfeiçoado em discussão colectiva.

Anita e Rebeca não necessitaram de investir grandes esforços para motivarem os alunos a formularem conjecturas com os seus pares. Apresentaram, a grande maioria das vezes por escrito[74], as tarefas que apelavam à formulação de conjecturas, e após alguns momentos para organização do trabalho, os alunos iniciavam, com empenho, a sua actividade. A descoberta de conjecturas despertava-lhes curiosidade. O entusiasmo era visível e não foi raro, a exemplo do que aconteceu com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, tanto Anita como Rebeca terem tido dificuldades em interromperem a fase de trabalho de pares/grupos para passarem a uma outra de trabalho colectivo.

Quando iniciámos as sessões de reflexão sobre aulas, um dos movimentos mais usuais de muitos alunos, de qualquer uma das turmas, era solicitarem às professoras que lhes indicassem se o que tinham descoberto estava certo. Anita e Rebeca lidaram com esta situação tentando combater a "irresponsabilidade matemática dos alunos" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2001, p. 60). Este foi um combate que atravessou várias aulas e actividades, não apenas relacionadas com a formulação de conjecturas, e que não se revelou simples sobretudo na primeira etapa do projecto. Na primeira aula de Rebeca (*A propósito da tarefa Números em círculos*, capítulo VI) a professora evidencia um esforço muito significativo para não ceder aos apelos dos alunos que pretendiam ver validadas ou invalidadas as conjecturas através da sua "autoridade de professora" (TST 14, p. 19, 12/03/02). Revela, igualmente, esforço de autocontrolo da "tendência enorme para dizer se está certo ou errado" (idem, p. 17) que, por vezes, passava por "fugir" (idem) dos

[74] A única excepção foi a tarefa *Mais números em círculos* apresentada oralmente.

alunos. Anita, sobre o seu acompanhamento da formulação de conjecturas pelos grupos com a mesma tarefa, refere também que, na altura, nem sempre conseguia evitar "trair-se" de modo a que os alunos assumissem o papel que considerava adequado:

> Ando nos grupos a ver mais ou menos como estão as coisas. (...) Depois há alguns que dizem que é o número do centro mais quatro. E eu não resisti! Saiu-me logo a resposta. (...) Em vez de perguntar qualquer coisa que os levasse a discutir, não! Pimba! Se eles não contrariassem devia tentar que argumentassem, mas dei a resposta... Eu bem tento, mas às vezes, traio-me! Estás a ver? Isto é um problema! Primeiro tenho que conseguir controlar-me mais a mim... (Anita, TST 18, pp. 2-3, 16/04/02)

Perto do início do projecto, a "irresponsabilidade matemática dos alunos" no âmbito da formulação de conjecturas, andava a par e passo com um envolvimento débil na avaliação da sua plausibilidade. Enunciavam-nas gerando dados, por vezes em número muito limitado, e observando-os ou manipulando-os. O teste com outros casos particulares não tinha, em geral, uma expressão muito significativa. Quando lhes parecia que estava "bem" chamavam a professora.

Com o passar do tempo e uma forte insistência de Anita e de Rebeca na necessidade de testarem conjecturas com casos diferentes daqueles que permitiram formulá-las, na importância de tentarem encontrar contra-exemplos e na compreensão do processo de formulação e refutação de conjecturas, a situação foi-se alterando. Quando encerrámos as sessões de trabalho colectivo, Rebeca indicou que "uma das evoluções" (E3, p. 21) dos seus alunos foi "compreenderem que os exemplos não servem para provar, mas que nos ajudam a formular conjecturas" (idem). Esta mesma evolução é visível na turma de Anita. Por exemplo, na aula em que trabalharam com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, algumas das conjecturas apresentadas na turma foram obtidas através de processos com uma certa sofisticação matemática. Como é visível na análise apresentada no capítulo VII, alguns alunos lidaram com contradições encontradas para conjecturas primeiramente formuladas excluindo-as como contra-exemplos através de um método que tem ressonâncias com o bloquear excepções no sentido de Lakatos (1984), ou seja, introduzindo nos enunciados especificações de classes de casos de modo a não surgirem essas contradições. Através deste processo foram obtendo aperfeiçoamentos sucessivos que não refinaram mais porque a professora optou por lhes interromper a actividade para haver tempo para a fase de análise e discussão colectivas.

Anita e Rebeca acompanharam o trabalho de pares/grupos tentando não substituir os alunos na actividade matemática em que pretendiam vê-los envolvidos. Desde logo, procuraram que assumissem a responsabilidade por compreenderem o enunciado das tarefas, embora, se necessário, com o seu apoio. Têm consciência de que a apresentação de indicações clarificadoras acelera o entendimento. No entanto, na perspectiva de ambas, é importante os alunos esforçarem-se, também, por interpretarem o enunciado das tarefas. Esta perspectiva transparece, no caso de Rebeca, na análise da aula com a tarefa *Números em Círculos* apresentada no capítulo VI. Os comentários de Anita vão no mesmo sentido: "Sabes que é intencional eu não ler, não explicar o que se pede. Eu acho que eles têm que ler e interpretar. Se não depois, como é que é noutras situações, por exemplo, nos testes?" (Anita, TST 23, p. 8).

Além disso, com o propósito de evitar bloqueios, as professoras clarificaram, recordaram ou ajudaram a evocar, através de questões, ideias anteriormente estudadas. Analisaram também, com seriedade, os percursos seguidos pelos alunos, e não foi invulgar raciocinarem matematicamente face aos alunos ou com os alunos, em particular quando se confrontavam com conjecturas não previamente pensadas e cujo significado não era óbvio. A ordenação decrescente da sequência numérica incluída no padrão da tarefa *Números em círculos*, ou a conjectura formulada por um grupo para a sequência dos inteiros negativos, situações referidas no capítulo VI no âmbito da análise da aula com esta tarefa, ilustram situações deste tipo. Paralelamente revelam que nem sempre é fácil, no momento, compreender raciocínios inesperados. Por vezes, o "medo de dizer demais" (Anita, TST 38, p. 35, 23/11/02), contribuiu para não apresentarem indicações que, mais tarde, vieram a considerar importantes para o progresso da actividade dos alunos. É o caso, nomeadamente de aspectos relativos à organização dos exemplos explorados.

Rebeca, a propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas*, salienta que ensinar aos alunos processos de organização de exemplos é "muito importante" (TST 38, p. 56), sobretudo quando estes não estão muito familiarizados com a formulação de conjecturas.

O registo, pelos alunos, das conjecturas formuladas durante o trabalho de pares/grupos, foi um dos aspectos a que, tanto Anita, como Rebeca, dedicaram muita atenção desde as primeiras aulas. Esta preocupação atravessou o desenvolvimento do projecto, mas exigiu investimento de tempo e esforço diferenciados nas duas turmas. Como referi, em qualquer uma, os alunos relutavam em deixar traços das conjecturas refutadas e ambas as professoras tentaram "evitar o faz, refuta, apaga", expressão usada por Anita na reflexão escrita sobre as aulas em que trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas*. A diferença entre as turmas é que os alunos desta professora, contrariamente aos da colega, não negligenciavam os restantes registos da actividade desenvolvida: "Os teus [para Anita] registam tudo e os meus não. E eu também insisto... (...) E olha que eu na aula em que propus esta tarefa insisti imenso para fazerem registos" (Rebeca, TST 23, p. 2). Rebeca, considerando esta diferença, coloca a hipótese dela se relacionar, também, com a diferença entre si e Anita quanto àquilo que é objecto de anotação no quadro: "Tu também tens o hábito de registar tudo no quadro. E eu não. Há muitas coisas que só digo oralmente (...) E se calhar eles apanham isso de mim. (...) Pode estar relacionado. (...) Pode ser uma explicação" (idem). Anita não exclui a hipótese, embora indique que não consegue identificar com clareza as razões para nunca ter tido "problemas com os registos" (idem, p. 3): "Pode ser do meu exemplo como tu dizes. Não sei... (...) Também não sei bem porque é" (idem).

O trabalho desenvolvido ao longo do projecto permite destacar vários tipos de dificuldades ou problemas associados à formulação ou registo de conjecturas. Uns mais directamente relacionados com a actividade dos alunos e outros respeitantes ao trabalho do professor.

Algumas dificuldades dos alunos podem ser, segundo Rebeca, de ordem linguística: "tem que fazer sentido quando se escreve (...) ter alguma lógica, perceber-se (...) têm dificuldades em traduzir para um português que se perceba as ideias que têm" (TST 41, p. 11). Estas dificuldades podem "também contribui[r] para a relutância em registar [conjecturas]" (idem). Esta mesma perspectiva é partilhada por Anita para quem várias das dificuldades dos alunos em Matemática advêm de incompreensões da língua materna.

Há, além disso, dificuldades dos alunos com o registo de conjecturas que parecem não ser apenas de ordem linguística, mas não provir, também, do não entendimento do significado de uma descoberta feita: "No fundo eles descobrem, pelo menos a segunda [regularidade], de uma forma intuitiva, observam que há ali qualquer coisa, mas têm dificuldade em formulá-la em termos escritos" (Rebeca, TST 28, p. 13). Este comentário de Rebeca prende-se com uma situação surgida na aula em que a colega trabalhou com a tarefa *Quadrados de números terminados em 5*. Traduz a estranheza que lhe causa, tal como causou a Anita, o facto de uma aluna ter indicado, sem problema algum, um processo que permite determinar os quadrados dos números naturais terminados em cinco servindo-se de exemplos, mas não ter sido capaz de enunciar um texto tradutor da globalidade da conjectura. Também o não foram os restantes colegas da turma, mesmo depois da aluna a ter explicado apoiando-se num esquema significativamente ilustrativo da sua descoberta (figura 11), que desenha no quadro por sua iniciativa (ROA, 11/06/02, p. 5):

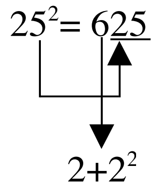


Figura 11: Como calcular rapidamente o quadrado de um número terminado em 5?

Mesmo depois de Anita ter constatado que os alunos compreendiam o processo de determinação de quadrados de números terminados em 5 apresentado pela colega, não lhe foi simples fazer surgir contribuições possibilitadoras da construção de um enunciado da conjectura que evitasse a referência a exemplos. Esta construção ocupou um tempo significativo de trabalho colectivo. A constatação deste fenómeno no grupo de pesquisa e a tentativa de compreensão do seu porquê, fez sobressair a hipótese de que, na formulação de conjecturas, concomitante ou predominantemente a dificuldades de ordem linguística, poderão colocar-se aos alunos problemas relacionados com a passagem da intuição de um padrão para a racionalização subjacente ao acto de generalizar que permite articulá-lo sem o recurso a casos particulares que permitiram intuí-lo.

Uma dificuldade com que o professor pode confrontar-se no âmbito da formulação de conjecturas é, na perspectiva de Rebeca, nem sempre ser simples negociar com os alunos um enunciado que tenha "a ver com a Matemática e com o contexto da Matemática" (Rebeca, E3, p. 38) e que, além disso, faça sentido para os alunos:

> Tudo o que eles digam é uma conjectura, mas tem que ter alguma base, mais explicitamente ou menos explicitamente, tem que ter algumas hipóteses e alguma tese, apesar de nem estarem bem explicitadas. Tem que haver um ponto de partida e algo a que cheguemos e acho que às vezes é difícil negociar essa escrita, é difícil fazer com que essa escrita faça sentido. (Rebeca, E3, p. 37)

Além desta dificuldade, pode surgir o problema dos alunos, no âmbito da formulação de conjecturas, darem "pouca importância aos tais detalhes" (Anita, TST 24, p. 45), ou seja, a um aspecto de "linguagem que é uma hipótese donde se parte para aquela conclusão" (idem, p. 46). Este problema prende-se com um outro derivado de, por vezes, os alunos deixarem implícita informação significativa nas conjecturas que indicam, e haver necessidade de os ajudar a compreender a relevância desta informação e a importância de a explicitarem. Um caso revelador da não explicitação de toda a informação importante no enunciado de algumas conjecturas surge na aula em que Rebeca trabalha com a tarefa *Números em círculos* analisada no capítulo VI. Na sessão de reflexão sobre esta aula, trago à tona a questão dos registos, no quadro, das conjecturas formuladas pelos alunos, e ambas as professoras encontram potencialidades na ideia. Anita põe-a em prática na aula em que explora a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* propondo a dois alunos que vão ao quadro registar a conjectura formulada durante o trabalho de pares. Como procurei ilustrar no capítulo VII, o processo de escrita proporcionou um meio de reforçar a necessidade de explicitar informação pressuposta, foi favorável ao envolvimento de alunos na comparação do primeiro enunciado registado com a sua posterior alteração e, assim, contribuiu para a conjectura ser reescrita de uma forma mais clara e matematicamente correcta. Subsequentemente a esta aula, a segunda analisada no grupo de pesquisa, todas as conjecturas partilhadas na turma foram registadas no quadro ou em acetato por qualquer uma das professoras.

Na perspectiva de Anita, promover discussões focadas na análise de enunciados de conjecturas pode, entre outros aspectos, ajudar os alunos a tomarem consciência de que os "tais detalhes" de que fala não derivam, apenas, de preocupações linguísticas, mas têm consequências matemáticas. Por esta via, essas discussões podem ajudar os alunos a compreender a importância de explicitarem no enunciado da conjectura toda a informação relevante para o entendimento do seu significado. Embora considerando positiva a troca de ideias que ocorreu na aula com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* a propósito do enunciado da conjectura para pares de números, uma das críticas que Anita tece a essa aula, quando a revisita no final do projecto, é a discussão não "ter sido rentabilizada de outra forma" (E4, p. 16). A seu ver teria sido importante tornar claramente visível, para os alunos, que a sua preocupação com a explicitação de aspectos omissos no enunciado da conjectura não se prendia, apenas, com questões de forma ou estilo de escrita:

> Porque às tantas andei ali quase que a insistir só no português. Para mim é óbvio porquê, mas para eles pode não ser. (...) podia ter feito de outra maneira. Deixava a conjectura como a Alda a disse, discutia essa conjectura, tal como ela a tinha formulado, para chegarmos à conclusão de que era falsa. E depois a reformulação desta conjectura seria uma outra conjectura que sairia do aperfeiçoamento da primeira. Na aula houve um misto entre uma coisa e outra, o que levou a que as coisas ficassem menos claras. (Anita, E4, p. 16)

Como é visível neste extracto, na perspectiva de Anita, rentabilizar a discussão de outra forma passava, neste caso, por instituir a conjectura enunciada como objecto de análise colectiva "independentemente de ser esta que se estava a pretender ou não" (E4, p. 16), o que poderia facilitar o entendimento de "que o português faz a diferença" (idem) e "se calhar seria mais eficiente, mesmo em termos do português" (idem). Adoptou esta estratégia numa outra aula em que submeteu à discussão uma conjectura apresentada por um aluno em que estava omissa informação importante mas que registou no quadro tal como lhe foi indicada. Na ausência de contribuições que permitissem desvelar esta informação, apresentou ela própria "um contra-exemplo para reforçar que eles só poderão tirar aquela conclusão se unirem consecutivamente os pontos médios, sob pena de não obterem quadrilátero nenhum[75]" (TST 24, p. 47).

Um outro problema que pode surgir associado ao registo de conjecturas, quando este é feito no quadro pelo professor a partir de contribuições apresentadas por vários alunos, é o risco de, não intencionalmente, sobrevalorizar uma contribuição que dá jeito porque facilita o trabalho de ensino, obscurecendo, por esta via, uma conjectura, igualmente plausível, mais de acordo com o que é solicitado na tarefa e de mais fácil compreensão, pelo menos por alguns alunos. O relato, por Rebeca, de um episódio ocorrido na aula em que trabalhou com a tarefa *Quadrados de números terminados em 5* permite ilustrar este risco:

> Eu estava a registar no quadro o que o José E. estava a dizer que era: *Os quadrados de números que terminam em 5 obtêm-se multiplicando o número que está antes do 5 pelo número a seguir.* E depois pergunto: *E mais?* E a Marina responde: *Junta-se a seguir o 25*. Depois o Rogério diz uma coisa que vai noutra direcção. Diz: *Vezes 100 mais 25.* E eu segui-o e aquela ideia em que eu estava a insistir desde o início, o processo rápido de calcular o quadrado de um número terminado em 5, perdeu-se um bocado. Antes tentei travar essa direcção mas depois aqui avancei. Se calhar porque estavam a dar-me aquela expressão com o 100... Não sei porque é que me deu para agarrar logo nesta ideia do Rogério. (...) Mas perdeu-se a escrita da conjectura do José E. e da Marina como eles estavam a dizer e acho que se perdeu o sentido de descobrir o processo rápido... (Rebeca, TST 42, p. 74)

[75] Referência a um episódio em que submeteu à discussão da turma um enunciado, percursor da "conjectura do paralelogramo", formulado no âmbito da exploração da tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*.

A contribuição de um dos alunos referidos neste extracto, contrariamente à conjectura formulada pelos colegas, facilitava a escrita da conjectura em linguagem algébrica e, neste sentido, "era boa para a prova" (Rebeca, TST 42, p. 74). A professora coloca a hipótese de ter sido esta a razão que a levou a querer "aproveitá-la logo ali..." (idem) No entanto como é visível através das suas palavras, considera que não o devia ter feito apesar da prova algébrica da conjectura ser um dos objectivos visados para a aula. Na sua perspectiva, é importante que, quando alguns elementos da turma querem avançar, o professor saiba discernir se é altura de o fazer, o que passa por "saber dizer na altura certa *vá, espera aí agora...*" (idem, p. 75).

Um problema diferente dos anteriormente indicados, oriundo de registar por escrito as conjecturas partilhadas na aula de modo aos seus enunciados serem visíveis por toda a turma, é o tempo que os registos podem exigir: "Optei por registar todas as conjecturas e foi importante. Dei muita importância ao facto deles registaram as conjecturas a que chegassem na folhinha deles. (...) O problema é perder-se muito tempo" (Rebeca, TST 19, p. 13). Se as conjecturas forem analisadas pela turma numa aula diferente daquela em que são formuladas, poder-se-ão imaginar soluções para não investir tempo lectivo nos registos. No entanto, esta situação não aconteceu com a quase totalidade das aulas leccionadas por Anita ou Rebeca por consideraram mais favorável à emergência de episódios de argumentação matemática, a partilha de conjecturas ser feita, ou pelo menos iniciada, na aula em que são descobertas.

Progressivamente, as conjecturas formuladas pelos alunos de ambas as turmas foram perdendo muito do carácter ambíguo e implícito que as caracterizava no início do projecto. A insistência nos registos da actividade desenvolvida durante as fases de trabalho de pares/grupos contribuiu, certamente, para esta alteração. No entanto, não menos importante parece ter sido a visibilidade dada às conjecturas através dos registos escritos observáveis por todos os alunos e a sua submissão à análise pela turma. Com efeito, ao facilitar a instituição dos seus enunciados como objecto de reflexão colectiva, proporcionou em diversas ocasiões, de que a aula com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* é exemplo, oportunidades significativas de trazer à tona aspectos omissos ou menos claros. Deste modo, o registo no quadro/acetato das conjecturas formuladas e a actividade daí decorrente, parece ter favorecido, também, a aprendizagem da formulação de conjecturas.

Falando agora da estrutura das aulas em que os alunos se envolveram em actividades de formulação de conjecturas, pode dizer-se que a maioria teve uma estrutura global semelhante àquelas em que Anita e Rebeca trabalharam com a tarefa *À procura de dízimas finitas*. Ou seja, havia uma primeira etapa de trabalho de pares/grupos de duração variável consoante o tempo destinado à exploração de cada tarefa e suas exigências, em que os alunos se dedicavam à particularização, generalização e elaboração de enunciados. Em seguida, as conjecturas eram partilhadas/avaliadas na turma antes de se passar a uma nova etapa focada na justificação ou prova daquelas que pareciam ser verdadeiras. A aula em que Rebeca trabalhou com a tarefa *Números em círculos* foi a única em que a ideia de prova foi introduzida nos grupos anteriormente à fase da partilha de conjecturas. Aquelas em que propôs *Mais números em círculos* e *Quadrados em quadrados* foram organizadas diferentemente. Não houve a etapa de trabalho de pares/grupos na aula dedicada à exploração da primeira destas tarefas e naquela em que a segunda foi apresentada, podem distinguir-se dez fases intercaladas das quais cinco de trabalho de grupo e cinco de trabalho colectivo (ROA, 27/05/02).

As fases das aulas referentes à partilha/avaliação de conjecturas tiveram traços comuns entre si e outros diferenciados. Comum, desde o início do projecto, foi a preocupação de Anita e Rebeca proporcionarem em todas as aulas ocasiões para as conjecturas particulares serem submetidas ao escrutínio público num auditório constituído pelo colectivo da turma. Recorrente foi, também, a intenção de fazerem surgir no espaço de discurso as várias conjecturas formuladas diferentes entre si quanto ao conteúdo, embora podendo ser matematicamente equivalentes em certos domínios ou até no mesmo domínio[76]. Depois de apresentada uma conjectura na turma, comum foi, ainda, a atenção inicial de ambas as professoras ir para a compreensão do seu significado quer por si próprias, quer pelos alunos que não as tinham enunciado. Neste processo são, por vezes, afastadas ambiguidades pela clarificação de termos usados ou explicitação de informação omissa, mas não é discutida a validade. No âmbito da compreensão de uma conjectura, nalguns casos, a atenção incidiu, também, no que tinha permitido formulá-las, ou seja, donde provinha a sua plausibilidade. Quanto a este último aspecto, entre as estratégias adoptadas estão a apresentação, pelos alunos, de exemplos que lhes deram origem, explicações sobre percursos que permitiram descobri-las e a análise colectiva de tabelas organizadoras de casos particulares explorados durante o trabalho de pares/grupos.

Uma diferença entre várias aulas da mesma professora, e também entre as professoras, foram os critérios adoptados para iniciar ou gerir a partilha de conjecturas formuladas durante o trabalho de pares/grupos. Anita e Rebeca tomam decisões sobre a quem dar a palavra baseando-se no conhecimento sobre a globalidade das conjecturas formuladas pelos alunos que lhes advém do acompanhamento do trabalho de pares/grupos. Por vezes, não escolhem elementos particulares, ou seja, é a iniciativa de um/uns aluno(s) que faz surgir a primeira conjectura. Noutras ocasiões, a situação é diferente. Por exemplo, Anita, numa tentativa de minimizar a ideia de que poderia ter preferência por uma ou outra conjectura ou por um ou outro aluno, iniciou a fase da partilha das conjecturas na aula em que trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas* baseando-se num critério de ordem espacial, ou seja, teve por referência os lugares dos alunos. Depois de apresentadas quatro conjecturas opta por pedir as diferentes das registadas mantendo o critério. Nesta aula, tal como fez noutras, delegou nos alunos a responsabilidade de avaliarem as suas próprias conjecturas de modo a decidirem se

[76] Por exemplo, as conjecturas "GT = C seguido de 4" e "GT=10×C+4", descobertas no âmbito da tarefa *Números em círculos,* foram consideradas diferentes. Também o foram duas das indicadas pelos alunos de ambas as turmas para, rapidamente, saberem qual o quadrado de um número natural terminado em 5 que diferiam entre si no processo de determinação dos algarismos anteriores ao final 25.

eram, ou não, diferentes. Em contrapartida, na aula com a tarefa *Quadrados de números terminados em 5*, as opções foram outras. O critério orientador para o início da partilha foi a maior frequência, na turma, de uma das duas conjecturas formuladas. Depois desta registada dá a palavra ao único par que tinha feito uma descoberta diferente. Na última aula, localizada muito perto do final do projecto, a primazia "na parte da apresentação das conjecturas" (Anita, E4, p. 2) foi dada "àqueles que costumam estar mais calados" (idem).

A diversidade de critérios para iniciar ao gerir a partilha de conjecturas está também presente no trabalho de Rebeca. Na aula com a tarefa *Números em círculos*, começou por interpelar o primeiro grupo a formular uma conjectura durante a fase de trabalho de grupo e a partir daí geriu a partilha passando a palavra a grupos que sabia terem feito descobertas diferentes. Noutra ocasião, nas suas palavras, "foi propositado (...) não começar por registar aquela que eu ia depois provar no final" (TST 19, p. 18) e iniciar o "levantamento das conjecturas" (idem) por alunos diferentes daqueles "que tinham formulado as mais gerais (...) para dar também importância ao seu trabalho" (idem). No caso de haver alunos que formulavam a mesma conjectura, outro dos critérios foi solicitar a apresentação aos que menos costumam participar espontaneamente na aula: "É engraçado que os alunos tomaram consciência de porque é que escolhi o grupo da Vânia. Nalguns relatórios (...) aparece que a professora pediu ao grupo da Vânia para apresentar o trabalho porque elas falam menos" (Rebeca, TST 40, pp. 62-3). Este critério tem, assim, ressonâncias com o último apresentado por Anita.

Um segundo aspecto em que se diferenciou a actividade desenvolvida por Anita ou Rebeca em várias das suas aulas ou ao longo do projecto, foi a articulação entre a partilha/compreensão de conjecturas e a sua avaliação com o propósito de identificar aquelas cuja veracidade se iria tentar provar.

Considero o exemplo das aulas em que qualquer uma das professoras trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas*. Rebeca entrelaça, em geral, a partilha/compreensão das conjecturas formuladas pelos alunos com a sua avaliação.

Regista a primeira, promove a sua discussão com a turma e quando há um consenso sobre a sua refutação, solicita a segunda. Embora com contornos um pouco diferentes, o mesmo se passa com duas outras conjecturas: cada uma é registada, analisada e quando considera adequado passa a uma nova conjectura. O modelo adoptado por Anita é diferente. Começa por registar no quadro todas as conjecturas que os alunos lhe ditam, por vezes, com pequenas alterações destinadas a clarificar o conteúdo. Em segundo lugar, solicita-lhes que, em pares, reflictam sobre a globalidade das enunciadas durante alguns minutos. Só depois passa à avaliação das conjecturas. Sistematicamente, procede à leitura de cada uma e promove a sua discussão orientando-se pelo propósito de obter consensos fundamentados sobre a sua validade ou, num dos casos, de fazer passar um aperfeiçoamento da conjectura à fase da prova da veracidade por não terem sido encontrados contra-exemplos.

A observação macroscópica de todas as outras aulas permite evidenciar que o padrão dominante, no caso das de Rebeca, e exclusivo, nas de Anita, foi começarem por fazer o levantamento e/ou registo de todas as conjecturas diferentes entre si e passarem, em seguida, à avaliação da sua validade. Ou seja, se excluir a abertura no trabalho colectivo proporcionado aos alunos para reflectirem com os colegas sobre o conjunto das conjecturas formuladas no âmbito da tarefa *À procura de dízimas finitas*, o padrão aproxima-se do modelo adoptado por Anita para articular as fases da partilha/compreensão das conjecturas e sua filtragem pela procura de contra-exemplos. Observo aberturas deste tipo em algumas aulas de Anita desde a primeira que observei embora a demarcação entre o trabalho colectivo e o trabalho de pares/grupos se tenha alterado com o desenvolvimento do projecto. Apenas muito perto do seu final Rebeca começa a introduzi-las nas suas práticas[77].

Considerando as aulas de ambas as professoras com a tarefa *À procura de dízimas finitas* e os dois modelos de articulação entre partilha/compreensão de conjecturas na turma e sua avaliação, constata-se que podem surgir episódios em que os alunos se envolvem em actividades significativas de argumentação

[77] Retomarei esta ideia na subsecção *Cuidando do discurso da aula* incluída neste capítulo.

matemática em qualquer um dos modelos. A análise destas aulas revela, também, que, por vezes, é a discussão da validade de uma conjectura que permite um maior entendimento do seu enunciado, ou seja, a compreensão do seu significado entrelaça-se fortemente com a sua avaliação. Um caso paradigmático desta situação é a análise de uma conjectura complexa que surgiu numa das aulas de Anita.

Procurando evidenciar diversos tipos de situações em que podem surgir episódios de argumentação matemática, considero separadamente a fase da partilha/compreensão de conjecturas da fase de trabalho colectivo destinada à sua avaliação, apesar da artificialidade de que pode revestir-se esta separação. Incluo na fase da partilha/compreensão de conjecturas, a apresentação à turma de regularidades identificadas independentemente do enunciado da conjectura ter sido, ou não, já construído. Nesta fase podem surgir episódios de argumentação:

- quando os alunos procuram justificar a plausibilidade de um enunciado que derivou de um facto que observaram;
- no âmbito da construção colectiva de enunciados tendo por base a apresentação de regularidades. Um exemplo é construção da conjectura "c. pot." formulada a partir da exploração da tarefas das dízimas nas turmas de qualquer uma das professoras;
- através da discussão de um enunciado com o propósito de fazer sobressair diferenças existentes entre alternativas que não incluem certas hipóteses fundamentais à conclusão provisória que se pretende estabelecer: os "tais detalhes" referidos por Anita a propósito da discussão do enunciado da "conjectura do paralelogramo" ou da formulada para pares de números na tarefa referente ao máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum;
- a partir da comparação entre enunciados de conjecturas com o propósito de identificar relações entre conjecturas e/ou hipóteses dispensáveis. Um exemplo ilustrativo de uma discussão focada na identificação destas hipóteses ocorre na turma de Anita a propósito das conjecturas que se vieram a fundir, formuladas no âmbito da tarefa das dízimas. Um caso que

reforça as potencialidades, para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, da instituição de relações entre conjecturas como objecto de análise colectiva, provém das aulas em que as professoras trabalharam com a tarefa *Números em círculos*. Na altura em que Rebeca a leccionou, não lhe ocorreu promover uma discussão focada nas relações entre as conjecturas “GT=C seguido de 4” e “GT=10□C+4”, aspecto que é abordado na sessão de reflexão dedicada a esta aula. Subsequentemente a esta sessão, Anita fá-lo na sua turma, o que permite a emergência e troca de ideias sobre elementos justificativos de vários tipos que permitem evidenciar a equivalência destas conjecturas no conjunto dos números naturais.

Na fase destinada à avaliação colectiva de conjecturas orientada pelo propósito de filtrar as falsas, os episódios de argumentação podem surgir associados à submissão das conjecturas refutáveis ao escrutínio da turma e, em particular, à justificação de porque é que um determinado caso constitui, ou não, um contra-exemplo. Neste âmbito, os episódios mais relevantes, pelo seu desenvolvimento, são ocasionados pela existência de pontos de vista divergentes sobre a possibilidade de um exemplo apresentado ser, na realidade, um contra-exemplo. Esta divergência pode ter várias origens, nomeadamente: (a) incompreensões relacionadas com o próprio significado de contra-exemplo, (b) não consideração das *condições de excepção* (Toulmin, 1993) introduzidas no enunciado de uma conjectura, (c) a atenção de alguns alunos ser, exclusivamente, direccionada para uma parte do enunciado de uma conjectura e não para a sua totalidade e (d) não ter sido assegurado que o exemplo oferecido como contra-exemplo não viola as hipóteses da conjectura.

Envolvendo os alunos em experiências de prova

Analiso o trabalho de Anita e Rebeca mais directamente relacionado com o envolvimento dos alunos em experiências de prova, focando-me em seis aspectos. Em primeiro lugar, indico a origem dos enunciados que foram submetidos a processos de prova. Em segundo, descrevo, em traços gerais, os tipos de provas produzidas nas aulas e sua incidência. Em terceiro, analiso relações entre conjecturas formuladas e conjecturas que foram objecto de prova. Debruço-me, em seguida, sobre factores que podem favorecer ou dificultar a motivação dos alunos para a prova. As tentativas feitas pelas professoras e cuidados que tomaram para ajudar os alunos a compreender a necessidade e importância da prova de conjecturas, ou seja do valor da prova, são aspectos em analiso em quinto lugar. Termino centrando-me no que nomeei *percursos de prova*. Uso esta expressão para designar traços relevantes dos caminhos percorridos por Anita, Rebeca e respectivos alunos para estes se irem envolvendo em experiências de prova de conjecturas não refutadas.

Origem dos objectos de prova

Um dos critérios que presidiu à procura de tarefas a apresentar aos alunos foi, no caso de envolverem a formulação de conjecturas, a prova das que intuíamos que descobrissem estar ao seu alcance do ponto de vista matemático. Todas as provas produzidas nas turmas das duas professoras estão, na generalidade, associadas a conjecturas resultantes do trabalho de pares/grupos ou ao aperfeiçoamento destas conjecturas. Houve, também, casos pontuais em que foram provadas conjecturas cujo enunciado foi completamente construído pela turma a partir da apresentação de regularidades observadas durante esse trabalho. Em todas as referidas tarefas os alunos estiveram envolvidos em experiências de prova.

Tipos de provas produzidas

Na prova de conjecturas incluo a prova pelo contra-exemplo e a prova da veracidade. Neste último caso foram produzidas provas (a) pelo recurso a um *exemplo generalizável* (Veloso, 1998), (b) por exaustão, (c) envolvendo, exclusivamente, propriedades de figuras geométricas e (d) provas algébricas. As mais frequentes foram provas pelo contra-exemplo e provas algébricas. Estas últimas envolveram, nalguns casos, conexões entre Geometria, Números e Álgebra.

A prova pelo exemplo generalizável surge no âmbito da tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* e também na justificação de que em $k/10^n$ estão "contemplados" todos os tipos de fracções referidos no enunciado da conjectura "c.pot." apresentada na turma de Rebeca a propósito da tarefa *À procura de dízimas finitas*. A prova por exaustão foi produzida numa das aulas de Anita no âmbito da exploração desta mesma tarefa. As provas que envolveram apenas Geometria estiveram associadas à tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*. Provas algébricas originadas por conjecturas formuladas no âmbito de tarefas que apelam a conhecimentos geométricos, foram produzidas, por exemplo, a partir da exploração de *Triângulos semelhantes, áreas e perímetros* ou *Quadrados em quadrados*. Saliento que esta dispersão dos tipos de provas é circunstancial, ou seja, dependeu das tarefas propostas que, por sua vez, decorreram da articulação percepcionada entre os conteúdos matemáticos que possibilitavam trabalhar e a planificação curricular de Anita ou Rebeca.

Conjecturas formuladas *versus* conjecturas provadas

A maior parte das conjecturas partilhadas foi provada durante as aulas, embora, numa ou noutra ocasião, a sua conclusão fosse proposta como trabalho de casa. Houve, no entanto, algumas excepções. A grande maioria delas surgiu quando o número de conjecturas formuladas pelos alunos foi elevado e, embora os seus conhecimentos matemáticos fossem suficientes para permitir a produção das provas, esta actividade exigia um investimento de tempo que entrava em conflito com a planificação curricular das professoras.

A estratégia adoptada por Anita e Rebeca para lidarem com este conflito nas primeiras alturas em que surgiu, foi remeterem a prova das conjecturas não abordadas na aula para trabalho de casa. No entanto, a experiência revelou-lhes que, por si só, esta estratégia não é suficiente:

> Pode-se mandar, como eu tenho feito, que pensem em casa. Mas eu acho que algumas delas, pelo menos, têm que ser pegadas nalguma altura. Não quer dizer que se provem todas, mas o mandar pensar e tentarem provar e depois nunca mais se pegar em nenhuma delas, se calhar também faz com que os alunos se

> sintam desmotivados. Se calhar de tempos a tempos pegar numa ou noutra que eles vão formulando. (Rebeca, TST 20, pp. 12-13, 30/04/02)

> O que eu tenho feito é tentar que eles façam em casa, mas pronto, nem sempre é a melhor maneira. Mas lá está, não fazem todos e às vezes não se pode explorar... pode-se levar para casa os cadernos, só que... (Anita, TST 20, p. 13)

Tentativas posteriores feitas no mesmo sentido para lidar com a questão do que fazer com as conjecturas não analisadas na aula, reforçam a ideia de que “se não houver uma discussão a seguir a esse trabalho de casa” (Rebeca, TST 27, p. 18), propô-lo apenas aos alunos “não resulta” (idem) mesmo admitindo a hipótese de todos o fazerem e do professor o corrigir individualmente: “Só corrigir em casa mesmo que eles façam todos, acho que não é de grande ajuda” (idem).

Para qualquer uma das professoras não é problemático os alunos formularem conjecturas cuja prova requer conhecimentos matemáticos que não possuem. Sublinham que, nestas alturas, o que é importante é tornar este aspecto claro e inteligível. Não sentem o mesmo quando não são discutidas e provadas conjecturas cuja análise é compatível com a maturidade matemática dos alunos, devido a pressões relacionadas com o ensino dos conteúdos matemáticos incluídos no currículo. Nestas situações ambas consideram que se confrontam com um “dilema” (Anita, DEA, 1/08/02, p. 1; Rebeca, E2, p. 3). Rebeca, em particular, expressa por diversas vezes o incómodo e a frustração que lhe causam:

> Outro dos dilemas com que nos temos deparado [é] surgirem mais conjecturas do que aquelas que estávamos à espera (...) nos casos em que é possível fazer a demonstração com os conhecimentos que eles têm, temos que optar entre fazê-las ou não porque há outras coisas, há uma série de conteúdos que se têm de cumprir e abordar e se formos aproveitar todas as conjecturas que é possível provar não avançaríamos… (...) Porque é que eu digo que é um dilema? (...) poderia explorar mais conjecturas ou avanço para os conteúdos, para a sequência do programa? Porque tenho aquele programa para cumprir. (Rebeca, E2, p. 3)

Rebeca refere algumas estratégias que, a seu ver, poderão ser úteis para lidar com o referido dilema: (a) a instituição da prova de uma conjectura como alternativa a outras actividades habituais na turma, por exemplo, o “problema do mês” (TST 20, p. 13); (b) a análise de uma conjectura como “trabalho de investigação feito por eles" (TST 27, p. 18) a "apresentar à turma" (idem) posteriormente; (c) e a prova de conjecturas que vêm "a propósito" (E2, p. 4) para introduzir tarefas que se tencionam apresentar mais tarde: "Para algumas das conjecturas é possível voltar a pegar, mais tarde, (...) a seguir vinha a dos *Quadrados em quadrados* e, no fundo, [demonstrar mais algumas das conjecturas que os alunos tinham formulado] vinha como uma introdução para esta tarefa" (idem).

A escolha das conjecturas a provar na aula, questão abordada por diversas vezes ao longo do desenvolvimento do projecto, é influenciada significativamente, segundo as professoras, pelo currículo dos anos de escolaridade que leccionam: "O programa guia e muito! (risos) (Rebeca, TST 38, p. 49); "óbvio!" (Anita, idem). Mas esta escolha é, também, consequência da actividade imaginada para a aula e dos objectivos estabelecidos: "Há conjecturas que nós conseguimos prever que eles vão formular e que temos intenção que eles cheguem à prova. (...) São essas a que nós temos sempre dado prioridade" (Rebeca, idem, p. 50); "dessas nunca desistimos, para começar" (Anita, idem). A simultaneidade destas influências transparece, por exemplo, na justificação apresentada por Rebeca para o porquê de ter escolhido para provar, em primeiro lugar, a "conjectura do paralelogramo" nas aulas em que trabalhou com a tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*:

> Escolhi para provar a "conjectura do paralelogramo" porque nitidamente era aquilo que eu pretendia com este trabalho todo. Era a propriedade a que eu pretendia chegar. Daí o dar-lhe prioridade. É aquela que no programa se pretende que explorem e demonstrem. Tem a ver com o conteúdo em si e com o cumprimento do programa (TST 19, p 13)

Depois de provadas as conjecturas incluídas no "tal guião [da aula]" (Rebeca, TST 38, p. 50), um aspecto que influencia a escolha de outras conjecturas a provar é, segundo Rebeca, a percepção do grau de dificuldade da prova para os alunos ou as que mais de perto se relacionam com as incluídas no guião da aula: "Depois pegamos em mais algumas. Normalmente aquelas que se relacionam mais com aquela ou então que são mais fáceis de provar também (...) aquelas que nos parecem mais acessíveis aos alunos" (idem). Na ocasião em que apresenta estas reflexões, a professora interroga-se se será necessário provar na aula todas as conjecturas partilhadas mesmo quando a prova está ao alcance dos alunos ou é passível de compreensão: “E não sei se às tantas valeria a pena provarmos todas” (idem). Na sua perspectiva, o importante é trabalhar com as turmas no sentido de, progressivamente, os alunos interiorizarem a ideia que faz parte do seu papel investirem tempo de estudo da Matemática em tentativas de provar conjecturas não discutidas na aula: “Eles próprios irem tentar provar as outras em casa, isso é que seria o ideal. Estes processos vão-se construindo aos poucos e o interessante é eles começarem a ser autónomos e começarem a fazer essas coisas por eles” (idem).

Conjecturas e motivação para a prova

O entusiasmo dos alunos na formulação de conjecturas foi visível em todas as aulas. Igualmente visível, não muito tempo depois do início do projecto, foi o seu interesse no teste de conjecturas pela procura de contra-exemplos.

Porém, não foi tão simples manter o envolvimento dos alunos na exploração, ou mesmo acompanhamento, de processos que pudessem conduzir à justificação ou prova daquelas que pareciam ser verdadeiras. Há, no entanto, uma excepção significativa a esta “regra” que se localiza na primeira fase do projecto e, mais concretamente, nas aulas em que Rebeca trabalha com a tarefa *Quadrados em quadrados*:

> Daquilo que eu vi pelo vídeo e pelas transcrições gostei muito destas aulas porque eles argumentaram muito (...) Porquê? Porque se ganhou em termos de formulação de conjecturas, de discussão, pelo menos no caso deles, de capacidade de justificar raciocínios... Isso é bastante nítido. Durante as aulas todas. (Anita, TST 26, pp. 29-30)

> E eles gostaram muito... Estiveram sempre interessados, argumentaram muito, foi... (...) acho que nesta altura do ano [27 e 28 Maio de 2002] até teve muito mais-valias do que se fosse a matéria, os conteúdos concretos, específicos. (...) Ganharam... As competências que eles desenvolveram nesta aula, que não esquecem (...) o formularem conjecturas, o justificarem, o esforço na tentativa de justificação dos raciocínios, acho que estão a desenvolver capacidades que não se esquecem, não é como com os conteúdos... (Rebeca, TST 26, pp. 30-1)

Como transparece nestes extractos, ambas as professoras consideram, tal como eu própria, que as aulas leccionadas a propósito da tarefa *Quadrados em quadrados* representam casos bem sucedidos de envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática: pelo tipo de episódios existentes, pelo papel dos alunos na emergência e desenvolvimento destes episódios, pelo elevado nível de participação em actividades matemáticas significativas e pela dedicação e gosto de muitos alunos na realização destas actividades. Na perspectiva das professoras, para este sucesso concorreram vários factores:

- as características da tarefa e suas potencialidades para a emergência de conjecturas diversas: "Podia começar pela tarefa. Também, mas não só" (Anita, TST 27, p. 2); "eu também acho que a tarefa é muito importante, porque é uma tarefa que dá para formular muitas conjecturas" (Rebeca, idem, p. 3);
- a evidência dada às diversas conjecturas formuladas: "Eu tentei dar visibilidade às diferentes conjecturas que iam surgindo... Isso também faz com que surjam mais argumentações" (Rebeca, idem);
- a dinâmica da aula que, nas palavras de Rebeca, é "um bocado diferente desde que nós começámos com o projecto" (idem, p. 4): as maiores preocupações relacionadas com o "insistir e o virar mais, o dirigir mais o discurso" (idem) da aula no sentido de que "os alunos estivessem a argumentar" (idem), contribuíram para que estejam "mais predispostos para participarem, para formularem conjecturas e para dizerem eu discordo (...) mais predispostos a discutirem do que estavam antes" (idem);
- o elevado nível de participação dos alunos: "Os miúdos corresponderam muito bem" (Anita, idem, p. 2); "é como se andasses a lavrar um bocadinho mais o campo... (...) estás a preparar e ele acaba por dar frutos" (idem, p. 4);
- a continuada articulação entre o trabalho de grupo e o trabalho colectivo:

> E houve trabalho de grupo, discussão de sala de aula, trabalho de grupo, discussão... Houve aquele entrelaçamento entre o trabalho do professor e o trabalho dos alunos que eu acho que foi, como é que eu hei-de dizer, com muito sentido de oportunidade, na altura certa, digamos assim (risos) (...) Talvez isto dê um ritmo diferente às coisas, lá está. Os alunos vão logo interferindo e isso é importante em termos de argumentação. (Anita, idem, p. 2)

> Depois, concordo também com a Anita. Eu até tinha escrito aqui. Surge mais discussão ao serem apresentadas ao grande grupo as ideias dos vários grupos, ao juntarem-se, no fundo, aquelas ideias, surgem confrontações e vão surgindo, conforme os grupos vão dizendo, novas ideias sobre aquilo que eles estiveram a pensar. E depois ao voltarem para o grupo já têm mais ideias. (Rebeca, idem, p. 3)

Como transparece nestes últimos extractos, nas aulas em que foi trabalhada a tarefa *Quadrados em quadrados* houve um contínuo entrelaçamento entre o trabalho de grupo e o trabalho colectivo. Cada uma das modalidades de trabalho foi, no entanto, bem demarcada da outra, pelo que não existiram ambiguidades relativamente aos períodos de tempo destinados a cada uma. Rebeca organizou a actividade da aula de modo a existirem vários momentos de discussão colectiva em que a turma se debruçava sobre conjecturas ou questões surgidas durante o trabalho de grupo – consideradas por si merecedoras de objecto de reflexão conjunta – até serem obtidos consensos justificados sobre a resposta às questões ou a validade das conjecturas. Uma vez alcançados, o trabalho de grupo era retomado o que fazia surgir novas conjecturas recomeçando o ciclo. Assim, algumas das ideias que emergiam nos grupos foram sendo submetidas, pouco a pouco, ao escrutínio da turma, o que conduziu a que as actividades de formulação de conjecturas, partilha, avaliação pela procura de contra-exemplos e justificação ou prova das conjecturas não refutadas andassem a par e passo.

Na altura em que o grupo de pesquisa se debruçou sobre estas aulas, ganhou força a ideia de que um dos aspectos que poderia facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, era a existência do entrelaçamento entre o trabalho de pares/grupos e o trabalho colectivo. Nesta ocasião não foi tão visível que a curiosidade e o entusiasmo desencadeados pela formulação de conjecturas poderia ser um motor facilitador do envolvimento dos alunos na prova das conjecturas não refutadas. Esta intuição surge mais tarde no âmbito da reflexão sobre a aula em que Anita trabalhou com a tarefa *Quadrados de números terminados em 5*:

> Nos *Quadrados em quadrados* havia sempre conjecturas novas que mantinham viva aquela curiosidade. Os alunos iam justificando coisas e apareciam depois outras conjecturas. Enquanto que aqui [aulas de Anita com a tarefa *Quadrados de números terminados em 5*] eles formularam as conjecturas todas logo e depois houve o esmorecimento. Nas outras estavam sempre a surgir coisas novas que faziam com que estivessem sempre entusiasmados... Pode ser isso. (Rebeca, TST 28, p. 9)

Esta intervenção de Rebeca vem na sequência de Anita ter chamado a atenção para a "quebra" (TST 28, p. 8), ou seja, o espaço temporal de dois dias, que separou a aula em que os alunos formularam conjecturas e aquela em que foi produzida a prova destas conjecturas. Contrariamente ao usual, a tarefa foi apresentada na primeira destas aulas apenas a meio do seu tempo de duração, o que originou que só houvesse oportunidade para o registo no quadro da primeira das conjecturas formuladas durante o trabalho de pares e para a compreensão do significado da segunda. Um dos aspectos intrigantes para todo o grupo de pesquisa foi os alunos estarem "super empenhados" (Anita, idem, p. 6), "muito vivos, entusiasmados" (idem, p. 8) na primeira aula, enquanto que na segunda "estavam muito mais calmos (...) muito mais quebrados (...) naqueles dias em que estão ali muito sossegadinhos, em que tem que ser tudo muito puxado" (idem). É ao explorarmos hipóteses passíveis de iluminar o porquê desta diferença, que Anita destaca a referida "quebra": "Onde há muita curiosidade é na formulação de conjecturas (...) Depois já tinha passado esse momento da curiosidade da descoberta (...) aquela curiosidade naquilo que eles tinham descoberto, em termos do porque é que aquilo acontecia foi-lhes saindo" (idem, p. 9).

Ao analisarem o conjunto de todas as hipóteses colocadas para explicar a diferença de envolvimento dos alunos nas duas aulas, Anita e Rebeca consideram que a mais relevante "foi aquela quebra" (Rebeca, TST 28, p. 10) — "foi pela quebra" (Anita, idem) — com o associado esbatimento do interesse em desvendar porque é que funcionaram, em todas as experiências, os processos descobertos para calcular rapidamente quadrados de números terminados 5. Interrupções deste tipo podem ser, na sua perspectiva, problemáticas, se o tipo de tarefa e a metodologia adoptada para organizar a sua exploração e discussão não alimentarem e mantiverem viva a curiosidade dos alunos, como aconteceu, por exemplo, no trabalho com a tarefa *Quadrados em quadrados*.

Na segunda entrevista ambas as professoras abordam, por iniciativa própria, a "aula de Anita (...) em que houve uma interrupção entre a parte em que os alunos estiveram a trabalhar eles na aula e depois a discussão" (Rebeca, E2, p. 5) ou "o caso daquelas aulas que foram quebradas no sentido da tarefa envolver mais do que uma aula" (Anita, E2, p. 2). Salientam que "os alunos esfriavam" (idem) ou que a "interrupção (...) quebrou o ritmo com que eles estavam entusiasmados" (Rebeca, E2, p. 5). Orientar o trabalho de ensino no sentido de envolver os alunos em actividades de argumentação matemática passa também, na perspectiva de Rebeca, por "ter muito cuidado com a forma como a tarefa vai ser trabalhada, nomeadamente em que aulas, que sequência irá ter (...) Portanto, gerir muito bem o tipo de tarefa com o tempo em que ela vai ser explorada" (E2, p. 5).

Necessidade da prova

Referi anteriormente que Anita e Rebeca dedicaram esforços significativos à prova pelo contra-exemplo. Em geral, à medida que os alunos foram ganhando experiência de trabalho com conjecturas, a sua persistência e sofisticação na procura de contra-exemplos foi aumentando e ajudá-los a compreender a necessidade de as testarem com casos diferentes dos que permitiram formulá-las, não foi difícil. O mesmo não aconteceu com a compreensão da necessidade e importância de provarem as que não conseguiam refutar.

A análise das primeiras aulas analisadas em *A propósito de Números em círculos* (capítulo VI) e *A propósito de Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* (capítulo VII), revela que, na altura, as professoras tinham consciência de que a prova das conjecturas não refutadas não fazia falta aos alunos. Revela, também, a assunção de papéis orientados no sentido de os envolver na produção de provas destas conjecturas e ajudá-los a compreender o porquê desta actividade. Foi na sessão de reflexão sobre a referida aula de Rebeca, prévia à leccionada pela colega, que se evidenciou que, apesar das tentativas feitas, os alunos não perceberam a necessidade da prova. Rebeca coloca a hipótese desta necessidade emergir com maior relevo se as turmas se confrontarem com propostas de trabalho que evidenciem as limitações do raciocínio indutivo e Anita delineia a aula em que trabalhou com *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* tendo em conta esta hipótese. Recordo que face à justificação de que a conjectura formulada para pares de números naturais é verdadeira porque verificada para os três casos, lança o desafio de a testarem com ternos de números; intencionalmente é ela própria que, de início, indica três exemplos que sabe verificarem-na, deixando a cargo dos alunos a descoberta de outros que a refutem.

As reflexões associadas a esta experiência fazem sobressair que, independentemente da adequação e relevância do desafio lançado, não basta, num determinado momento, proporcionar aos alunos actividades que tragam à tona a falsidade de conjecturas que parecem ser verdadeiras, para resolver de uma vez por todas, pelo menos para aqueles que as compreenderam, o problema de como gerar a necessidade da prova. Com efeito, a autora do contra-exemplo que permitiu refutar a conjectura com ternos de números, num momento posterior da aula afirmou, convictamente, que a formulada para pares era verdadeira, mesmo não a tendo provado.

Novas experiências são feitas em que sensibilizar os alunos para a necessidade de provarem conjecturas que parecem ser verdadeiras anda a par e passo com o investimento na compreensão de que a verificação por exemplos não constitui uma prova. Rebeca, referindo-se à conversa sobre a conjectura de Fermat e uma outra cuja prova até é objecto de prémio monetário por ser tão resistente à refutação indica, por exemplo, que esta conversa foi especialmente preparada porque "pretendia (...) mostrar-lhes que o facto das pessoas não conseguirem contrariá-las e de haver muitos exemplos que as verificavam, não lhes dava o estatuto de ser verdade" (TST 19, p. 20). Anita, por seu turno, ao indicar os objectivos que estabeleceu para a aula em que trabalhou com a tarefa *Triângulos semelhantes, áreas e perímetros,* destaca que um deles foi "que reparassem que só a partir de exemplos não se pode concluir que uma determinada propriedade é válida para todos os casos (...) isto tinha a ver com a segunda ficha[78]" (TST 24, p. 18).

Ao longo de todo este tipo de trabalho, que foi acompanhado por diálogos visando fazer sobressair a importância da prova enquanto instrumento de validação e de compreensão e/ou averiguar o entendimento dos alunos sobre o papel dos exemplos no trabalho com conjecturas e sua prova, surgem, por vezes, contribuições que parecem revelar terem compreendido o significado de prova e sua necessidade. No entanto, em ocasiões posteriores, há intervenções que põem em causa esta ideia. Por exemplo, Rebeca, ao reflectir sobre a aula em que conversou sobre a existência de conjecturas que durante muito tempo não foram provadas, refere que embora esta conversa tenha sido "uma boa ideia (...) ainda assim não teve os frutos que eu pretendia" (TST 19, p. 10). Na sua perspectiva, o que os alunos incluem nos trabalhos entregues na sequência desta aula "não é coerente" (idem, p. 8) com várias das suas contribuições na aula:

> Não consegui e continuo a não conseguir ao fim destas aulas todas que eles sintam a necessidade da prova e que tenham a consciência do que é a prova. Não é só sentir a necessidade é perceberem quando é que provaram. (...) É um dos aspectos que ainda está longe, acho eu, de ser alcançado. (Rebeca, TST 19, pp. 7-8)

Mais tarde, ao trabalhar com a tarefa *Mais números em círculos*, considera que "já não houve aquela dificuldade dos alunos perceberem que os exemplos não chegam para provar (...) foi uma dificuldade que eu senti quando lhes propus a tarefa *Números em círculos*" (Rebeca, TST 22, p. 33). Contudo, numa aula localizada perto do final da primeira fase do projecto, continuam a ouvir-se justificações para a validade de uma conjectura para o caso geral fundadas na

[78] Referência à versão II do enunciado da tarefa *Triângulos semelhantes, áreas e perímetros* (tabela 8, capítulo V). Em ambas as versões desta tarefa foi, intencionalmente, incluída uma questão para gerar discussões focadas na insuficiência da verificação por exemplos enquanto meio de prova de uma conjectura: "Poderás afirmar pelas observações que fizeste que estas relações são válidas para todos os triângulos semelhantes? Porquê?"

verificação por exemplos: "Diogo: Porque num quadrado de 2x2 dá 1, num quadrado de 3 dá 2, num quadrado de 4 dá 3, num quadrado de 5 dá 4 e assim sucessivamente (...) Jacinta: Porque todas as experiências que nós fizemos dá isso..." (TA 27/05/02[79], pp. 4-5). Na turma de Anita, a situação não é muito diferente. Depois de ter investido um tempo muito significativo na discussão da impossibilidade de garantir a veracidade de uma afirmação com base na sua verificação por alguns casos a partir da questão incluída em *Triângulos semelhantes, áreas e perímetros*, salienta que "há alguns que continuam a dar exemplos para mostrar que uma conjectura é verdadeira" (Anita, TST 27, p. 5).

Foi precisamente por continuarem a surgir contribuições reveladoras de que os exemplos bastam para provar conjecturas, causadoras de preocupações em Anita e Rebeca, e a necessidade de encontrar meios de ajudar os alunos a compreenderem, em profundidade, as limitações do raciocínio indutivo, que levou a instituir este aspecto como um dos campos de investimento futuro para a segunda fase do projecto. Por esta razão, foi incluído no conjunto de pressupostos constantes do documento escrito negociado com as professoras para orientar o trabalho a desenvolver nesta fase (ver anexo 10).

Perto do final do projecto, a situação quanto à compreensão, pelos alunos, de que a prova de conjecturas não pode obter-se pela sua verificação por exemplos, e de que há necessidade de provar as conjecturas não refutadas parece, na generalidade, ter-se aprofundado. Rebeca, em particular, inclui entre "as coisas em que os alunos evoluíram" (E3, p. 18) o facto de compreenderem "que os exemplos não servem para provar as conjecturas... (...) Quando afirmam algo tentam logo justificar. Já não há tanta necessidade de ser eu a pedir as justificações" (E3, p. 18); "já partem naturalmente para a prova, já não é necessário insistir na necessidade de provar" (idem, p. 21). Também nas aulas em que qualquer uma das professoras trabalhou com a tarefa das dízimas, apenas numa das de Anita surge uma intervenção que vai no sentido de uma conjectura não refutada ser considerada

[79] Aula leccionada por Rebeca com a tarefa *Quadrados em quadrados*.

provada. Na última aula desta professora que presenciei, muitos alunos iniciaram, por moto próprio, a exploração de processos de provar conjecturas que não conseguiram refutar. No entanto, também na última aula leccionada por Rebeca, surge uma situação intrigante. Mais uma vez, alunos que em ocasiões anteriores explicitaram com clareza ideias que iam no sentido de considerarem que a verificação de uma conjectura por exemplos não constitui uma prova, que puseram em causa justificações de colegas que iam em sentido contrário a esta ideia, e que, por vezes, recorreram por sua iniciativa a conhecimentos de álgebra para procurarem provas das que lhes pareciam verdadeiras, "ficaram satisfeitos com os exemplos e queriam passar para a outra tarefa (...). Eles não sentiram necessidade nenhuma [da prova] (...) Apesar de eu estar farta de insistir que os exemplos não chegam para provar, aqui neste caso acharam que davam…" (Rebeca, E4, pp. 31-2). A professora coloca a hipótese deste facto se relacionar com a existência de "outra pergunta que ainda não tinham feito (...) [e] a ânsia de [a] querem fazer" (idem). No entanto, apesar de continuar a reafirmar a existência de evolução dos alunos quanto à necessidade e importância da prova, não exclui a hipótese desta ideia não estar tão bem interiorizada como pensava e eu própria também supunha.

Há vários factores que podem contribuir para dificultar o entendimento, pelos alunos, da necessidade da prova. Rebeca salienta que um destes factores poderá ser o de existirem, nas aulas de Matemática, "montes de coisas que nós dizemos que é mesmo, em que eles têm mesmo que acreditar pela nossa autoridade" (TST 15, p. 67). Evoca a este propósito um episódio relacionado com os casos de semelhança de triângulos: os alunos trabalharam com "um exemplo só para terem a noção intuitiva que aquilo funcionava" (idem, p. 68) mas "não demonstrei nada (...) e eles acreditaram na minha autoridade" (idem). Na altura, procurou lidar com este "dilema" (E2, p. 8) chamando-os " à atenção [para que] não estamos a demonstrar. Nós não podemos demonstrar agora. Isto serve apenas para termos a noção intuitiva que funciona" (TST 15, p. 68). No entanto, estas situações, nas suas palavras, são "um pau de dois bicos, porque por um lado queres que eles ponham em causa, [e] depois há outras alturas em que lhes dizes isto é assim, não vamos provar" (idem).

Um outro factor que pode dificultar a compreensão da necessidade da prova é, segundo Anita, existirem afirmações que têm aos olhos dos alunos, fruto do passado escolar, um estatuto de verdades incontestáveis, e cuja compreensão do porquê não lhes desperta curiosidade alguma "pois pensam que já sabem porquê. (...) Dizem porque em Matemática é assim, porque sempre foi assim..." (Anita, TST 38, p. 28). Esta reflexão surge no âmbito da análise da aula em que trabalhou com a tarefa *Jogo da soma e do produto*, em que tentou envolver os alunos num processo de prova que iluminasse porque é que o produto de dois números pares é um número par: "Eles já estão tão marcados por esse tipo de facto, que não sentem mesmo nenhuma necessidade de justificar e desistiram mesmo... Para eles "par vezes par é par" já não é uma conjectura. O estatuto é diferente " (idem, p. 27).

Independentemente das dificuldades referidas, o desenvolvimento do projecto deixa transparecer que a compreensão da prova e seu valor passa, antes de mais, pelo envolvimento continuado dos alunos em experiências de prova: "Não chega só começar no início de um ano. Tem que ser um trabalho que a gente tem que ter constantemente em atenção..." (Rebeca, TST 19, p. 19). Além disso, a análise do discurso de Anita e de Rebeca permite salientar alguns cuidados que podem contribuir para ajudar os alunos a compreenderem a necessidade e importância da prova. Destaco quatro destes cuidados. O primeiro emerge através do discurso de Rebeca para quem esta compreensão passa, também, por um trabalho que tem "que ser o diário" (TST 19, p. 19). Na sua perspectiva, quando há resultados matemáticos passíveis de prova apresentados na aula sem que esta prova seja feita, importa "dar ênfase (...) a porque é que não provamos, justificar bem com eles. Dizer agora não provamos porque..." (TST 19, p. 20). Refere esta mesma ideia em várias ocasiões. Entre estas está a reflexão sobre as aulas com a tarefa *À procura de dízimas finitas* em que amplia esta ideia salientando a pertinência de ajudar os alunos a compreenderem que, em Matemática, nem tudo é objecto de prova. Também na terceira entrevista relata um episódio ocorrido numa aula da turma do projecto em que vários alunos "não ficaram satisfeitos só com a fórmula [resolvente de equações do segundo grau]" (E3, p. 14) que lhes foi apresentada sem ser acompanhada de prova. Nesta aula procurou "deixar bem explícito para os alunos que ela permite resolver equações do 2º grau, que não foi demonstrada, que lhes está a ser impingida" (idem) e, simultaneamente, disponibilizou-se para explicar o porquê da sua validade: "[Disse-lhes] que quem quiser vá ter comigo que eu explico donde vem, que é possível demonstrá-la, apesar da demonstração ser um bocadinho difícil de perceber e que dificilmente eles lá chegarão sozinhos" (idem).

O segundo cuidado surge através das palavras de ambas as professoras e prende-se com a importância de destacar, com persistência e sistematicidade, que conjecturas partilhadas nas aulas e, por alguma razão, não provadas, permanecem com o estatuto de afirmações de validade provisória: "Eu acho que nas minhas [aulas] devia ter dito *olhem atenção, não provámos, isto são conjecturas, não garantimos* e insistir. Por acaso é uma das coisas em que temos que insistir mais" (Rebeca, TST 24, p. 10); "Pois, pelo menos por enquanto ficam conjecturas. Se quiserem depois pensar em garanti-las... Eu só falei na promoção de estatuto e em termos de validade, mas no resto... Acho que é importante insistir" (Anita, idem).

O terceiro cuidado, salientado também por ambas as professoras, relaciona-se com a relevância de potenciar acontecimentos que surgem na aula para evidenciar as limitações do raciocínio indutivo, independentemente das tarefas apresentadas serem ou não, deliberadamente, seleccionadas com este propósito. Na aula em que Rebeca trabalhou com a tarefa *Quadrados em quadrados*, alguns alunos formularam uma conjectura falsa e usaram-na para deduzir conclusões acerca de outros aspectos. Na sessão de reflexão sobre esta aula, Anita chama a atenção para a situação indicando que podia ter-se "aproveitado (...) para salientar que há conjecturas que parecem ser verdadeiras e que depois, no entanto, se vê que falham" (TST 27, p. 12) e Rebeca concorda com a colega: "Pois era. Devia ter aproveitado melhor (...) Eu disse como as aparências iludem mas podia ter insistido mais " (Rebeca, idem, p. 13). Também a reflexão sobre as aulas em que Rebeca trabalhou com a tarefa das dízimas permite destacar que um dos desacordos que surgiu, se gerido de outro modo, poderia ter sido aproveitado para mostrar os limites do raciocínio indutivo.

O quarto cuidado permite evidenciar a importância de investir no entendimento, pelos alunos, do valor da prova, antes de mais, como instrumento de compreensão, mas sem negligenciar o seu papel como instrumento de validação. Segundo Rebeca, nas situações em que a experiência de formulação e teste de uma conjectura conduz, nos alunos, a uma convicção profunda acerca da sua veracidade, é de "pôr mais a ênfase no vamos perceber porquê" (TST 27, p. 7), ideia que merece o acordo da colega: "se calhar [é de] partir do perceber porquê (Anita, idem, p. 14). Anita salienta, no entanto, que podem surgir ocasiões em que justificar a necessidade através do papel da prova como instrumento de compreensão poderá não ser a via mais adequada. Fundamenta esta ideia evocando uma situação ocorrida numa das aulas da colega: "Acho que eles já estão a perceber porque é que acontece só com o exemplo (...) Apesar de não ter as letras no geral, no fundo eles já estão a perceber que utilizam sempre o teorema de Pitágoras" (idem). Nesta situação a que Anita se refere, a compreensão do porquê da validade de uma conjectura veio através da análise de um caso particular feita previamente ao processo de prova. Insistir na prova algébrica como instrumento de compreensão não faria grande sentido. Rebeca pôs a ênfase no papel da prova enquanto meio de transformação da convicção profunda em certeza, oriunda do facto da linguagem algébrica permitir lidar com a generalidade dos casos, ou seja, pôs a ênfase na prova enquanto instrumento de validação. Segundo Anita, importa não descurar nenhum destes dois papéis: "Portanto, se calhar tem que se jogar nas duas coisas... (...) Perceber porquê mas também, estão a ver, por isso é que é sempre verdade" (TST 27, p. 14).

Percursos de prova

Centro-me, como anteriormente referi, na prova de conjecturas não refutadas, uma vez que os aspectos mais significativos do trabalho de Anita e Rebeca relativos à prova pelo contra-exemplo foram sendo abordados ao longo das subsecções anteriores: compreensão do conceito de contra-exemplo, das consequências da sua descoberta e do processo de refutação de conjecturas.

Em geral, a prova de conjecturas não refutadas foi feita em trabalho colectivo, precedido, ou não, de momentos de trabalho de pares/grupos. Tal como aconteceu nas aulas que foram objecto de análise "microscópica" nos capítulos VI e VII, quem fez a passagem à prova foram, na quase totalidade das vezes, as professoras, através das questões que colocaram ou de outro tipo de intervenções: por exemplo, nas primeiras aulas destacaram porque é que é importante produzir a prova. Os alunos contribuíram para o processo de prova com sugestões oriundas do trabalho de pares/grupos ou que surgiram no âmbito de interacções geradas durante o trabalho colectivo.

Um aspecto que, frequentemente, se revelou problemático, foi a distinção, pelos alunos, entre as hipóteses de partida de uma conjectura e a conclusão cuja validade se pretende estabelecer. Precisamente para os ajudar a ultrapassarem esta dificuldade, por vezes, a distinção entre *dados* e *conclusão* (Toulmin, 1993) foi um dos objectivos prioritariamente estabelecidos para uma determinada aula: "Os objectivos (...) tornar visível, numa demonstração, onde se quer chegar e de onde se parte sempre. Manter essa característica (Anita, TST 24, p. 18).

Um outro aspecto que sobressaiu como algo a que o professor deve estar particularmente atento é a interpretação, pelos alunos, de expressões algébricas, ou de uma figura geométrica desenhada no quadro para apoio ao processo de prova, como um caso particular dos objectos gerais que representam. Recordo que Rebeca, na aula em que trabalhou com a tarefa *Números em círculos* analisada no capítulo VI, refere que uma das hipóteses explicativas para os alunos não terem compreendido a necessidade da prova, nem entendido que estavam perante uma prova algébrica, foi terem-na interpretado como "mais uma experiência só que com letras" (TST 14, p. 10). Também na turma de Rebeca surge um episódio ilustrativo de interpretações problemáticas do desenho de uma figura a que recorreu no processo de prova: "E aqui lá está a tal coisa. Porque o facto de a gente desenhar um quadrilátero no abstracto e usar letras, para alguns alunos isso pode ser interpretado como sendo um exemplo" (Anita, TST 19, p. 9); "pode ser isso, pode. Ele [um aluno] estava a interpretar o que tínhamos feito como sendo só para o quadrilátero que estava desenhado" (Rebeca, idem). Estas intervenções surgem no âmbito da análise do episódio relativo à prova da "conjectura do paralelogramo". Na sequência desta prova ter sido feita colectivamente pela turma, um aluno que participou com contribuições relevantes para o processo de prova, pergunta: "Então, mas porque é que se prova com um quadrilátero que forma sempre um paralelogramo lá dentro, sôtora?" (TA 15/4/04, p. 12). Embora à primeira vista possa parecer que esta pergunta se relaciona com o questionamento da necessidade da prova, contribuições posteriores revelam que não é este o seu problema, pois desaparece, de imediato, assim que um colega diz: "Já provámos com um quadrilátero universal..." (idem, p. 14). Rebeca preocupa-se em averiguar se a compreensão é real e constata que "ele explica bem o raciocínio da prova e porque estava provado" (idem, TST 19, p. 11).

A análise de caso(s) particular(es) enquanto fonte inspiradora do processo de prova foi frequente nas aulas Anita ou Rebeca, quando a prova não se localizou, exclusivamente, no campo da Geometria. Com efeito, como referi no capítulo VI, Rebeca, ao trabalhar com a tarefa *Números em círculos,* induziu os alunos a representarem a generalização do padrão usando álgebra por analogia com um exemplo numérico. A partir daí os cálculos algébricos não lhes levantaram problema algum. O mesmo aconteceu nas aulas da colega com a mesma tarefa. O recurso à análise de exemplos enquanto percursores do processo de prova é também visível nas aulas em que qualquer uma das professoras trabalhou com a tarefa das dízimas analisadas nos capítulos VI e VII: antes de iniciarem a prova algébrica da conjectura "c. pot. (Rebeca) ou "c. pot. f. i." (Anita), ambas analisaram com as turmas de que modo é que fracções particulares, cujos denominadores são do tipo dos indicados nos enunciados das conjecturas, podiam ser transformadas noutras cujos denominadores são potências de base 10 e expoente inteiro.

É na primeira fase do projecto, e muito em particular no âmbito da reflexão sobre as aulas em que Rebeca trabalhou com a tarefa *Quadrados em quadrados*, que sobressaem as potencialidades da análise de exemplos enquanto elementos facilitadores da prova de conjecturas, independentemente desta assumir, ou não, o formato de prova pelo exemplo generalizável. Depois da turma ter conjecturado, a partir de observação de regularidades em vários exemplos, que a área de um quadrado inscrito na posição p num quadrado de lado n é $p^2+(n-p)^2$, há um aluno que sugere que se descubra a área de um quadrado inscrito na posição 3 num quadrado de lado 1000. Nas palavras de Rebeca "analisar este exemplo era uma coisa em que eu não tinha pensado" (TST 27, p. 14). No entanto, como pretendia "mesmo aproveitar o que eles estavam a dizer (...) valorizar, no fundo, o trabalho dele (...) a querer que eles participem" (idem), decidiu explorar a sugestão com a turma antes de dar início à prova algébrica da conjectura. Na sua perspectiva, tal como na minha e na da colega, a actividade desencadeada por esta decisão foi significativamente favorável à produção da prova: "Eu acho que analisar aquele exemplo facilitou muito. (...) acho que ajudou muito à prova, facilitou e muito mesmo" (Rebeca, idem); eu também acho (Anita, idem).

Por si só, o trabalho com casos particulares pode não ser suficientemente poderoso para facilitar a generalização de um padrão para linguagem algébrica, a escrita das conjecturas em linguagem matemática ou a produção da prova de uma conjectura. A análise do trabalho de ensino de Anita e de Rebeca, e das reflexões a ele associadas, deixa transparecer que há cuidados a ter no processo de análise destes casos para que ele possa contribuir significativamente para qualquer uma destas actividades, ou para evitar o reforço da concepção de que se provam conjecturas pela sua verificação através de exemplos. Destacam-se três cuidados. O primeiro prende-se com a diminuição dos riscos que podem advir da opção pelo exemplo generalizável enquanto processo de prova. Este cuidado sobressai a partir da reflexão sobre a aula com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* analisada no capítulo VII. Recordo que Anita, nesta aula, recorre a este processo porque considerou outras alternativas não inteligíveis para os alunos. Recordo, também, que esta opção originou um "dilema" (TST 35, p. 8, 28/09/02) na medida em que pode "dar a ideia de que os exemplos provam" (idem). Na altura o final da aula foi precipitado pelo toque de saída e não houve oportunidade da turma reflectir, colectivamente, sobre o processo de prova adoptado, nem sobre o papel que o exemplo aí desempenhou. Anita, ao debruçar-se sobre esta aula no final do projecto, salienta que "devia ter feito essa reflexão final, sem dúvida" (E4, p. 20). A seu ver, era no âmbito desta reflexão que poderia ter instituído como objecto de análise as questões associadas à opção pelo exemplo generalizável, o que poderia contribuir para a opção por este recurso justificativo não alimentar concepções inadequadas de prova, risco que pode existir se não for bem entendido pelos alunos.

O segundo cuidado relaciona-se com a necessidade de escolher, criteriosamente, os exemplos cuja análise se propõe. A importância deste cuidado emerge, em particular, durante a sessão de reflexão sobre a aula em que Anita trabalhou com *Quadrados de números terminados em 5*. Os enunciados das conjecturas formuladas incluíam as expressões "número terminado em 5" e "número terminado em 25". A professora pretendia que os alunos representassem algebricamente estas conjecturas, pois um dos seus objectivos era a sua prova algébrica. Concretamente, procurava que intuíssem, a partir de analogias com casos particulares, que qualquer número natural terminado em 5 se pode escrever como $n\text{x}10+5$ — em que n é o número de dezenas — e que o seu quadrado se pode representar por $n\text{x}(n+1)\text{x}100+25$ ou por $(n+n^2)\text{x}100+25$. Dois dos exemplos analisados no âmbito da representação de um número terminado em 5 terminavam, também, em 25, embora não fossem quadrados perfeitos. Na aula, Anita não teve consciência desta especificidade dos exemplos para que a colega chama a atenção na sessão de reflexão: "Olha, boa!!... Boa, bem observado... 325 e 525! Pois foi! Realmente, houve uma má escolha dos exemplos.... (...) A mim na altura não me ocorreu" (TST 28, p. 23). Durante a aula, Anita apercebeu-se da existência de dificuldades durante o processo de escrita do enunciado das conjecturas em simbologia matemática, mas não se deu conta de que na origem de algumas poderiam estar ambiguidades introduzidas no discurso através de alguns dos exemplos analisados: "Agora, aqui, atendendo ao que a Rebeca disse, se calhar eu estou a perceber mal qual é o problema dela, lá está. Eu é que não me apercebi disso" (idem, p. 24). Sobressai, assim, a importância de "se estar com muita atenção aos exemplos porque senão podem levar a interpretações erradas" (idem, p. 25).

O terceiro cuidado permite evidenciar a importância do professor destacar aspectos cruciais para o processo de prova durante a análise de exemplos. Este cuidado sobressai no âmbito da exploração da tarefa *Quadrados em quadrados* e, concretamente, a propósito do processo de análise do caso particular relativo à determinação da área de um quadrado inscrito na posição 3 num quadrado de lado 1000:

> Eu quando estava a explorar a ideia que ele [um aluno] me deu, já estava a pensar em pôr em evidência e em aproveitá-la para a prova. Por isso é que escrevi lá daqui até aqui são 997 ou 1000-3, daqui aqui são 3, etc. É daquelas opções que a gente toma na altura. Não tinha pensado que aquilo surgisse mas surgiu e eu fiz e aproveitei para pôr logo em evidência as várias coisas que eram importantes para depois... (Rebeca, TST 27, p. 15)

A importância do mesmo cuidado sobressai, também, na sessão de reflexão sobre a aula em que Anita tentou que os alunos provassem algebricamente a conjectura "c. pot. f. i." formulada no âmbito da tarefa das dízimas. Como procurei evidenciar no capítulo VII, a turma começa por trabalhar com um exemplo desenvolvendo uma actividade com características semelhantes à requerida pela prova do caso geral. No entanto, esta actividade não foi suficientemente poderosa para inspirar o percurso de transformação da representação algébrica das fracções referidas no enunciado da conjectura numa fracção decimal. A análise, no grupo de pesquisa, de factores que poderão ter contribuído para as dificuldades experienciadas pelos alunos, faz emergir que entre eles poderá estar a inexistência de uma reflexão colectiva sobre a referida actividade, que permitiria realçar os aspectos do processo de transformação do exemplo significativos para a prova.

A análise de razões que permitem justificar que um determinado raciocínio produzido para garantir a validade de uma conjectura constitui, de facto, uma prova, surge, por vezes, nas aulas de Anita e Rebeca, o que evidencia alguma preocupação das professoras com esta faceta da actividade matemática. No entanto, esta actividade não foi frequente nem teve, em geral, um grande desenvolvimento. É, apenas, perto do final do projecto que sobressai, significativamente, a relevância de, em trabalho pares/grupos e/ou colectivo, os alunos se envolverem na avaliação de raciocínios matemáticos com o propósito de decidirem se estão perante a prova da veracidade de uma conjectura e porque o estão. Esta relevância surge no âmbito da sessão de reflexão sobre a aula em que Rebeca trabalhou com a tarefa *Um quadrado de lado n*. Na primeira parte desta tarefa, vários alunos recorreram ao cálculo algébrico para encontrarem a conjectura que lhes era pedida. Quando confrontados com a segunda parte — "Investiga a validade da conjectura que formulaste para a diagonal de um quadrado de lado *n*" — ficaram perplexos: "É a tal história, estão baralhados. Se já trabalharam com letras e ainda não provaram..." (Rebeca, TST 40, p. 50).

Proponho que seja discutido no grupo de pesquisa a existência e levantamento de mais-valias nesta aula, no que se prende com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Entre os vários aspectos indicados por Anita ou Rebeca não se encontrava aquele que, para mim, constituía uma novidade relativamente a todas as aulas que anteriormente presenciei de ambas as professoras: Rebeca, ao ser confrontada durante o trabalho de grupo ou na discussão colectiva, com intervenções dos alunos destinadas a averiguarem se já tinham provado ou não a conjectura, remete para cada grupo, ou para a turma, a responsabilidade de o decidirem fundamentadamente. A explicitação da minha perspectiva sobre a aula merece o acordo imediato de Rebeca:

> Pois é. Eu concordo com o que a Ana diz... Estávamos a falar há bocado de quem é que faz a prova. Sou sempre eu em interacção com eles. Mesmo naquela aula dos *Números em Círculo* em que eles fizeram sozinhos a prova e depois fui eu que sistematizei, fizeram porque eu disse para fazerem. E aqui apareceu naturalmente. Isso é verdade. Mas sem eles quererem. Não se aperceberam de que era a prova. (Rebeca, TST 40, p. 55)

Anteriormente à sessão de reflexão, Anita e Rebeca tinham discutido entre si o enunciado da tarefa e colocado a hipótese de eliminar a sua segunda parte pois parecia ter servido para confundir os alunos. Esta possibilidade era tanto mais reforçada porque um deles, no relatório, "escreveu que a segunda pergunta era uma rasteira porque eles já tinham feito o que era para fazer na primeira" (Rebeca, TST 40, p. 50).

A ideia que apresentei fez, no entanto, surgir uma nova perspectiva sobre a tarefa e as potencialidades da aula. A hipótese de eliminar qualquer uma das suas partes foi descartada pois é o conjunto "que faz com que os alunos vão pelo caminho por que foram e depois tenham que pensar se é prova ou não" (Anita, TST 40, p. 58). Introduzimos, porém, algumas alterações no enunciado de modo a manter a possibilidade de reflexão que proporcionou evitando a sensação de "rasteira". Além disso, a troca de ideias que se gerou no grupo de pesquisa permitiu a Rebeca dar-se conta que "ao fazer a prova sempre em interacção com eles, ao ser sempre eu a conduzir quando se trata da prova, isso também é validar" (Rebeca, idem, p. 57), no que é secundada pela colega:

> É uma prova porque eu digo que vamos fazer a prova, que vamos provar.... Aí é que está!!... Muito bem!... Sim, é verdade... A prova valida os resultados matemáticos mas quem tem validado se um raciocínio é, ou não, uma prova é a professora!!... (risos). (Rebeca, TST 40, p. 57)

> Isso é interessante!!... Quando fazemos provas é a professora que tem ficado sempre com o último bastião!!... (risos)... É verdade, é.... (...) Não é a autoridade da professora que valida se é uma prova, mas podemos acabar por transmitir essa mensagem sem querer. Estás a ver a potenciação de uma coisa? (Anita, TST 40, p. 57).

Embora não tivesse antecipado a situação que ocorreu, Rebeca, ao deparar-se com ela, optou, conscientemente, por orientar o trabalho de ensino de modo a "que fossem eles a dizer se estava provado ou não" (TST 40, p. 64). No entanto, tal como Anita, não tinha consciência de que, até ao momento, nunca tinha confrontado os alunos com a necessidade de, autonomamente, "tomarem este tipo de decisões":

> No fundo já trabalhei a consciência de que ao provar um resultado podemos depois usá-lo noutros raciocínios, já trabalhei o estatuto de prova e o estatuto de conjectura, para que é que servem, e como é que podemos trabalhar, mas não os deixei sozinhos a terem consciência de terem ali a prova, a avaliar um raciocínio no sentido de decidirem se o que está feito constitui uma prova ou não. (...) Eu queria que eles percebessem, mas não tinha tomado consciência (...) de que nunca tinha deixado os alunos sozinhos a tomarem este tipo de decisões. (Rebeca, TST 40, p. 64)

A análise desta aula surge na segunda etapa da última fase do projecto. Na altura, como é visível em *A propósito da tarefa À procura de dízimas finitas* (capítulo VI), Rebeca questionava-se sobre "o excesso de protagonismo da parte do professor" (TST 39, p. 32) considerando que este é "um problema" (idem) com que há que "ter cuidado" (idem). Ao reflectir individualmente sobre a aula com a tarefa *Um quadrado de lado n*, despertou-lhe a atenção a intervenção de uma aluna, indiciadora da ideia de quem faz a prova é a professora: "Olha aqui a Tânia: *Ah, demonstrá-la. Como a sôtora às vezes costuma ali fazer*. Mas estás a ver a questão de quem demonstra sou eu? Está aqui". (TST 40, p. 48). Esta intervenção contribuiu para tomar consciência de que, subjacente à sua opção de "pegar" (idem, p. 48) na "parte da prova que é sempre mais complicada (...) apesar de fazer com eles" (idem), está "no fundo o tal protagonismo" (idem, p. 49). Por esta via sobressai a ideia de que "também é importante deixá-los pegar nesta parte da prova" (idem, pp. 48-9).

A expressão da novidade que vi na aula parece ter encontrado, nestas reflexões individuais de Rebeca, um terreno favorável para fazer emergir e destacar a pertinência da actividade desenvolvida, bem como para problematizar efeitos perversos da sua inexistência. Ao manifestar o acordo com os meus comentários evoca, precisamente, o facto dos alunos nunca terem assumido o papel de, autonomamente, darem início ao processo de prova da veracidade de uma conjectura. A discussão que ocorreu no grupo de pesquisa contribuiu, além disso, para Anita se dar conta de que nas suas aulas a situação é idêntica e de que o trabalho realizado na aula da colega é relevante: "Mas realmente esta aula deu um bom resultado, estás a ver? Não era esperável, ou melhor, não se estava à espera (Anita, TST 40, p. 58). A reflexão contribuiu, assim, para um acréscimo de consciência, em ambas as professoras, das potencialidades que podem advir para a aprendizagem da prova se, usando as suas palavras, o professor não ficar como o "último bastião" que "valida se um raciocínio é, ou não, uma prova".

Explorando situações de desacordo

As sessões de trabalho localizadas na segunda e início da terceira etapas da primeira fase do projecto, contribuíram para Anita e Rebeca se aperceberem das potencialidades que poderiam advir de instituir, como objecto de análise, ideias ou posições divergentes do ponto de vista matemático. Paralelamente, proporcionaram a reflexão sobre estratégias favoráveis à existência de discussões passíveis de permitir ultrapassar o desacordo através de argumentos matematicamente válidos cuja autoria é, prioritariamente, dos alunos. Entre estas estratégias está, por exemplo, dar visibilidade a posições diferentes sem validar ou invalidar nenhuma delas, tentar alinhar os alunos com cada uma das posições, criar aberturas para estes explicarem e fundamentarem os seus pontos de vista e cuidar do ambiente da aula para o confronto de ideias ser confortável. Na sistematização escrita, feita por Anita ou Rebeca a partir da discussão do documento 11 (tabela 7, capítulo V), estão incluídas várias destas ideias cuja relevância sobressaiu, também, da análise de conteúdo das narrativas dos episódios de argumentação matemática (Capítulo V) ou da reflexão sobre o documento 8 (tabela 7, capítulo V). Estes conhecimentos e a consciência da importância da exploração de situações de desacordo, não foram, no entanto, suficientes para Anita ou Rebeca conseguirem, de imediato, orientarem a actividade da aula no sentido que desejavam.

Com efeito, Rebeca, no âmbito da reflexão sobre várias das suas aulas localizadas na terceira etapa da primeira fase do projecto, exprime, frequentemente, insatisfação com a forma como lidou com a divergência de ideias. Nalgumas ocasiões, de que o desacordo que surgiu na aula com a tarefa *Números em círculos* analisada no capítulo VI é um exemplo, esta insatisfação decorre de não ter conseguido envolver outros alunos na análise do motivo do desacordo e no processo de resolução. Esta é, aliás, uma das críticas que faz ao seu trabalho nesta aula quando, no final do projecto, a revisita: “Ainda tentei algumas vezes “passar a bola” para os outros, mas dada a insistência do Rogério não consegui… (...) mas devia ter conseguido. Era só eu querer. Mas deixei-me levar (...) o Rogério teve mais força que eu! (risos)" (E4, p. 41).

Noutras ocasiões, a preocupação de Rebeca prende-se com o considerar que boicotou, embora não intencionalmente, o debate, porque assumiu ela própria o papel de tornar inteligível para os alunos qual a posição a adoptar e o que matematicamente a fundamentava:

> Em termos de aspectos menos conseguidos um dos meus comentários, quando vi a aula, foi que devia ter posto em evidência os desacordos e não confirmar as respostas. Eu acho que nesta aula não pus... (...) ali não devia ter deixado só porque era a maioria que tinha dito, devia ter posto alguém a explicar porque é que era $3n$ e outra pessoa a explicar porque é que não era $4n$. (...) Acho que eu quase é que certifiquei a resposta, validei a resposta certa. Acho que eles depois concordaram todos, mas acho que foi porque eu também validei. A minha atitude foi de validação, estás a perceber?... (risos). (Rebeca, TST 22, pp. 11-2)

Nas primeiras aulas de Anita, situações de desacordo e/ou discussões colectivas focadas em ultrapassar divergência de ideias quase não tiveram expressão, como é visível, nomeadamente na análise da aula com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* apresentada no capítulo VII. Este facto não é, certamente, independente do baixo nível de participação dos seus alunos no discurso, dos constrangimentos resultantes das concepções sobre o seu papel na aula de Matemática e de tentarem evitar a assunção de riscos. Começam a surgir alterações já perto do final da primeira fase do projecto quando o nível de participação aumenta e acrescem as interacções entre os alunos. Anita, nessa altura, está muito atenta aos acontecimentos da aula para dar visibilidade a desacordos e para os explorar de modo a emergirem discussões matemáticas relevantes. Simultaneamente, persiste na negociação de normas sociais que enfatizam a expressão audível do pensamento, a escuta de qualquer contribuição que surja no espaço da aula, a explicação e justificação de ideias e o confronto fundamentado de pontos de vista. Nalgumas ocasiões este confronto começa a existir:

> Houve alguns desacordos e eu aproveitei-os. Tentei "passar a bola" aos alunos e "piquei-os" para ver se agarravam. E por acaso eles agarraram mesmo bem! Aí

> agarraram bem! Na outra aula a seguir em que fizemos a demonstração estavam a dormir. (Anita, TST 23, pp. 6-7, 24/05/02)

Esta intervenção de Anita é feita no âmbito da reflexão sobre as aulas em que trabalha com a tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*. Os desacordos que refere, em número de dois, emergem na fase da partilha e análise das conjecturas formuladas pelos alunos que exploraram a tarefa usando o *Geometer's Sketchpad*. Um foca-se no aperfeiçoamento de um enunciado apresentado que contribuiu para a formulação da "conjectura do paralelogramo". O outro, posterior a este, centra-se na existência, ou não, de um contra-exemplo para esta conjectura.

Na altura em que estas aulas são leccionadas, Anita considera que a discussão proporcionada pelo trabalho desenvolvido no âmbito do projecto, também a "ajuda a reflectir. Agarrei também algumas sugestões que temos visto nestas sessões de trabalho" (TST 23, p. 17). Nas suas palavras, estas sugestões "ajudam-me a saber como reagir" (idem), ou seja, tem mais recursos para conseguir trabalhar no sentido da partilha de ideias que deseja. Além disso, sente que a troca de ideias no grupo de pesquisa a auxilia a lidar, em termos emocionais, com os sentimentos que o modo de estar dos alunos na aula de Matemática lhe suscitam: "Ajuda mesmo a pensar que não é só que é porque eles se retraíram que eu devo ficar às vezes um bocadinho inibida, pronto. Agora teimo, percebes?" (idem). Assim, instituiu os desacordos como objecto de reflexão colectiva e ambos originaram discussões significativas, embora apenas o primeiro tenha sido ultrapassado na aula[80].

Anita não lida do mesmo modo com os dois desacordos. Num deles, o segundo, intuindo que um dos alunos se retrai quando as suas ideias são postas em causa por uma colega, tenta, através da intervenção que faz, evitar que este retraimento domine, pois a seu ver "se eu não interviesse ele calava-se" (TST 23, p. 13). Endereça, assim, mensagens à turma e, em particular, aos alunos envolvidos no

[80] Na aula em que surgiram os desacordos os alunos trabalharam em duas salas diferentes: a sala do Centro de Formação onde estavam instalados os computadores e a sala habitual. A inexistência de computador nesta última, que permitisse aos defensores da existência do contra-exemplo para a "conjectura do paralelogramo" apresentá-lo à turma, a par da inexistência de uma descrição inteligível sobre as características do contra-exemplo, levaram Anita a optar por deixar o desacordo em suspenso de modo a poder revisitar, no final da aula, os ficheiros de trabalho dos alunos.

debate, através das quais revela explicitamente a sua posição quanto à legitimidade da divergência de pontos de vista:

> Eu tenho aqui um "olhinho" que quer dizer que para mim esta intervenção foi muito importante. Digo: *Convençam-se. Ouçam bem o que está a dizer agora a Maria. Roberto, não há problema nenhum em tu estares a dizer uma coisa e alguém te estar a contradizer, ou não sei quê. Isso é um facto normal, em que deves confrontar… Qual é o problema? Não é desistir ou aceitar. Ouve a Maria, se faz favor*. E escrevi assim: *levar o Roberto a não desistir de defender a sua opinião* e também escrevi *"passo a bola"* que é o convençam-se. Quis mostrar que é normal, que é natural que haja pontos de vista diferentes, que não há problemas quando há opiniões diferentes. (Anita, TST 23, p. 22)

No outro desacordo, o primeiro, não há intervenções de Anita que explicitamente veiculem a sua perspectiva sobre o valor do confronto entre ideias divergentes. Como "a situação se estava a desenrolar" (Anita, TST 23, p. 13), procurou valorizá-lo através de vias implícitas, ou seja, pela sua "maneira de estar" (idem, p. 14) e pelo tempo que investiu na análise do trabalho do aluno: depois dele ter apresentado oralmente a conjectura, regista-a no quadro tal como lhe é ditada, desafia os colegas a comentarem-na e orquestra uma discussão que permite evidenciar que há informação não referida no enunciado, com consequências matemáticas relevantes, que importa incluir.

Quando observei o episódio relativo à resolução do primeiro desacordo, tal como aconteceu com Rebeca, dei-me conta do valor atribuído por Anita à discussão pelo empenho e entusiasmo que transparecia no seu modo de estar: "E eu ali toda satisfeita! Não se notava? Estava toda animada! (risos). (...) Eu adorei esta parte da aula... Não se notou?" (TST 23, pp. 13-14). Só que todas nós somos professoras e, como diz Rebeca, "com os miúdos é diferente" (idem, p. 14). O aluno que contribuiu com o enunciado posteriormente aperfeiçoado, sentiu-se incomodado com a discussão, o que, na perspectiva de Anita, pode ser indiciador de não ter compreendido que, como refere, "nunca quis desvalorizar o trabalho dele. Antes pelo contrário" (TST 23, p. 11). No final da aula, o aluno dirigiu-se-lhe e "veio-se justificar pelo facto de não ter dito, quando leu a conjectura, 'lados consecutivos'" (idem, p. 10). É, então, que procura fazê-lo entender as potencialidades da troca de ideias: "O que eu lhe disse foi uma coisa parecida com esta: Não há problema nenhum em dizeres como disseste, até foi bastante útil porque gerou bastante discussão, vimos bem a diferença e quais as consequências de não teres dito, não sei quê”... ” (idem).

O comentário do aluno no final da aula permite evidenciar que pode haver elementos das turmas que não compreendem que o tempo da aula dedicado ao debate de ideias que se vêm a revelar incompletas ou incorrectas, não é um desperdício a evitar a todo o custo. Problematizando modos de acção futura que tenham em conta esta possibilidade, Rebeca sugere:

> Só sendo que no final da discussão se reforçasse explicitamente a contribuição do Joel. Dizer que foi muito importante o que ele disse (...) Dizer que se ele não tivesse dito o que disse não teríamos tido oportunidade de ter esta discussão importante... (...) como eles são assim tão mesquinhos, entre aspas, se calhar era de valorizar mesmo cada vez que isto acontece. (Rebeca, TST 23, pp. 12-13)

Sobressai, assim, a importância de, pelo menos em certas circunstâncias e com turmas de características semelhantes à de Anita, o professor investir significativamente, não apenas por vias implícitas, nem só quando pressente que os alunos se estão a retrair, na negociação de significados partilhados sobre o valor do debate enquanto via de aprofundamento da compreensão.

No final da primeira fase do projecto, Rebeca refere que a reflexão sobre a sua prática, proporcionada pelo trabalho que conjuntamente desenvolvemos, contribuiu para que estivesse “mais atenta (...) e mais sensível” (E2, p. 10) a determinadas situações entre as quais inclui “desacordos existentes entre alunos” (idem) e o trabalho a eles associado: “Nem sempre consegui, mas estava com mais cuidado para isso, com mais atenção a isso...” (idem). Também Anita refere estar “mais atenta a possíveis formas de tentar levar os alunos a justificarem os seus raciocínios discutindo entre eles, nomeadamente através de questões desafiadoras, do parafrasear, da repetição, [do] como dar evidência a desacordos...” (DEA, p. 2, 1/08/02).

Com a segunda fase do projecto, prossegue o investimento quer na exploração de situações de desacordo após a sua emergência, quer na criação de condições para os alunos compreenderem que uma das suas responsabilidades é expressarem pontos de vista diferentes dos apresentados na turma, no caso de existirem, fundamentando, através de argumentos matemáticos, as ideias que enunciam e as posições que assumem. Os frutos deste investimento continuado são visíveis nas aulas em que Anita e Rebeca trabalharam com a tarefa *À procura de dízimas finitas* analisadas, respectivamente, nos capítulos VII e VI. A emergência de desacordos a partir de iniciativas das professoras e, fundamentalmente, dos alunos, foi frequente.

No final das sessões de trabalho do grupo de pesquisa, Rebeca confronta o seu modo de agir passado com as preocupações que tem relativamente às situações em que surgem na turma ideias divergentes. Salienta que a sua "atitude mudou (...) [e] não mudou só com o 9º B" (E3, p. 6), ou seja, com a turma envolvida no projecto, mas também noutras turmas. De facto, a propósito do que se passou numa aula do 7º ano de escolaridade no âmbito da resolução de um problema relacionado com as regras da adição de números inteiros relativos, refere:

> Houve esse confronto entre eles os dois e o resto da turma esteve a ver com quem é que concordava, com quem é que não concordava e depois concordaram com o segundo aluno, o Zeca (...) E antes, se calhar, também já havia estas coisas, não sei, Ana... (risos). Mas se calhar eu não lhes dava tanta visibilidade, não dizia: *vejam lá, estão aqui duas posições, com qual é que concordam, com qual é que não concordam?* Se calhar antes o Zeca dizia aquela e eu dizia: *pronto, a do Zeca é que está certa, por isto ou por aquilo*. Eu acho que, se calhar, é essa a diferença. Se calhar eu antes tinha aceitado a justificação do Zeca, porque a do Zeca é que estava certa e tentava, se calhar, *eu* [ênfase], explicar à Gabriela porque é que a dela não estava certa. Agora tive outras preocupações. Preocupei-me em que não fosse eu a dizer à Gabriela porque é que a dela não estava certa; perguntei uma outra opinião antes, apareceu logo outra hipótese e tentei que os alunos chegassem a um acordo. Se calhar é essa a minha maior diferença, eu estar consciente disso e estar com essa preocupação, preocupar-me com o aproveitar destas situações e tentar que eles interajam entre si (E3, p. 7).

As palavras de Rebeca ilustram que o desenvolvimento do projecto lhe trouxe uma maior consciência sobre a importância de solicitar uma opinião diferente face a uma contribuição que sabe ser incorrecta, de não validar essa opinião porque correcta explicando porque o é, de pôr em evidência as duas posições procurando que os alunos se alinhem com uma ou outra e de tentar que o consenso seja obtido através das interacções entre os alunos. Ou seja, está mais consciente da relevância de não assumir ela própria a responsabilidade de resolver a divergência pelo recurso ao conhecimento matemático que possui, mas antes de a delegar nos alunos procurando que mobilizem o seu.

Na mesma altura, Anita escreve que um dos aspectos que concorreu para o seu desenvolvimento profissional, fruto da experiência de participação no projecto, foi o dar "visibilidade a desacordos" (DEA, 13/04/03, p. 1) enquanto uma das "estratégias" (idem) favoráveis ao envolvimento dos alunos em discussões matemáticas.

Durante a quarta entrevista, solicito a ambas as professoras que, tendo em conta as suas vivências durante o trabalho que desenvolvemos, reflictam sobre o que pode facilitar a emergência de discussões focadas na resolução de desacordos, sobre cuidados a ter ao longo da orquestração destas discussões e sobre potencialidades, dificuldades e riscos da exploração de situações de desacordo na aula de Matemática.

Ambas se focam, sobretudo, nos desacordos provenientes de contribuições divergentes dos alunos. Anita salienta, no entanto, que "ser o professor a provocar [o desacordo] também é importante" (E4, p. 32). Recorda a este propósito a aula em que trabalhou com a tarefa *Lados, pontos médios e quadriláteros*. Confrontada com a ausência de contribuições em que se apoiar para ajudar a turma a caminhar no sentido do aperfeiçoamento de uma conjectura, apresenta um exemplo que traz à tona os problemas relacionados com a incompletude do enunciado e faz emergir ideias divergentes. Esta intervenção surgiu-lhe naturalmente: "Não estava mesmo a pensar. Acontece-me" (idem). Reconhece, contudo, que pode ter deixado escapar oportunidades importantes para ela própria fazer emergir desacordos na aula que ajudassem os alunos a avançar na compreensão da Matemática: "Devia era ter mais presente isso (...) Se eu estivesse sempre a pensar nisso, a pensar que podia provocar, se calhar provocava mais (...) Tenho que pensar no aproveitar. Se eles não aproveitarem, provoco eu de uma maneira rentabilizadora" (idem).

Os comentários de Rebeca sobre as potencialidades da exploração de situações de desacordo são breves e colocam a ênfase no seu valor para o desenvolvimento, pelos alunos, da capacidade de argumentação matemática: "Vamos às potencialidades: os alunos desenvolverem a capacidade de argumentação, serem capazes de argumentar com argumentos matematicamente válidos e serem capazes de resolver os desacordos entre eles" (E4, p. 24). Diferentemente, Anita discorre longamente sobre este aspecto. As suas palavras permitem evidenciar que são múltiplas as vantagens que reconhece nestas situações. Algumas directamente relacionadas com a aprendizagem da Matemática e outras que se prendem com o modo de estar dos alunos na aula:

> Durante a discussão e, particularmente, durante os momentos de desacordo, geram-se óptimos momentos — e acho que são mesmo óptimos — dos alunos mobilizarem e recorrerem a argumentos matemáticos diversos no sentido de defenderem as suas teses. E depois é engraçado, porque eles podem ter pensado numa coisa, depois há outros que dizem outra coisa e eles têm que jogar com outras coisas para convencer os outros. (...) Portanto, há muitas potencialidades. Relacionam diferentes conhecimentos matemáticos, têm que perceber os outros para poderem contra-argumentar, têm que construir significados à medida que discutem com os outros, têm que se apropriar de novos caminhos, e por isso constituem uma forma rica de explicarem e construírem com os outros os raciocínios. Os alunos até podem às vezes partir de caminhos diferentes que poderiam levar ao mesmo sítio, digamos assim, agora quando eles estão a argumentar, das duas uma: ou até podem ter todos razão, ou então podem aperceber-se que a meio do caminho houve uma infracção qualquer. Continuando com as potencialidades. Os alunos aprendem a valorizar a opinião dos outros e o conhecimento é validado pelos próprios argumentos matemáticos e não por outra forma. (Anita, E4, pp. 27-8)

A análise do discurso de Anita e Rebeca quanto ao que pode facilitar a emergência de desacordos e de discussões possibilitadoras da sua resolução pela turma, permite destacar três aspectos. O primeiro foca-se nas tarefas que se apresentam aos alunos. Na perspectiva de Rebeca, uma tarefa que "potencia o surgirem o opiniões diferentes (...) potencia a emergência de desacordos" (E4, p. 26). A divergência de ideias pode, no entanto, surgir a partir de tarefas de tipo diferente: "ser suficientemente aberta para permitir diferentes resoluções, ou posições, ou não ser de resposta imediata" (idem). Neste último caso, em particular, não é relevante se a tarefa é, ou não, de resposta única. O que importa é os alunos "terem que pensar e tentarem chegar lá" (idem), pelo que, para Rebeca, uma tarefa que "também seja rica em termos de possibilidades deles errarem" (idem) pode facilitar o aparecimento de contribuições que vão em sentido oposto.

O segundo aspecto prende-se com a grande atenção e perspicácia que o professor precisa de ter para identificar as situações de divergência de ideias. Por vezes, os desacordos são latentes no sentido em que não são nítidos os contornos das posições em confronto. Outras vezes, no âmbito da multiplicidade de interacções geradas numa discussão, algumas das quais quase simultâneas, não é claramente visível, para a globalidade dos alunos, a existência de ideias divergentes.

O terceiro aspecto, que está ligado com o segundo, relaciona-se com a grande importância do professor dar visibilidade ao desacordo, ou seja, trazê-lo à tona evidenciando as diferentes posições e instituí-lo como objecto de análise pelos alunos:

> O que facilita a sua emergência [desacordos]? É dar evidência a esses mesmos desacordos. Isso é o que acho. (...) É estar atenta, e é dizer, por exemplo, *uns dizem isto e outros dizem aquilo, e agora como é que é?* E remeto para a turma. Quando a gente faz isso o que é que se está a passar? Por um lado legitima-se a possibilidade de desacordo e, por outro, também é uma doce provocaçãozinha (risos). (Anita, E4, p. 30)

> Outra coisa que é importante é o professor pôr em evidência diferentes posições, para a resolução de um problema. Porque se eles estiverem lá no seu grupo e se as diferentes posições dos grupos não forem postas em evidência para a turma se calhar não surgem desacordos. É a tal emergência. (Rebeca, E4, p. 26)

Debruço-me, em seguida, sobre riscos associados à exploração de situações de desacordo na aula de Matemática e cuidados a ter durante a discussão destas situações para, em particular, precaver e/ou abrandar estes riscos.

Durante a quarta entrevista ambas as professoras referem ser importante dar atenção a factores de ordem afectiva quando se pretende explorar situações de desacordo na aula. A prática revelou-lhes que os alunos, "ao colocarem a opinião deles perante todos e se, eventualmente, não for uma resposta correcta (...) se algum é que tem razão, há o risco de (...) se sentirem postos em causa" (Rebeca, E4, pp. 24, 25); "podem-se inibir, podem-se melindrar" (Anita, E4, p. 29) e mais tarde "não quererem expor-se" (Rebeca, E4, p. 25). Assim, há "que se ter em conta essa parte afectiva" (Anita, E4, p. 29), há "que se ter muito cuidado" (Rebeca, E4, p. 25), embora com o tempo "vão aprendendo a aceitar que podem existir posições diferentes e que o que interessa é discuti-las" (Anita, E4, p. 29). Entre as vias que podem contribuir para abrandar este risco estão (a) dar visibilidade ao desacordo "com alguma diplomacia" (Rebeca, E4, p. 26), "apimentá-lo (...) a tal doce provocaçãozinha" (Anita, E4, p. 32) e (b) explicitar, persistentemente, o valor atribuído ao confronto de ideias: "eles vão-se esquecendo (...) se calhar, sempre que se põe em evidência, dizer: *Vejam lá, é importante. Estamos aqui a discutir precisamente porque temos opiniões diferentes e quando é assim devemos discuti-las* (...) *assim é que se evolui* (Rebeca, E4, pp. 26-7).

Há riscos associados ao papel dos alunos: "não respeitarem, por exemplo, opiniões diferentes das deles, quererem que seja a professora a validar uma opinião" (Rebeca, E4, p. 24) e "alguns alunos não acompanharem as discussões, por vezes bastante acesas entre os seus autores (...) ou pelo menos entre aqueles que se apresentaram como tal" (Anita, E4, p. 28). Há outros riscos que se relacionam, directamente, com o professor. Anita chama a atenção para o "deslumbramento do professor (risos) perante discussões acesas" (E4, p. 28) que pode impedir de se dar conta de "outros alunos não estarem a acompanhar" (idem). Chama, também, a atenção para a possibilidade da discussão "esfriar" (idem), ou seja, para a "perda de envolvimento dos [alunos] que estão a discutir" (idem) em consequência de intervenções do professor destinadas a "pôr os outros ao barulho" (idem). Lidar com estes riscos requer, na sua perspectiva, "estar com muito, muito cuidado, com muita atenção" (idem) para a possibilidade deles existirem de modo a, face a cada situação concreta, poder delinear o modo de agir mais adequado. Neste âmbito, Anita salienta a necessidade de sensibilizar os alunos que "ficaram para trás" (E4, p. 28) para a importância de colocarem "dúvidas" (idem) e, simultaneamente, "tentar" (idem, p. 33) que os colegas mais fortemente envolvidos na discussão, e não apenas o professor, "envolvam, eles próprios, os outros [colegas] também" (idem).

A análise das aulas em que Anita ou Rebeca trabalharam com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, permite evidenciar que o seu modo de agir foi orientado por vários dos cuidados que referem, e que alguns dos riscos indicados também existiram. Recordo que, nestas aulas, a maioria dos desacordos foi instituída como objecto de reflexão, que as professoras escutaram atenta e pacientemente as contribuições dos alunos e proporcionaram o tempo e a abertura necessárias para a divergência de ideias ser ultrapassada, na quase totalidade das vezes, pela obtenção de consensos, mesmo quando um dos opositores das posições em confronto era a professora. Este último caso surgiu na turma de Rebeca em que a resolução de dois desacordos passou pela sua adesão às ideias defendidas pelos alunos. Anita, porque o considerou necessário face ao modo de ser de uma das alunas envolvidas num desacordo, cuidou de controlar riscos de ordem afectiva preocupando-se com o tom de voz a usar pelas colegas e salientando, mais do que uma vez, as potencialidades do confronto de ideias para a "compreensão das coisas" (TST 42, p. 6). Ambas as professoras procuraram que as discussões focadas na resolução dos desacordos não ficassem restritas aos alunos que exprimiram, em primeiro lugar, ideias divergentes, e estes não foram silenciados.

Nos desacordos emergentes na turma de Rebeca a propósito do processo de prova da conjectura "c. pot.", não foi fácil evitar a monopolização da discussão por dois alunos e a marginalização de outros, um dos riscos indicados por Anita. A situação só se alterou quando, após algum tempo de discussão, a professora cede o lugar do quadro a um dos fortes defensores de uma das posições que, através das explicações e justificações que apresentou, contribuiu para o desacordo ser ultrapassado. Rebeca atribui ao fascínio que sentiu face à discussão que se desenrolava entre estes dois alunos, o facto de não se ter dado conta, mais atempadamente, de que os colegas não a acompanhavam. Este fascínio corresponde ao "deslumbramento" do professor para que Anita chama a atenção. Além disso, a importância de "tomar consciência" (TST 39, p. 36) do poder deste fascínio, referida por Rebeca, é um cuidado que tem ressonâncias com o "estar com muito, muito cuidado, muita atenção" de que fala a colega, de modo a evitar que se instalem situações de dispersão dos alunos que dificultam o seu posterior envolvimento no debate.

A análise das aulas com a tarefa das dízimas permite destacar três questões associadas à exploração de situações de desacordo não referidas pelas professoras durante a quarta entrevista, mas abordadas aquando da reflexão sobre essas aulas. Uma é, face a duas posições em que apenas uma é matematicamente correcta, não ser claramente visível para os alunos qual é nem o que a fundamenta. Esta situação surge numa das aulas de Anita no âmbito da avaliação da conjectura "c. pot." quando se consideram fracções de numerador diferente de 1. Na discussão que ocorreu a este propósito houve contribuições que, implicitamente, poderiam ser interpretadas no sentido da refutação da conjectura tal como estava formulada. No entanto, a reflexão sobre esta discussão evidencia que ir "dizendo implicitamente essas coisas (...) não chega" (TST 42, pp. 50).

Uma segunda questão prende-se com não serem criadas aberturas para surgirem no espaço de discurso da aula fundamentações para qualquer uma das posições em confronto, independentemente do desacordo ser matematicamente bem resolvido ou não. A existência destas fundamentações pode permitir explorar potencialidades de situações de desacordo que vão para além da obtenção de consensos relevantes. Numa das aulas de Rebeca com a tarefa das dízimas, a existência de um pedido de justificação ao autor de uma contribuição que originou um desacordo, poderia ter possibilitado rentabilizar a situação para trazer à tona limitações do raciocínio indutivo.

A terceira e última questão relaciona-se com o facto do professor não se dar conta da existência do desacordo porque interpreta a objecção de um modo que o leva a prosseguir a aula noutra direcção. Dois exemplos desta situação surgem na turma de Rebeca em relação a desacordos que considerei não visivelmente resolvidos em *A propósito da tarefa À procura de dízimas finitas*. Referi no capítulo VI que, na altura em que as objecções emergem, dava "jeito" (TST 39, p. 7) a

Rebeca haver contribuições dos alunos consistentes com o significado que lhes atribuiu para a aula se manter na trajectória delineada.

Cuidando do discurso da aula

Há várias possibilidades de analisar o discurso da aula de Matemática. Entre estas está observar a substância das ideias matemáticas em jogo, isto é, numa designação frequentemente usada, o conteúdo. Uma outra possibilidade é focar a atenção no processo de discurso, ou seja, quem fala, para quem fala e como fala. É *sobretudo* na análise do trabalho do professor relacionado com o processo de discurso que incide esta secção. Uso a palavra "sobretudo" por duas razões. Em primeiro lugar, porque esta separação é, de certo modo, artificial, na medida em que grande parte da comunicação na aula de Matemática diz respeito a ideias matemáticas. O conteúdo matemático está entrelaçado no próprio processo de discurso. Em segundo lugar, e principalmente, porque ao longo das aulas presenciadas há facetas do trabalho de Anita e de Rebeca orientadas pelo propósito de ensinarem aos alunos como se devem processar as interacções na aula quando se conversa sobre e a propósito de Matemática. Nesta medida, ensinar, por exemplo, que quem apresenta uma ideia é responsável por explicá-la e fundamentá-la — um aspecto do processo de discurso — transforma-se num conteúdo de ensino.

Organizo esta subsecção em duas partes principais. Foco-me, em primeiro lugar, na análise do trabalho de Anita e de Rebeca relacionado com a negociação de normas de acção e de interacção. Em segundo lugar, centro-me em aspectos favoráveis à emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática no âmbito de discussões colectivas, e em cuidados relacionados com a orquestração destas discussões.

Investindo na negociação de normas de acção e interacção

Começo por abordar perspectivas de Anita e Rebeca sobre a importância da negociação de normas de acção e interacção de determinado tipo, em seguida centro-me nas principais características do processo de negociação e, por último, foco atributos deste processo que emergiram como relevantes ao longo do desenvolvimento do projecto.

Importância

Para ambas as professoras a negociação de normas de acção e interacção de determinado tipo é fundamental para emergirem e se desenvolverem episódios de argumentação matemática: "Para surgirem as argumentações (...) as normas são o aspecto principal (...) são como que um pano de fundo... temos que ter aquele cenário se não..." (Rebeca, E3, p. 35). A professora apresenta esta reflexão terminados os encontros do grupo de pesquisa, ou seja, no final da segunda etapa da última fase do projecto. Reforça-a sublinhando que, embora em determinada altura tenha "dado uma grande ênfase à tarefa para a argumentação matemática" (idem), presentemente considera que ela não é o fundamental, apesar de ser "um aspecto muito importante (...). Mas independentemente da tarefa, por muito boa que a tarefa seja, se não houver as tais normas primeiro dificilmente... [haverá argumentação]" (idem). As normas a que se refere são *normas sociais* e *normas sociomatemáticas* reguladoras da acção e interacção na aula do tipo das que Cobb, Yackel, Wood, – autores referidos no documento 3 (tabela 7, capítulo V) discutido no âmbito das actividades do projecto – consideram ser favoráveis à existência de argumentação na aula de Matemática:

> Mas normas que valorizem que as pessoas se ouçam, que expressem as suas opiniões, que expressem desacordos, que ouçam o outro, que justifiquem as afirmações que fazem, que não discordem só por discordar... Isto é o pano de fundo. Se não houver um tal pano, não se pode fazer o desenho... (risos). Tem que haver. Acho que é imprescindível. (Rebeca, E3, pp. 35-6)

Esta mesma posição é partilhada por Anita. Uma das suas "maiores fontes de satisfação relacionadas com o desenvolvimento do projecto" (E3, p. 87) foi ter conhecido "formas de negociação de normas, que vão além do explícito, do que dizer explicitamente o que valorizo" (idem). Esta negociação contribuiu para conseguir "gerir uma aula em que alunos *competitivos* [ênfase] já cooperam... (...) já cooperam mais, porque para discutir entre si (...) é preciso respeitar o outro, o que o outro diz, ouvindo-o, tentando compreendê-lo" (idem, pp. 87-8). Como referi na primeira secção deste capítulo, é à persistente negociação de normas deste tipo e a aprendizagens relacionadas com processos de negociação, que atribui grande parte do que lhe permitiu caminhar em direcção ao seu ideal de uma situação de argumentação, e fazer face a "um dos grandes desafios" que a turma lhe colocava:

> E um dos grandes desafios era precisamente esse: levá-los a encarar a interacção entre colegas, principalmente quando existem os tais desacordos — porque é aí que eles se sentem, entre aspas, ameaçados no seu paláciozinho... (risos) — não como algo em que uns são ou não melhores do que os outros, mas sim normalmente e como um contributo construtivo. (Anita, E3, p. 2)

Entre os aspectos do trabalho a desenvolver, no futuro, com uma nova turma, de modo a favorecer o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, ambas as professoras fazem referência à negociação de normas, o que, a meu ver, também traduz a importância que lhe atribuem: "É uma turma nova e portanto não sei como é que eles são (...) trabalhar a questão das normas sociais e sociomatemáticas de que temos falado" (Anita, E4, p. 21); "Se calhar estes aspectos relevantes do trabalho a realizar eu já fui dizendo. (...) É a questão das normas, do passar implícita e explicitamente" (Rebeca, E4, pp. 51-2).

Tendo realçado a importância atribuída pelas professoras à negociação de normas de acção e interacção consideradas, por si, favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, debruço-me, em seguida, sobre processos usados para negociarem este tipo de normas com os seus alunos.

Processos de negociação

Ao longo do projecto, a negociação de normas sociais, ou seja, as que regulam o ensino e aprendizagem de conteúdos disciplinares diversos, entrelaçou-se com a de normas sociomatemáticas, isto é, com as mais específicas da actividade matemática desenvolvida. Este entrelaçamento é natural. Como bem salienta Toulmin (1993), os argumentos são, ou não, pertinentes e válidos consoante o campo em que a argumentação se exerce. Assim, Anita e Rebeca tinham por referência a racionalidade matemática para ajudarem os alunos a compreender quais os critérios através dos quais devia ser avaliada a possibilidade, impossibilidade, necessidade, rigor ou validade dos argumentos apresentados a favor ou contra uma determinada ideia. A análise das aulas com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, incluída nos capítulos VI e VII, revela a existência do entrelaçamento destes dois tipos de normas. Recordo que Anita e Rebeca se apoiaram nas contribuições dos alunos, ou seja, nas explicações de justificações dos seus raciocínios, para durante a avaliação de conjecturas lhes ensinarem que uma justificação matemática aceitável — norma sociomatemática — para a falsidade de uma conjectura consiste em encontrar um caso particular que satisfaça o antecedente da implicação e negue o consequente. Os episódios *Então arranjem uma coisa que me convença* (Anita) ou *Isto chega para justificar* (Rebeca) são, entre outros, ilustrativos desta situação. A discussão que permitiu, na aula de Anita, a comparação do enunciado da primeira parte das conjecturas que se vieram a fundir, pode ser também entendida como um meio de negociar o que conta como uma solução matemática diferente para um problema, outro exemplo de uma norma sociomatemática.

Ensinar quais as características de um raciocínio para este ser uma possibilidade a considerar na aula de Matemática, não foi complicado. Nalgumas das aulas da primeira fase do projecto, argumentos do tipo “é assim porque a maioria concorda que é assim” ou “porque um bom aluno diz que é assim” ou “porque a professora o diz” foram objecto de reflexão nas turmas com o propósito de evidenciar que não podem ser usados para fundamentar raciocínios matemáticos: “Aqui foi para perceberem que em Matemática uma coisa está certa não é porque a maioria o diz. Foi para chamar a atenção para isso. Justificar com a maioria não é aceitável” (Rebeca, TST 25, p. 38, 4/06/02). No entanto, este tipo de argumentos quase não teve expressão, e os alunos rapidamente compreenderam que não podiam utilizá-los e porque não o podiam.

Porém, ajudar os alunos a entenderem o que conta como uma justificação aceitável para a veracidade uma conjectura, norma sociomatemática que se prende com o próprio significado da prova, como anteriormente referi, não foi simples. Menos o foi a negociação de certas normas sociais de modo a conseguir que os alunos as tivessem por referência e não as transgredissem nas actividades que desenvolviam nas aulas. Ensinar-lhes, por exemplo, a agir de modo consistente com a importância da escuta atenta, da expressão audível das ideias, da explicitação daquilo que não se compreende ou do que se discorda, de endereçar as explicações ou justificações a um auditório mais amplo do que o constituído pela professora, exigiu a Anita e Rebeca atenção, tempo, esforço e cuidados consideráveis. Vários dos comentários proferidos no âmbito da reflexão sobre as aulas com a tarefa das dízimas, ao desvelarem intenções subjacentes a intervenções dirigidas a alunos particulares ou à turma, revelam, precisamente, a sua preocupação com a negociação deste tipo de normas.

Depois de termos terminado as sessões de trabalho colectivo, ou seja, mais de um ano após o início do projecto, Rebeca refere que há normas que os alunos parecem ter interiorizado: "Em princípio, quem costuma participar, participa de uma forma audível (...) acho que eles sabem que têm que defender os seus pontos de vista e não tenho tido problemas com isso. Até costumam avançar logo com a justificação" (E3, p. 10). No entanto, refere que a negociação de outras, cuja transgressão dificulta muito, ou impossibilita mesmo, a existência de argumentação, continua a levantar-lhe problemas:

> Regrediram na tal questão das normas, de estarem com cuidado, de se tentarem ouvir uns aos outros (...) Não são normas específicas só da aula de Matemática... (...) Tem mais a ver com o ouvir, com o estarem com atenção (...) porque se não se ouve não se pode depois participar de uma forma adequada, não se pode compreender, não se pode expressar um desacordo... (Rebeca, E3, pp. 10-11)

Na mesma altura, embora considerando que os alunos fizeram progressos consideráveis em relação à participação no discurso da aula, Anita continua a investir na negociação do conjunto das várias normas sociais consideradas favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Neste âmbito usa processos como: "pedir para falarem mais alto" (E3, p. 43), "perguntar a outro aluno se ouviu e se percebeu, se é capaz de repetir o que o outro disse e, se não é, deve dizer" (idem), "colocar ao escrutínio da turma, o alegar que não fui eu que disse, fomentando a defesa do argumento pela parte de quem disse" (idem) e salientar que "os alunos devem entreolhar-se se a discussão for mais particular, não deixando os outros completamente à margem" (idem). Muitos destes processos são, em particular, visíveis nas aulas leccionadas com a tarefa *À procura de dízimas finitas.*

Nas subsecções *O modo de estar e aspectos do trabalho da professora* dos capítulos VI e VII, apresentadas no âmbito da análise das aulas com a tarefa das dízimas, evidenciei que, independentemente das actividades em que tentam envolver os alunos ou do modo como lidam com transgressões às normas, Anita e Rebeca têm cuidados com o seu modo de agir que parecem ser, também, favoráveis à negociação de normas valorizadas. Rebeca, em particular, adere ao percurso de prova de uma conjectura sugerido por um elemento da turma porque, nas circunstâncias, considerou que actuar de outro modo poderia veicular a mensagem "é porque eu digo que tem que se fazer assim" (TST 38, p. 60). Além disso, altera a sua própria posição face à validade de outra conjectura quando duas alunas a ajudam a compreender a existência de uma incorrecção na interpretação que dela tinha feito. Também durante a orquestração de discussões colectivas, nenhuma das professoras se desloca aos lugares dos alunos para lhes tirar dúvidas ou os ouvir, apenas a eles, enquanto a discussão se desenrola. Este último cuidado é relevante, em especial, para não ser boicotada a compreensão da importância da expressão audível e da escuta atenta por todos os elementos da turma: "Porque se nós não prestarmos atenção quando os alunos estão a justificar os outros alunos também não vão prestar, vão continuar a trabalhar e a fazer as suas coisas" (Rebeca, E2, p. 2); "se um aluno, numa fase de discussão, estava a dizer uma coisita, os outros não ouviam e eu também não, e eu ia lá, ia, ia, ia… estava a estragar tudo" (Anita, E3, pp. 41-2).

A reflexão sobre a importância da actividade da aula ser regulada por normas de determinado tipo para facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, iniciou-se na segunda etapa da primeira fase do projecto a partir da discussão do documento 3 (tabela 7, capítulo V) e da análise de diálogos de sala de aula exteriores às práticas de Anita e Rebeca. Este trabalho foi importante para contactarem com vertentes do trabalho do professor que não lhes eram familiares. Com efeito, no final desta fase incluem o conhecimento sobre normas que gerem a sala de aula, ou a maior consciência em relação às normas e como negociá-las, nas mais-valias que o desenvolvimento do projecto lhes trouxe.

No entanto, o trabalho com documentos não foi suficiente para, de imediato, Anita ou Rebeca orientarem as suas práticas num sentido consistente com as normas que valorizam. Quando nos debruçámos sobre cada uma das duas primeiras aulas, a análise de normas reguladoras da actividade da aula ou de processos de negociação não foi objecto de reflexão individual, por parte das professoras, ou colectiva no grupo de pesquisa. Mais tarde, com o propósito de ajudar a reflectir e problematizar aspectos do discurso da aula que continuavam a inquietar as professoras, proponho que se interpretem episódios das suas aulas à luz das ideias incluídas em *Dinâmica da argumentação na aula de Matemática: Normas sociais e sociomatemáticas* (documento 3, tabela 7, capítulo V). A análise detalhada de interacções geradas na aula, a par da reflexão sobre o porquê de movimentos das professoras e dos alunos, contribuiu, muito significativamente, para uma aprendizagem, por aproximações sucessivas, de processos de negociação de normas fundados na capitalização de acontecimentos da aula.

Procurei evidenciar o carácter progressivo desta aprendizagem, no caso de Anita, na subsecção *Do desejar ao conseguir* incluída neste capítulo. Com Rebeca a situação não foi diferente, embora a sua turma não tivesse exigido um trabalho tão sistemático e intensivo no que respeita à negociação de algumas normas, de que a expressão audível é um exemplo, e a sua tomada de consciência sobre a importância de cuidar de determinados modos de agir tivesse surgido num tempo diferente do da colega.

Atributos do processo de negociação de normas

Analisando globalmente o trabalho desenvolvido por ambas as professoras ao longo do projecto, sobressaem atributos do processo de negociação de normas considerados particularmente relevantes por todos os elementos do grupo de pesquisa. Destaco (a) a importância da sistematicidade e persistência, (b) a pertinência de uma negociação contextualizada e (c) a essencialidade da coerência.

A importância da sistematicidade e persistência na negociação de normas. Anita e Rebeca iniciaram a negociação de algumas das normas sociais reguladoras da actividade das suas aulas antes de nos conhecermos. Por exemplo, na primeira entrevista referem preocupações relacionadas com a explicação e justificação de raciocínios pelos alunos, e nas primeiras aulas foi já visível a apropriação de normas de participação favoráveis à não sobreposição de contribuições, ou a evocação de outras relativas à não adequação de desenvolvimento de actividades paralelas ao trabalho da aula.

Ao longo do projecto, a negociação destas normas prosseguiu e alguns meses depois de o termos iniciado começou a negociação mais sistemática e organizada de outras, destinada a fazer face a modos de interacção considerados problemáticos ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Perto do final da primeira fase do projecto, Anita e Rebeca, ao reflectirem sobre algumas das aulas, tecem comentários reveladores de que continuam a existir problemas não resolvidos:

> Depois eu digo *Eu agora devia pôr era o gravador ao Roberto, não é?* (...) E pus!!... (risos) Ele fala tão baixinho, tão baixinho... (...) Tenho mesmo que pensar no que hei-de fazer... Só se lhe arranjar um microfone mesmo!!... (risos) (...) Fala muito baixinho mesmo. É um problema. E ele até diz coisas importantes. O problema é conseguir que todos ouçam. Mesmo eu às vezes tenho muita dificuldade em ouvir e às vezes nem consigo... (Anita, TST 28, p. 33)

> E a Tânia continua mas fala para mim. É a tal ligação de que eu falava há bocado. Se calhar é porque eu acho que tenho ainda dificuldade em desprender quando eles se dirigem a mim. Isto pode ser resolvido se me esforçar mais no sentido de sempre que eles falarem para mim, numa situação deste tipo, reforçar, que não o fiz aqui, que não é para mim que ela deve falar. Tenho consciência que às vezes digo, mas não digo sempre. Deveria ter esse cuidado de o fazer sempre e não pontualmente. Ser uma prática usual. Chamar sempre a atenção para se dirigirem aos colegas e não a mim [toma nota no seu documento com a transcrição]. (Rebeca, TST 25, p. 48)

Assim, dedicar uma maior atenção às normas sociais e sociomatemáticas, e ao processo de negociação de normas favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, foi um dos campos de investimento futuro incluído no plano de trabalho negociado para a segunda fase do projecto (ver anexo 10). Ao longo do ano lectivo seguinte, enquanto os alunos frequentaram o 9º ano de escolaridade, o processo de negociação de normas continuou, como a análise das aulas com a tarefa das dízimas deixa transparecer. Ou seja, Anita e Rebeca, para apoiarem um modo de falar e trabalhar em Matemática, que coloca nos alunos a responsabilidade de analisarem se o que dizem e fazem faz sentido, ou não, em termos matemáticos, não se limitaram a "ensinar-lhes", num dado momento, como deviam falar acerca de Matemática. Em lugar disso, foram persistente e sistematicamente estruturando as suas interacções com os alunos no sentido de reafirmarem o valor das normas que consideram poder apoiar e facilitar a argumentação matemática. É este esforço diário que permite a manutenção dessas normas e alimenta o próprio processo de negociação: "Eu acho que a tal história de negociar, no início, as normas sociais que pretendemos, pode ter a sua importância. Mas, só por si, não tem peso nenhum. Têm que [se] ir dizendo sempre, conforme as situações vão surgindo. (Rebeca, E4, p. 27).

A pertinência de uma negociação contextualizada. Segundo Rebeca, a negociação de normas "tem que ser mesmo em contexto" (E4, p. 27), ou seja, independentemente de se adoptarem vias mais ou menos explícitas para fazer sobressair o papel a desempenhar pelos alunos na aula de Matemática, o que importa é "fazer passar as mensagens mas dentro do contexto" (idem, p. 52) criado pelas acções e interacções existentes num determinado momento da aula. Esta mesma posição é partilhada por Anita: "É uma forma consciente, é uma forma construída na altura. Não é só dizer: *olha, eu gosto que faças isto* (risos). É aproveitar o que se passa..." (E4, p. 20). Na perspectiva desta professora, "aquilo que a gente diz que gosta" (idem) e levar os alunos a fazer aquilo de que se gosta de "uma forma mais natural sem estar a dizer façam" (idem) são "duas coisas diferentes" (idem) que têm, também, efeitos diferentes.

A importância de contextualizar a negociação de normas surge associada à necessidade de se cuidar não apenas do que explicitamente se diz, mas também, e principalmente, das mensagens que, implicitamente transparecem através do que se faz: "Acho que serve de alguma coisa só o explicitar, mas por si só o explicitar as normas que valorizamos, se não estivermos sempre com o cuidado do implícito, não serve de nada" (Rebeca, TST 37, p. 9); "ao longo do nosso trabalho, ganharam força ideias de que mais do que explicitamente, formas implícitas de valorização e, dentro dessa valorização implícita, uma negociação de normas e uma postura que reforçasse essas mesmas normas (...) seriam mais profícuas" (Anita, E3, p. 41).

O significado atribuído por Rebeca a formas implícitas e explícitas de negociar normas pode ser iluminado pelos exemplos que apresenta para clarificar esta diferença. Evocando a aula em que trabalhou com a tarefa *Números em círculos*, refere que a sua intervenção "eu não sei, o José é que disse" (E4, p. 37) tem implicitamente subjacente a ideia de que "não é a professora que tem que dizer, que tem que validar aquilo que os alunos dizem (...) está implícita uma norma... Se ele é que disse, ele é que tem que explicar" (idem, pp. 37-8). Em contrapartida, numa situação de divergência de ideias em que começou a "haver um atritozinho" (E4, p. 26) entre dois alunos, fez uma intervenção em que "explicitamente (...) [disse] que é importante discutirmos (...) porque há opiniões diferentes e isso tudo (...) ou seja, disse mesmo o que é que tinha que ser" (idem, p. 52). A perspectiva de Anita é semelhante. Por exemplo, na aula em que trabalhou com a tarefa das dízimas, durante o processo de resolução de um dos desacordos, intervém de um modo que mostra claramente que valoriza o confronto de ideias entre os alunos. Além disso, confrontando-se com transgressões recorrentes à norma "as explicações devem ser endereçadas a quem levanta objecções", senta-se numa das mesas destinadas aos alunos, o que constitui uma forma implícita de destacar o valor que lhe atribui. Em qualquer dos casos, os seus movimentos entrelaçam-se significativamente no que acontece na aula e não são inconsistentes com as normas que valoriza, o que, a seu ver, traduz uma "evolução" relativamente às formas que usava para incentivar a participação dos alunos no discurso da aula anteriormente ao projecto e mesmo nas primeiras aulas:

> É a tal coisa. Eu dizia muitas vezes: *estamos a discutir, podem participar, devem partilhar, não sei quê*, mas depois lá ia eu aos lugares deles nas fases de discussão, lá ia eu tirar as dúvidazitas, lá ia eu dar as dicas só a eles e depois não sei quê, e pronto (risos). E quando eu digo que há evolução quer dizer que tenho mais formas, mais estratégias, de fazer estas coisas, de rentabilizar as situações que surgem para negociar as tais normas. Por exemplo, aparece uma situação. Em vez de dizer directamente "devem falar", à força, quase, não é lá porque eu digo "devem" que eles entram. Tento arranjar uma maneira mais subtil (risos) digamos assim, de levar os outros a entrarem na discussão, a intervirem, principalmente nas interacções entre alunos. E quando, por exemplo, acontecem situações na aula em que normas que eu quero que existam não estão a ser respeitadas, eu aproveito essas situações para intervir e mostrar o que quero que aconteça (Anita, E3, p. 19).

A análise das aulas em que qualquer uma das professoras trabalhou com a tarefa das dízimas, permite ilustrar que há movimentos de ensino que derivam do facto dos alunos transgredirem normas que se procuram negociar. Tal como é visível no extracto atrás incluído, Anita procura que estas violações não fiquem impunes, ou seja, não age como se não tivessem existido. Em lugar disso, usa-as para fazer sobressair o papel que espera que os alunos desempenhem. O mesmo acontece com Rebeca. A mensagem "explica lá para eles" (TST 38, p. 54) dirigida a uma aluna que apresentava as regularidades descobertas nos denominadores das fracções que originam dízimas finitas focando-se apenas em si, é ilustrativa desta preocupação.

A essencialidade da coerência. O carácter essencial da coerência, entre o que explicitamente se verbaliza e o que se veicula implicitamente pelo modo como se age, para o processo de negociação de normas surge com maior destaque no grupo de pesquisa no início da segunda fase do projecto e, mais precisamente, no âmbito da reflexão sobre a aula com a tarefa *Jogo da soma e do produto* leccionada por Anita em 17/10/02.

Numa conversa informal na sequência imediata desta aula, a professora expressa uma forte preocupação com o facto dos alunos, nas fases de discussão, interagirem pouco entre si, continuarem a centrar-se muito nela e vários continuarem a falar de um modo não audível por todos, apesar dos vários esforços que, recorrentemente, tem feito para alterar a situação. Nesta altura, tinha já constatado que conheciam os papéis que ela esperava que desempenhassem nas aulas de Matemática e como deveriam falar. Com efeito, tinham sido capazes de os indicar na primeira aula do ano lectivo 2002/2003, na sequência da discussão de uma tarefa de investigação que, tal como a colega, propôs à turma do projecto com vários propósitos, um dos quais era, precisamente, indagar este conhecimento. O relato de parte do que aconteceu nesta aula torna visíveis as indicações dadas pelos alunos sobre o seu papel no discurso da aula de Matemática:

> Eu depois perguntei-lhes o que era importante, o que eles achavam principalmente nas discussões colectivas e então o que é que disseram? Disseram: *discutir, criticar no verdadeiro sentido da palavra; cooperar; não falar todos ao mesmo tempo*. (...) dizem que têm que respeitar os outros e aí eu aproveitei logo para lhes dizer que é preciso ter cuidado com esse respeito, porque respeitar os outros não é tu falas e eu estou aqui muito sossegadinho. Perguntei-lhes o que era preciso para poder respeitar. Lá vieram como o ouvir. Porque não ouvir também não é respeitar. (...) Depois perguntei-lhes: *então e se não perceberem o que têm que fazer?* Eles disseram que tinham que perguntar. Eles sabem dizer muita coisa... Também sabem que têm que dar opinião, dizer porquê e eu disse-lhes, nessa altura, que isso se chamava fundamentar o argumento. Depois perguntei-lhes: *E se existirem duas opiniões?* A Cristina, que fala sempre muito, disse logo que têm que se convencer uns aos outros, têm que partilhar, chegar a consensos. (...) Depois fomos à voz audível, claro. Como é que eles haviam de partilhar se não se ouvem, não é? Isso também eles acham que sim senhora, está tudo muito explícito. Também chegámos à conclusão de que não podem só falar para mim nem olhar para mim. O pior é fazer! E que devem olhar uns para os outros. (...) eles sabem dizer. Diz um, diz outro, sei lá. Lá dizer, dizem. O pior é praticar! (risos). (Anita, TST 37, pp. 3-4)

Desde a altura em que os alunos referiram as ideias incluídas neste extracto (19/09/02), e a aula com a tarefa *Jogo da soma e do produto*, decorreu cerca de um mês. No entanto, muitos não conseguiram mobilizar essas ideias, ou seja, não participaram da forma que eles próprios tinham considerado adequada. Anita interroga-se sobre o porquê da situação e questiona-se sobre o que fazer no futuro. É neste âmbito que proponho que incluamos nos objectivos da sessão de reflexão sobre a referida aula, uma análise "à lupa" das interacções que ocorreram durante as fases de discussão colectiva, procurando identificar normas sociais que poderão estar a regular o modo de agir dos alunos e a ser veiculadas por Anita, através de um dizer quer explícito, quer implícito. Ambas as professoras aderem à proposta, pelo que uma parte muito substancial das reflexões individuais e colectivas, sobre a aula de dia 17, focou-se aqui. É Rebeca quem começa por abordar o tema, destacando que a reflexão individual sobre a aula da colega e, nas suas palavras, "também pensando no que se passa comigo" (TST 39, p. 9), fez emergir a forte convicção de que "neste caso das normas o implícito é muito mais importante que o explícito (...). É muito mais importante aquilo que nós fazemos do que, de certeza, o explicitar. Sem dúvida nenhuma (...) Estou convencidíssima" (idem).

Os esforços de Rebeca para fundamentar esta convicção apoiando-se nos acontecimentos da aula, a abertura de Anita ao questionamento da sua própria acção e o empenhamento que pôs na identificação do porquê de alguns dos seus movimentos, contribuíram para problematizar efeitos perversos, para o processo de negociação de normas, de se deslocar aos lugares dos alunos nas fases de discussão:

> Eu não ouço porque falam muito baixinho, esforço-me por ouvir e ao esforçar-me por ouvir, às vezes, sem querer vou-me aproximando deles (risos)... (...) Pois, mas... [Assim estás a dizer que eles podem só dizer para ti, que não precisam de se esforçar para todos ouvirem... (Rebeca)] Mas então não sei... (risos) Eu quero é ouvir!... Porque mesmo que eu queira repetir para os outros às vezes não ouço!... (risos) Este é que é o problema... (...) Há alturas em que não consigo às vezes não ir. Estou ali a esforçar-me tanto para ouvir!... Oh pá, nunca mais ouço nada, a partir de agora... (risos). (Anita, TST 37, p. 21)

A reflexão sobre o desenvolvimento da aula com a tarefa *Jogo da soma e do produto* termina com a Anita referindo "Nessa fase das discussões com toda a turma não convém ir ao lugar mesmo!... Com isso eu estou plenamente de acordo" (TST 38, p. 15). Uma das críticas que tece à sua aula com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* quando a analisa no final do projecto, prende-se, precisamente, com a adesão a esta ideia e a relevância que lhe reconhece. Na aula em que esta tarefa foi proposta, tal como em várias outras que se lhe seguiram, pretendia apoiar-se nas contribuições dos alunos para poder ajudar a turma a progredir. Esta intenção tornava imprescindível conseguir escutar o que diziam. Só que os alunos exprimiam-se em voz baixa e Anita "na maior (...) ia sendo atraída para os seus lugares ou porque não ouvia ou porque não sei quê... Lá ia eu" (E4, p. 16). A expressão audível de ideias constituía uma das normas que pretendia que fosse reguladora da actividade da aula e, em diversas alturas, tinha chamado explicitamente a atenção dos alunos para ela. No entanto, a sua aproximação aos lugares dos alunos durante as discussões não era acompanhada de algo que mostrasse, claramente, que a norma tinha sido transgredida e que, por exemplo, adoptava esta estratégia para lidar com o problema da transgressão. Agia na aula deste modo sem consciência de que o estava a fazer:

> Eu valorizei muito a minha tomada de consciência — primeiro pela reflexão em que vocês me ajudaram, e em que eu também me ajudei e pelo facto de ver as aulas e analisarmos as aulas e por aí fora, aquilo tudo — de que as ideias que defendo explicitamente têm que ser coerentes com o que transmito implicitamente. E quando falo em ideias que defendo estou a referir-me, por exemplo, a que pretendo que os alunos explicitem as suas ideias para todos para depois serem discutidas na turma, que falem de modo a que os outros colegas também ouçam e possam comentar o que dizem, que discutam com os colegas etc. E quando tomei consciência de que as ideias que defendia explicitamente deviam ser coerentes com o que implicitamente transmitia, houve cuidados que, no fundo, comecei a ter, percebes? A tal coisa de não me aproximar do lugar nas discussões, porque aquilo era como se fosse um íman... Se eles falassem, eu acabava por ir, mas na coisa mais natural do mundo, percebes? Porque não estava a pensar nisso! (...) Há alturas em que me lembro: se fizeram isto, eu queria que fizessem uma determinada coisa, mas se calhar não me lembro que me fui aproximando do lugar, não é? Estás a perceber? E às tantas traio-me! (risos) Então essa ideia ficou bem na minha consciência (...) Foi muito significativa mesmo! (...) Pronto, marcou-me porque, às tantas, eu não tinha consciência de que fazia isso, percebes? (Anita, E3, pp. 9-10)

Como transparece neste extracto, foi fundamental para Anita dar-se conta, através das suas próprias reflexões e do contexto de trabalho proporcionado pelo projecto, que alguns dos seus movimentos podiam estar a boicotar a apropriação, pelos alunos, das normas que procurava ver regular a actividade da aula. Contribuiu para se consciencializar da importância da coerência entre o que explicitamente defende e o que implicitamente "transmite" através do modo como age face às circunstâncias concretas com que se depara. Um dos elementos orientadores da sua acção posterior à aula em que trabalhou com a tarefa *Jogo da soma e do produto* foi, precisamente, a demanda consciente desta coerência. Enquadra-se nesta demanda não ir ao lugar dos alunos durante as discussões colectivas porque alguns se expressam não audivelmente e precisa de ouvir, não ceder a apelos insistentes de outros que pretendem que apenas a professora escute as ideias que têm ou observe os resultados a que chegam, e encontrar formas de lidar com estas situações sem diminuir as possibilidades de expressão e partilha de ideias. Ter consciência do carácter essencial da coerência e agir procurando evitar contradições "pode ser a diferença entre o conseguir uma coisa que se quer de uma maneira e não o conseguir" (Anita, E3, p. 10). Persegui-la contribuiu, tal como diz, muito significativamente para se alterar o papel dos alunos no discurso da aula indo mais ao encontro do que desejava.

Também no caso de Rebeca, a negociação de normas com os alunos pode ser perspectivada como uma demanda e manutenção de coerência entre o seu discurso e as suas acções. Vão neste sentido os esforços que faz para procurar resistir à "tentação" (E2, p. 2) de validar ou invalidar as contribuições dos alunos: "Porque há uma tendência que nós temos... mas acho que tenho vindo a ter mais cuidado depois de nós reflectirmos... de tentar não ser eu a validar o que eles dizem, ou a contrariar, mas que sejam os colegas" (idem). No mesmo sentido vão, também, as suas preocupações quanto ao seu modo de agir em momentos de trabalho colectivo:

> O Rogério enquanto os colegas estão no quadro a explicar chama-me e eu não fui ao lugar dele. É quando digo: *Calma, agora eles estão a explicar. Prestem atenção*. Esta minha fala tem a ver com a necessidade dos alunos se ouvirem uns aos outros O Rogério não estava muito interessado no que o Francisco e o Duarte estavam a explicar. Estava mais interessado em que eu visse o que ele tinha feito. E isso acontece muitas vezes e não é só com o Rogério. E eu tento evitar ir. Então quando está alguém a explicar não vou mesmo. (Rebeca, TST 25, p. 39)

A referência feita por Rebeca neste extracto quanto ao não ir ao lugar do aluno que a solicitava é reveladora da preocupação de não desvalorizar a importância de todos escutarem as explicações apresentadas, uma das normas que tenta negociar com os alunos. A demanda de coerência parece, assim, existir na altura em que lecciona a aula a propósito da qual apresenta a reflexão incluída no extracto. Esta aula localiza-se na primeira fase do projecto que, no seu conjunto, contribuiu para "ter mais cuidados" em não introduzir inconsistências entre o que diz e o que faz: "Também passei a ter mais cuidados de não ir [aos lugares], pelo menos quando eles estão a apresentar justificações. Evitar, não ceder à tentação de ir ao lugar tirar dúvidas que estejam a surgir" (E2, p. 10). A análise da aula em que Anita trabalha com a tarefa *Jogo da soma e do produto* e a reflexão sobre a própria acção faz emergir, em Rebeca, uma forte convicção de que as mensagens que implicitamente se veiculam são importantes para o processo de negociação e, por esta via, reforça-se em si a importância da coerência:

> E nunca ir ao lugar, eu já disse isto várias vezes, durante uma discussão com toda a turma. Resistir mesmo a isto! E isso acontece cá mais à frente.... Um aluno chama-te tu vais. (...) Mas é uma coisa difícil de fazer. Eu vejo isso agora com os pequenitos do sétimo. São muito dependentes. (...) Portanto, tem que ser um treino da nossa parte. Quando é a altura das discussões dizer que não vamos aos lugares e eles têm que perceber que nesta altura não é para conversas particulares. Se têm alguma coisa a dizer é para todos. E se têm alguma pergunta particular, que não tem nada a ver, têm que aguentar e perceber que essa pergunta não pode ser colocada naquela altura. Não ceder... (Rebeca, TST 37, pp. 19-20)

O valor da coerência no trabalho do professor é, de novo, reafirmado por Rebeca no final da reflexão colectiva sobre as aulas que presenciei: "Tem que se ter, de uma maneira geral, uma atitude coerente com os alunos, independentemente do tipo de tarefas" (E3, p. 15). No que se prende, em particular, com o processo de negociação de normas, esta coerência passa, também, pela importância de ter "sempre presente em todas as aulas" (idem) e não apenas só nalgumas, "a atitude dos alunos terem que justificar, de verem se concordam ou não concordam" (idem).

Uma "maior autoconsciência" (DEA, 13/04/03, p. 1) sobre a importância de "formas de negociação de normas implícitas" (idem), em que Anita inclui a "'movimentação' do professor [na aula] (o aproximar para tentar ouvir, o ir ao lugar a meio de uma de discussão,...)" (idem), fruto da reflexão individual e colectiva proporcionada pela experiência de participação no projecto é um dos aspectos que esta professora considera ter sido mais relevante para o seu desenvolvimento profissional.

Atentando na orquestração de discussões colectivas

A palavra "orquestração" tem ressonâncias com processos de dirigir, organizar um debate, com combinações harmoniosas de sons, com os sons que devem ser ouvidos e o quê ou quem os origina, quando devem ser ouvidos, com que ritmo e dinâmica devem surgir e como se devem articular para o seu conjunto concorrer um mesmo fim (Academia das Ciências de Lisboa, 2001).

A orquestração de discussões colectivas pelo professor prende-se com movimentos de ensino que têm ligações próximas com estes significados. Há que decidir quando e com quem iniciar a discussão, que margem de liberdade terão os alunos para introduzir "sons" durante o seu desenvolvimento, que "sons" chamará a si o professor, quais os "sons" a valorizar e as fontes de produção a privilegiar, se e quando deve ser partilhada ou realçada uma ideia proveniente de trabalho anteriormente realizado ou emergente na discussão, como combinar e dar andamento aos vários "sons" para que haja bom entendimento entre todos, quer no plano pessoal, quer matemático.

É para sublinhar a preocupação e investimento de Anita e Rebeca nesta faceta do trabalho do professor ao longo de todo o projecto, que para compor o título desta subsecção escolhi o verbo "atentar" no sentido de "prestar ou dar muita atenção; ouvir, observar ou pensar cuidadosamente" (Academia das Ciências de Lisboa, 2001, p. 405).

Com o propósito de evidenciar aspectos que Anita ou Rebeca consideram ser relevantes para a participação dos alunos em discussões colectivas e, em particular, para o seu envolvimento em actividades de argumentação matemática, organizo as ideias que a seguir apresento em torno de três eixos: (a) discussão e interacções na turma, (b) início e suspensão da discussão e (c) andamento e harmonia da discussão.

Discussão e interacções

Em qualquer das duas primeiras aulas analisadas no grupo de pesquisa, durante as fases de trabalho colectivo os padrões de interacção dominantes foram entre cada professora e a turma ou entre a professora e alguns dos seus elementos. A interacção entre alunos era algo que não preocupava muito Rebeca quando iniciámos o projecto. Por vezes, fazia tentativas nessa direcção, mas agir desse modo "não é natural" (TST 15, p. 66) em si. Como refere, sentia que se esforçava: "Tenho plena consciência disso, que estou a tentar. (...) sinto que me esforço para isso. Não é o meu normal (risos)" (idem, p. 66). Anita ia tentando, aos poucos, que esta interacção existisse, mas a relutância dos alunos, a "mania de responder para mim" (idem, p. 66) aliada a movimentos seus que eram difíceis de evitar em acção ou de que não tinha consciência, contribuíam para os seus esforços não darem os resultados que pretendia.

Com o desenvolvimento do projecto, vai ganhando força a ideia de que nas fases de discussão colectiva a emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática é facilitada se a comunicação da aula não for, unicamente, mediada pela professora, ou seja, se for quebrado o padrão: o professor coloca as questões ou faz intervenções destinadas a fazer surgir contribuições dos alunos, estes respondem-lhe, ele escuta a resposta e lança outras questões ou faz novas intervenções. Uma das reflexões apresentadas por Rebeca no âmbito da análise da aula em que trabalhou com a tarefa *Triângulos semelhantes, áreas e perímetros* permite, entre outros exemplos, apoiar esta ideia:

> O problema mesmo foi de não ter dado tempo para eles interagirem uns com os outros, para confrontarem ideias uns com os outros e apropriarem-se melhor do que sendo só a minha interacção com eles. (...) Tanto que um dos momentos, e foi onde surgiu aquela conjectura de que a Anita tanto gostou, foi o único momento em que eu acho que houve mais argumentação, foi na questão das alturas em que houve conversa entre eles. O Duarte tentou argumentar o caso dos ângulos serem iguais e não conseguiu completamente e depois o Diogo argumentou porque é que o outro lado era *rd* e depois o Rogério voltou a argumentar o outro lado ser *rd*, voltou a insistir e voltou a dizer o mesmo que o Diogo já tinha dito... (...) Estas partes, quando há a tal discussão entre eles, acabam por ser aquelas que mais frutos dão. Porque quando eu conduzo só sai aquilo que eu quero, percebes? (risos). Não saem as outras coisas. E quando os deixo livres para responderem uns aos outros, saem mais coisas do que quando me respondem àquelas perguntas directas, conduzidas que eu faço. (...) Devia ter passado mais a bola para eles, para eles discutirem uns com os outros. (Rebeca, TST 20, p. 17)

Pouco a pouco, fruto do investimento continuado na troca de ideias entre alunos, vão surgindo mudanças nos padrões de interacção existentes nas aulas de Anita e de Rebeca. A análise daquelas em que trabalharam com a tarefa *À procura de dízimas finitas,* analisadas nos capítulos VI e VII, revela que em várias ocasiões existem diálogos entre alunos, por vezes gerados a partir de iniciativas deles próprios, e que mesmo as interacções em que as professoras estão também envolvidas têm uma natureza diferente da que tinham ao iniciarmos o projecto. Há uma maior partilha, com os alunos, do controle do discurso da aula. Quanto a estas mudanças, a diferença entre Anita e Rebeca parece prender-se não tanto com o investimento feito para que acontecessem, nem com a sua substância, mas mais com o valor atribuído às interacções entre alunos. Rebeca "valorizava muito pouco" (E3, p. 38) estas interacções mas, nas suas palavras, "isso mudou na minha maneira de ver" (idem). Em contrapartida, ver surgir interacções nas suas aulas entre alunos era um dos sonhos de Anita: "tanto que, às vezes, fico a olhar deslumbrada sempre que consigo fazer... está ali uma situação de mais interacção. É aquilo que eu sonho" (E3, pp. 28-9).

Ao reflectir individualmente sobre o documento *Tópicos de conversa* enviado previamente à terceira entrevista (ver anexo 6), Rebeca, por sua iniciativa, elaborou um esquema que levou para a situação de entrevista destinado a ilustrar a sua nova perspectiva sobre as interacções na aula, em particular nas fases de discussão colectiva, e para dialogar sobre as preocupações que foi tendo para "assumir um papel menos de interlocutora privilegiada" (E3, p. 2). Relativamente às duas professoras, este esquema pode permitir iluminar e sistematizar o essencial das mudanças relativamente ao seu papel no discurso da aula. O esquema é composto por dois modelos em que Rebeca contrapõe o "antes" e o "depois". Uns dias após a realização da entrevista, também por sua iniciativa, complexifica o modelo referente ao "depois" porque, nas suas palavras "é capaz de traduzir melhor as minhas ideias" (DER, 19/03/03, p. 2). Apresento-o, em seguida, incluindo as duas versões representativas do "depois" (figura 12). Represento o modelo correspondente ao "antes" por modelo A e os modelos correspondentes ao "depois" por D1 e D2.

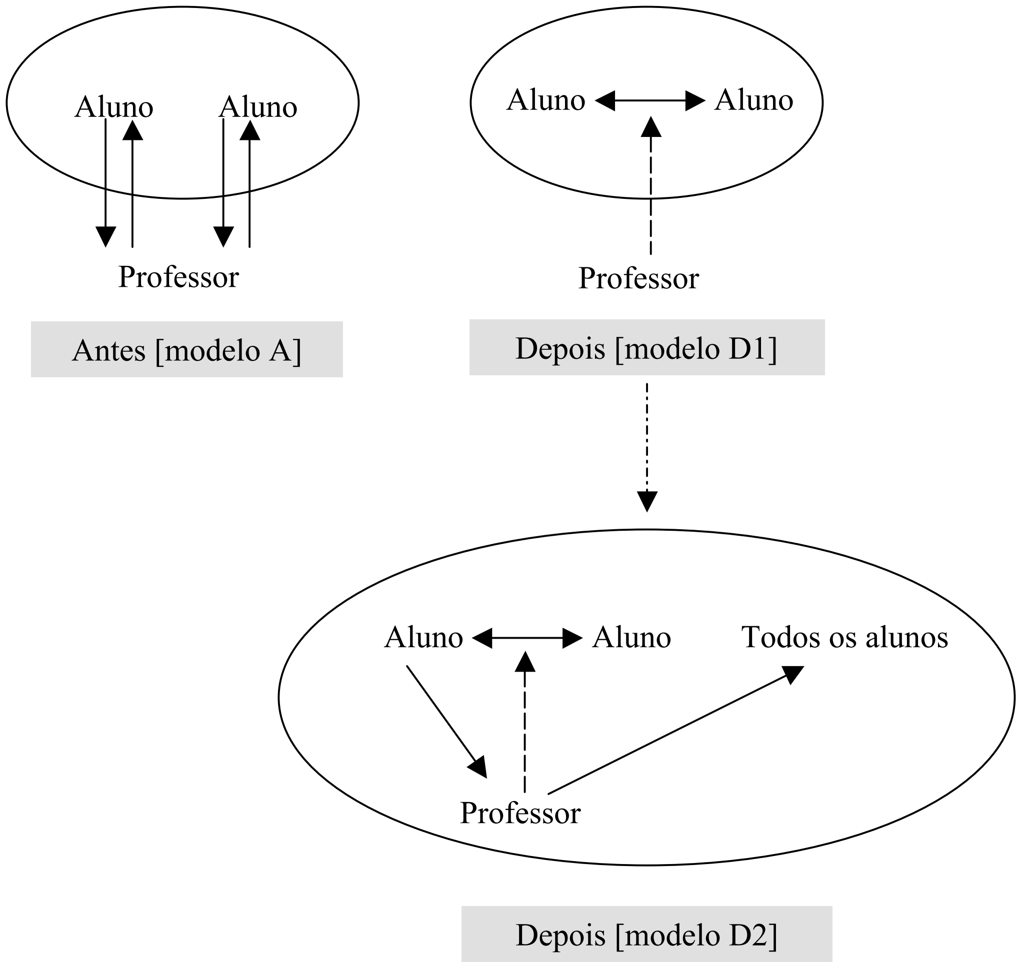


Figura 12: Nova perspectiva de Rebeca sobre as interacções na aula

Explicando o esquema, Rebeca diz que as setas incluídas no modelo A representam o padrão: a professora endereça uma mensagem a um aluno, este "responde para a professora, depois a professora remete para outro aluno e o aluno remete outra vez para a professora" (Rebeca, E3, p. 2). A palavra "aluno" é, pois, considerada no sentido individual ou colectivo. O que caracteriza o padrão é as falas dos alunos estarem entre falas da professora. A actividade matemática da aula apoiava-se nas contribuições assim obtidas: "Não me punha lá a fazer as coisas no quadro e a dizer 'agora passem'. Não! Tentava fazer as coisas em interacção com eles, mas era eu com eles (...) era normalmente como era essencialmente antes" (idem). Com a experiência de participação no projecto, Rebeca não deixa cair algumas das suas preocupações relativamente à interacção professora/aluno(s), mas estas preocupações ampliam-se, a interacção transforma-se e começa a investir "também mais na conversa entre os alunos, mais na comunicação horizontal" (idem):

> Agora é diferente. A minha preocupação é mais alargada. (...) passei a preocupar-me com outras coisas também, nomeadamente que os alunos pusessem mais em causa o que os colegas diziam, com a tal preocupação de interacção não só entre mim e eles... eu focava muito as aulas nisso, não é?... (Rebeca, E3, p. 2)

A seta bidireccional incluída nos modelos D1 e D2 visa, precisamente, destacar a ênfase que Rebeca passou a dar à interacção entre os alunos. Ao ponto médio do segmento que compõe esta seta, faz chegar uma outra, com origem no "professor", que intencionalmente representa a tracejado porque é "uma interacção diferente" (E3, p. 2) da antes existente: "a seta a tracejado significa o professor mais como moderador" (DER, 19/03/03, p. 2). As novas setas representadas em D2 destinam-se a clarificar um dos aspectos do significado atribuído ao "papel de moderador":

> As novas setas é quando um aluno coloca uma questão ao professor e este a remete a toda a turma, ou quando o professor rediz (...) o que um aluno disse, por exemplo. No papel de moderador, a meu ver, já estão implícitas estas setas, mas isso não tem de ser claro para qualquer pessoa. (DER, 19/03/03, p. 2)

Em qualquer dos modelos D1 e D2, Rebeca não representa as interacções correspondentes às setas incluídas no modelo A. Considera, no entanto, que também devem existir na aula se bem que com dominância inferior à que tinham ao iniciarmos o projecto: "No segundo esquema [modelos D1 e D2] (...) não estão setas do aluno para o professor, mas também têm de existir, mas em menor grau" (DER, 19/03/03, p. 2).

Entre os aspectos considerados relevantes para o seu desenvolvimento profissional fruto da experiência vivida, Rebeca e Anita incluem, respectivamente, uma nova perspectiva sobre as interacções na aula que coloca em lugar de destaque a troca de ideias entre alunos e a ampliação de estratégias favoráveis a que ela surja:

"Passei a ver a interacção na sala de aula mais entre os alunos e não só entre os alunos e o professor" (DER, 19/03/03, p. 1); "ampliação de estratégias de forma a envolver os alunos numa discussão entre alunos (redizer: repetir, expandir, parafrasear e relatar), dando visibilidade a desacordos e envolvendo mais alunos na continuação/crítica do que os outros dizem" (DEA, 13/04/03, p. 1).

Início e suspensão da discussão

Houve duas questões que foram frequente objecto de troca de ideias no grupo de pesquisa ao longo de todo o projecto: Quando interromper o trabalho de pares/grupos para dar início à apresentação e discussão dos frutos desse trabalho? Será importante, ou não, e em que circunstâncias, suspender a discussão colectiva de modo aos pares/grupos de alunos poderem reflectir entre si sobre a actividade que desenvolvem? Estas questões prendem-se com uma outra focada nas modalidades de trabalho na aula consideradas favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e sua articulação.

Identificar o momento mais adequado para interromper o trabalho de pares/grupos é uma "das decisões que é mais difícil tomar" (Rebeca, E2, p. 2). Esta ideia é recorrentemente salientada por esta professora ao longo de todo o projecto. Como referi na análise das aulas em que trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas* (capítulo VI), por vezes, associa a palavra "dificuldade" a situações que envolvem decisões deste tipo, e outras refere-se-lhe como estando face a um "dilema":

> Tento deixar pelo menos meia horita para discutir. E isto é das tais coisas que para cumprir é terrível. Tenho a tendência para dar sempre mais um bocadinho de tempo antes de passar à discussão, porque há grupos que estão entusiasmados a trabalhar. E eu penso: *ah, vou dar mais uns minutinhos*. E depois penso: *agora é que tem que ser, porque já estão a dispersar e não sei quê...* E ando sempre com este dilema: Eu a querer interromper o trabalho de grupo ou de pares e haver uns quantos que não querem. Sinto este dilema terrivelmente. (Rebeca, TST 41, p. 7)

Segundo Rebeca, na fase da preparação da aula pode pensar-se em "várias hipóteses relativamente ao quando queremos intervir, ou quando queremos parar o trabalho dos alunos para discutir com todos” (E2, p. 2). No entanto, esta reflexão não é suficiente para as dificuldades desaparecerem: “é importante decidir na altura... (...) na altura é que temos de ter o *feeling* e a sensibilidade e isso é que é difícil (...) e nunca temos bem a certeza absoluta se parámos exactamente no momento certo” (idem). Ver o entusiasmo dos alunos face à actividade que têm em mãos, “gostar de os ver envolvidos, a avançar” (Rebeca, E3, p. 17), sentir “que têm alguma relutância em parar” (idem) ou pressentir que há elementos da turma que ainda não concluíram a tarefa proposta mas “achar que estão a querer fazer e querer dar tempo para que esses cheguem lá por eles” (Anita, E4, p. 7), são factores que jogam a favor do prolongamento do trabalho de pares/grupos. Contra este prolongamento está a desmotivação ou dispersão dos alunos relacionada com o não conseguirem prosseguir a actividade por si próprios e, em particular, haver tempo para a discussão colectiva com as várias potencialidades que Anita ou Rebeca lhe reconhecem:

> Eles estão a partilhar e da partilha pode e deve nascer uma construção nova, novas ideias, independentemente de quem tem razão e desde que bem argumentadas (...) esclarecem-se dúvidas, são mobilizados diversos conhecimentos, raciocínios, processos matemáticos e há a valorização da comunicação matemática que é uma competência transversal muito importante, já para não falar da comunicação em geral. (Anita, E3, pp. 2-3)

> Eu decidi que eles haviam de interromper... (risos) Porquê? Porque senão também tinham tudo feito e não dava discussão nenhuma. É o tal problema... (risos) Porque se todos chegarem ao final com tudo feito, está bem que há a discussão rica no grupo, mas não é tão rica como se for na turma toda onde surgem outras opiniões diferentes… E então eu insisti nisso. (...) Depois eles continuaram a trabalhar em grupo e quando houve outra interrupção, que foi para ver a fórmula da soma dos ângulos internos, aqui já não notei que houvesse resistência à interrupção. (Rebeca, E4, p. 30)

As palavras de Rebeca incluídas no extracto acima apresentado revelam que na aula a que se refere, leccionada muito perto do final do projecto, houve várias fases de trabalho de grupo e de trabalho colectivo, ou seja, teve uma estrutura organizativa de certo modo semelhante à adoptada na aula em que trabalhou com a tarefa *Quadrados em quadrados*. Por um lado, esta opção aumenta o número de decisões relativas à escolha do melhor momento para passar de uma modalidade de trabalho a outra e, por esta via, acrescem as dificuldades. Por outro lado, as palavras da professora deixam transparecer que entrelaçar as modalidades de trabalho torna a discussão colectiva mais rica, tal como tinha, anteriormente, sobressaído no âmbito da reflexão sobre o desenvolvimento da aula com a tarefa *Quadrados em quadrados*. Rebeca sublinha esta última ideia em várias ocasiões reafirmando as suas potencialidades para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática: "É a tal história de os deixar evoluir um bocadinho, depois discutir, depois, se for preciso, deixá-los então trabalhar mais um bocadinho e depois discutir outra vez. Acho que é mais rico em termos de argumentação" (E3, p. 17). Apesar de ter percepcionado as potencialidades do referido entrelaçamento a partir da análise sobre as aulas com a tarefa *Quadrados em quadrados*, esta percepção não foi, no entanto, suficiente para delinear o trabalho de ensino tendo-as em conta. Foi necessário tempo e novas oportunidades de reflexão para que a ideia amadurecesse e começasse a incluí-la, intencionalmente, nas suas práticas quando considerou ser de o fazer:

> E nas aulas filmadas que temos tido acho que têm sido essas [aquelas em que as modalidades de trabalho se entrelaçam] as mais ricas em termos de argumentação. (...) E eu acho que nós já tínhamos falado nisto noutras alturas. Mas é das tais coisas, uma pessoa não tem... Não sei... Eu, pelo menos, esqueço-me. Depois vou vendo outras coisas e pensando e aí é que uma pessoa se vai lembrando disso outra vez. (...) Não é o facto de pensarmos nisso uma vez que depois se faz isso no trabalho, que depois na aula a seguir vou fazer exactamente isso. Depois acabo por me esquecer, pode-me sair da ideia... (Rebeca, E3, pp. 17-18)

Uma das críticas que Rebeca tece à aula em que trabalhou com a tarefa *Números em círculos*, ao analisá-la no final do projecto, prende-se, precisamente, com o tempo excessivo destinado ao trabalho de grupo que, do seu ponto de vista, contribuiu para condicionar e empobrecer a discussão: "Não precisava que eles estivessem tão avançados para começar a discussão. (...) E aí já tínhamos o tal tempo para a discussão, que naquela altura já não tínhamos. (...) e até tinha sido mais rica" (E4, p. 42). Avaliando, em geral, os inconvenientes e vantagens de se entrelaçarem as modalidades de trabalho, a balança pende a favor das vantagens:

> É, é sempre aquela chatice de ter que interromper… Chatice porque eles não querem que o trabalho deles seja interrompido. Mas acho que compensa, apesar de termos que insistir um bocado na tal interrupção. Mas isso, se calhar, com um pouco mais tempo, numa turma em que desde o início se vá interrompendo e se vá dizendo e em que eles se vão se apercebendo, se calhar para o final já não se ralam com a tal interrupção. Começam a perceber o seu sentido… (Rebeca, E4, p. 43)

Por vezes há, nalgumas aulas de Anita ou Rebeca, interrupções nas discussões colectivas que têm um carácter diferente das anteriormente referidas, mas que também envolvem passagens do trabalho colectivo ao trabalho de pares/grupos e vice-versa. São suspensões curtas nas discussões que podem ser observadas, por exemplo, na aula em que Anita trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, após as quais a discussão é retomada: na altura em que a turma analisa uma conjectura cuja compreensão não é simples, face a opiniões divididas quanto à possibilidade de um caso particular ser um contra-exemplo e ao aparecimento de outro que o era, na realidade, Anita decide "parar para eles pensarem um bocadinho nos dois casos antes de continuar" (TST 41, p. 31).

Em certa medida, certas pausas no trabalho com toda a turma existentes nas aulas de Anita desde o início do projecto destinadas aos alunos pensarem sobre uma ideia publicamente expressa, têm certas semelhanças com estas suspensões temporárias. Como ilustra o diálogo que a seguir apresento, é no âmbito da reflexão sobre um episódio ocorrido numa das aulas de Rebeca com a tarefa *Quadrados em quadrados*, que sobressai a possibilidade de haver vantagens em interromper uma discussão por curtos espaços de tempo:

> Rebeca: Aqui a Jacinta já concordava com o Alberto. E eu digo: *Concordas com o Alberto. Duarte, estavas distraído, estavas a falar com o Rogério, não ouviste o que ele disse*. E surge aqui uma coisa que acontece normalmente neles e que é um problema. Eles embrenham-se tanto nas discussões que depois começam, às vezes, entre eles a discutir as coisas! Eles aqui estavam a conversar sobre isto.
>
> Anita: Se calhar estavam a sentir necessidade de trocar umas palavras entre eles...

Ana: Isso é o que diz um artigo que eu li sobre a argumentação e o papel do professor. Numa discussão, durante dois ou três minutos os alunos trocam impressões entre si e depois partilham com a turma toda[81].

Anita: Pois, uma mini-reflexão entre eles... Se calhar isso é uma ideia a tentar...

Rebeca: Se calhar é mesmo uma ideia a tentar. Estar com atenção nas discussões para ver se merece a pena dar uns minutos para eles pensarem. Se calhar aqui era um desses momentos. Dar uns minutos para pensarem se num quadrado grande se podem inscrever tantos quadrados como num pequeno e na justificação que o Alberto apresentou para poderem. Exacto.

(TST 27, pp. 58-9)

Como é visível neste diálogo, a sinergia entre necessidades da prática e ideias teóricas foi favorável à consideração da suspensão temporária das discussões como uma "ideia a tentar" destinada a possibilitar trocas de ideias entre os alunos sobre o assunto em debate e aquilo que a seu propósito ouviram. Anita incorpora-a nas suas práticas com sistematicidade, o que pode não ser independente das ressonâncias que estas interrupções têm como as aberturas para trabalho de pares nas fases de trabalho colectivo existentes nas suas aulas. Com o passar do tempo e as reflexões proporcionadas pelo projecto, a fluidez entre os contornos do que é discussão colectiva, ou não é, vai desaparecendo. É apenas perto da altura em que terminámos as sessões de trabalho do grupo de pesquisa, que há em Rebeca uma consciência acrescida sobre as potencialidades que as suspensões temporárias numa discussão podem ter. Este acréscimo de consciência não é independente da possibilidade de reflexão proporcionada pela observação das aulas da colega:

E facilita [a argumentação] outras coisas de que agora temos falado, que eu não tenho feito mas que a Anita tem feito, que são os tais pequenos momentos de trocas ideias entre os alunos durante as fases de discussão. E tem-me ajudado... Isso é das tais coisas... Apesar de nós termos pensado no final do ano passado, a seguir à minha tarefa dos *Quadrados em quadrados*, que seria bom existirem estes momentos, a Anita, por exemplo, apropriou-se dessa ideia e começou a fazê-lo. E eu não. E só comecei a tomar mais consciência da sua importância ao ver as aulas da Anita, ao ver que estava a funcionar. (Rebeca, E3, p. 34)

[81] Referência a um artigo de Yackel (2001). As ideias incluídas neste artigo sobre estas suspensões temporárias numa discussão e suas potencialidades foram expandidas para lá da breve referência que lhes fiz neste diálogo.

Na sessão de reflexão sobre a última aula de Rebeca que foi objecto de reflexão no grupo de pesquisa, esta professora critica o modo como agiu durante uma discussão colectiva, precisamente, porque a "devia ter interrompido" (TST 42, p. 77), para os alunos "pensarem no lugar à medida que fossem surgindo coisas novas" (idem). Reafirma que "os bocadinhos que a Anita dá aos alunos no meio das discussões colectivas para eles irem pensando em coisas que surgem (...) até são importantes" (idem). Um pouco depois desta altura começa a adoptar as suspensões temporárias como um meio de facilitar a orquestração da discussão face a desacordos que originam argumentos diversos, quase simultâneos e que, apesar de expressos num tom de voz audível, não são inteligíveis pela sobreposição: "Estava a sentir dificuldade em gerir esta interacção... (...) resolvi parar e dar-lhes dois minutos para pensarem (...) Estavam a discutir até em voz alta mas todos ao mesmo tempo, desorganizadamente" (Rebeca, E3, pp. 11-2).

Segundo Rebeca, para o "envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, (...) os tais momentos de interrupção da discussão podem ser muito importantes" (E3, p. 21). Anita partilha esta opinião, sublinhando a sua relevância para a apropriação e amadurecimento de ideias pelos alunos enquanto meios passíveis de facilitar e enriquecer a prossecução da discussão:

> Parece-me que quando surgem várias ideias há, por vezes, que amadurecer as ideias que estão a aparecer entre nós. Às vezes, uma ideia que é apresentada não entra logo; uma pessoa ouve uma ideia nova e também precisa, às vezes, de reflectir antes de poder comentar convenientemente. Nem sempre, mas alguns precisam e algumas ideias são propícias ou são um bocadinho mais elaboradas. E então, no meio das discussões, por vezes, dava esses bocadinhos de tempo para, no fundo, os alunos amadurecerem as ideias para as poderem comentar. Isto eu acho importante. (Anita, E3, p. 11)

Um aspecto sublinhado recorrentemente por Rebeca como devendo ser objecto de sistemática atenção na passagem das fases de trabalho de pares/grupos às de trabalho colectivo, prende-se com a importância de demarcar claramente uma modalidade de trabalho da outra: "É a tal história de ficar sempre muito bem claro quando é que estamos na discussão com todos ou quando é trabalho nos lugares, percebes? Aqui houve a tal quebra na discussão e acho que ficou um bocado dúbio"

(TST 38, p. 23). As reflexões de Anita sobre o ir ao lugar dos alunos nas fases de discussão colectiva, apresentadas na subsecção relativa à negociação de normas, também deixam transparecer alguns dos efeitos perversos da inexistência de uma separação nítida entre as modalidades de trabalho.

Andamento e harmonia da discussão

A existência de discussões colectivas deriva, antes de mais, de haver expressão pública do que se pensa. Um dos meios privilegiados de que Anita e Rebeca se servem para fazer emergir contribuições dos alunos são questões. No entanto, há muitos tipos de questões e várias formas de as colocar, algumas das quais significativamente indutoras de respostas. Ambas as professoras privilegiam, no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática, a compreensão e a autonomia, pelo que as suas preocupações foram guiadas pela vontade de confrontarem os alunos com questões não limitadoras do pensamento. Este trabalho não se revelou simples. Saber que perguntas colocar não influenciado a resposta é, nas palavras de Rebeca, "um dos nossos dilemas": "É com isso [influenciar a resposta] que temos que ter muito cuidado. E acho que é um dos nossos dilemas. Que perguntas? Porque nós também temos que fazer perguntas (TST 37, p. 27).

Com efeito, embora na fase da preparação das aulas se possa pensar em perguntas para "suscitar o espírito argumentativo" (Anita, E2, p. 9) e/ou para permitir aos alunos ir mais longe na exploração de uma tarefa, muitas das que alimentam uma discussão são improvisadas na altura mediante o que se vai ouvindo. Por exemplo, Anita, ao trabalhar com a tarefa *Jogo da soma e do produto*, confronta-se, numa das fases de discussão, com soluções válidas para o problema apresentado, mas demasiado simplistas e, assim, na aula, "nasceu uma nova questão" (Anita, TST 37, p. 13). Nas suas palavras, "no caso de eles quererem ir para casos muito simples e a gente querer ir mais além e mesmo para outras coisas que nos surgem, às vezes, de repente, temos que ter imaginação para as perguntas" (idem). Há igualmente que saber decidir, em situação, qual a questão mais adequada a cada momento e, caso esta não origine contribuições dos alunos, ou se elas não forem suficientemente poderosas para constituírem um recurso para o trabalho de ensino, conseguir identificar alternativas:

> Se calhar muitas das coisas que dizemos não estão mal ditas e teriam que ser ditas eventualmente se eles não o dissessem. É o tal meio-termo. Nem podemos estar a lançar porquês sem nada na manga à espera que eles digam coisas e eles depois não dizem e aquilo não avança, nós temos que ir dizendo coisas, mas temos que se calhar lançar sempre um porquê e ter preparado algumas hipóteses se eles não disserem para não andarmos ali perdidos. (Rebeca, TST 40, p. 31)

Ao longo do projecto, as questões de Anita e de Rebeca tornaram-se mais abrangentes, tanto no que se refere à incidência como à abertura. Passaram a ser mais frequentes as direccionadas para tornar públicos processos de raciocínio e sua avaliação pelos alunos. Além disso, no âmbito da exploração de desacordos, são introduzidas perguntas destinadas a averiguar a perspectiva dos elementos da turma sobre as ideias em confronto e a inventariar a adesão às posições expressas, o que era praticamente ausente nas suas primeiras aulas. Há, também, uma descentralização crescente da autoria das questões que surgem no espaço de discurso da aula, ou seja, estas passam a ser mais frequentemente colocadas pelos alunos e dirigidas não apenas às professoras mas também aos colegas.

Além das questões, Anita e Rebeca usam outros recursos na orquestração de discussões. Um é o tom de voz, através do qual procuram realçar contribuições particulares para os alunos focarem aí a sua atenção e poderem pronunciar-se sobre elas, sublinhar aspectos relevantes de uma intervenção e organizar a discussão quando surgem vários objectos de debate. Nestes casos o tom serve para enfatizar ideias. Porém, Anita usou, também, o tom de voz com outros propósitos: “Digo baixinho para aguardarem (...) se eu deixo que eles falem logo, arrumam. (...) como sou meiguinha a dizer as coisas aos meus, acho que eles não se assustam (...) acho que eles não ficam tristes” (E3, pp. 48-9). Como transparece nestas palavras, esta professora para controlar o aparecimento de contribuições que, pela sua natureza e relevância, podem extinguir uma discussão, recorre a um tom de voz muito baixo acompanhado de linguagem gestual ou expressões faciais meigas ou cúmplices. Esta estratégia transparece numa das aulas em que trabalhou com a tarefa *À procura* *de dízimas finitas*. Ao dar-se conta que uma aluna tinha uma contribuição que permitia aperfeiçoar a conjectura "c. pot." quando o seu objectivo era prosseguir a discussão da sua refutação por um caso particular apresentado e nela envolver mais elementos da turma, diz-lhe em voz baixa: "antes de tu dizeres isso, está bem?" (TA 20/01/03, p. 3).

A *repetição*, com *expansão,* ou não, das contribuições dos alunos, a sua *reformulação* ou *relato,* são outros recursos que Anita e Rebeca adoptam para orquestrar discussões colectivas. A análise do documento 1 (tabela 7, capítulo V) na segunda etapa da primeira fase do projecto, permitiu-lhes contactar com estas estratégias discursivas que os autores referidos no documento englobam em *redizer*. Ao referir o trabalho a desenvolver no futuro com uma nova turma no sentido de envolver os alunos em actividades de argumentação matemática, Anita sublinha a importância destas estratégias: "Recorrer também ao redizer, acho que é espectacular (risos) para trabalhar no sentido de gerir e orquestrar a aula" (E4, p. 21). No caso de Rebeca, a relevância que lhes atribui transparece, em particular, na alteração do modelo D1 para D2 — relativos à nova perspectiva sobre as interacções na aula de Matemática oriunda da participação no projecto — em que explicitamente lhes faz referência. Segundo Anita, importa, no entanto, cuidar de que, nomeadamente a repetição, uma das estratégias discursivas incluídas no redizer, não seja entendida como validação ou que a actividade da aula não seja regulada pela norma "apenas se comenta o que o professor repete":

> Pode ter vantagens ou desvantagens. Se eu também começo a repetir tudo e peço para eles comentarem quando repito, eles só comentam o que eu repito. Portanto, isto é um pau de dois bicos. Já que as coisas estavam em bom-tom em termos de som, e julgo que visíveis, quis aproveitar para deixar andar a discussão. Foi uma opção. (Anita, TST 37, p. 30)

No âmbito da orquestração de discussões, o relato das contribuições dos alunos, uma das estratégias discursivas contempladas no redizer, assumiu, por vezes, a forma de pontos de situação. Nas aulas de Rebeca eles surgem na primeira fase do projecto. A segunda fase permite reforçar a sua importância, em particular, quando ocorrem mudanças no foco do debate e também no final de uma discussão colectiva: “No final de uma investigação ou do que quer que seja com discussão tem que haver um ponto de situação em que expomos o que se passou. (...) No final ou no meio mas no final é mesmo crucial” (Rebeca, TST 38, p. 33). É na última fase do projecto que Anita refere ter ficado mais consciente do carácter essencial dos pontos de situação: “Acho que esta parte das sistematizações é fundamental e eu tomei maior consciência disso agora, mas, mesmo assim, acho que na última aula não consegui fazer um ponto da situação como deve ser” (Anita, idem, p. 34). Este acréscimo de consciência prende-se com os “momentos em que é importante fazer pontos de situação e com que objectivos importa fazê-los” (idem, E3, p. 13). Neste âmbito, Anita refere três tipos de momentos: “Os pontos de situação no meio de uma discussão, quando eles estão mesmo a discutir (...) [os] pontos de situação finais da aula (...) [e os] que concluem uma determinada discussão antes de se passar para outra” (idem, p. 12). A relevância que a professora atribuiu ao ter tomado consciência da importância dos pontos de situação e porque considera serem úteis, transparece no seguinte extracto:

> Porque lá está, se uma pessoa não estiver bastante atenta, com essa tal consciência [da importância dos pontos de situação] mesmo, é fácil nós estarmos entusiasmadas e deixarmo-nos ir. Mas não pode ser, porque sou eu que estou a gerir a aula e então não posso estar ali só tão satisfeita a ver algumas coisas a irem bem… (risos) Não pode ser. Uma pessoa tem que estar sempre a ver as duas coisas. Aí é que está. Porque é a tal coisa, uma pessoa está a ver, dá prazer... (...) Mas não pode ser bem assim. Porque há mais pessoas, nem todas as pessoas estão a falar na mesma coisa, tem de se estar a ver e lá estão os pontos de situação para tentar gerir. (Anita, E3, p. 13)

No final do projecto, uma das fortes críticas que Anita tece à aula em que trabalhou com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* prende-se, precisamente, com a quase ausência de pontos de situação e a não identificação do melhor momento para fazer o único que apresentou na aula:

> Devia também ter feito um ponto de situação, a que eu acabo por recorrer lá mais para a frente, mas que deveria ter feito mais cedo, em particular antes de lançar o exemplo dos três números para a discussão. (...) Mas foi pena. Aquele ponto de situação antes de passar para o caso dos três números fez mesmo falta. Escapou. (...) Escrevi aqui: devia ter havido muitos pontos de situação e aquele de que estava a falar há bocado devia ter sido o primeiro e devia ter sido mais forte. (Anita, E4, pp. 17-8)

A partilha da liderança da aula durante as discussões colectivas através da disponibilização do lugar do quadro aos alunos, começa a surgir nas aulas de Rebeca na segunda fase do projecto. A reflexão sobre a aula em que trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas* trouxe à tona potencialidades desta partilha. No final do trabalho conjunto, aborda, por iniciativa própria, esta alteração que introduziu nas suas aulas, reafirmando estas potencialidades e sublinhando o maior dinamismo que originou:

> Investi mais em serem eles a ir ao quadro explicar as coisas deles. É a tal coisa... Eu acho que estava um bocado agarrada àquele lugar do quadro... Este lugar aqui é meu! (risos) É verdade! Claro que eles iam ao quadro, mas iam fazer coisas que já tinham feito, exercícios e isso, não é? Mas no meio das explicações eu é que geria aquilo tudo, lá no quadro. Era com as intervenções deles mas eu é que escrevia (risos). E passei a dar-lhes mais margem de liberdade para serem eles a ir lá fazer tudo sozinhos. Passei a largar aquele lugar noutras situações diferentes daquelas em que o largava antes. Porque era mais organizadinho (risos)... Isto é um bocado aquele risco… Por acaso estou a pensar que os professores têm medo de arriscar... (...) Depois passou a ser no meio da conversa que eles se levantavam, iam lá explicar a opinião deles e depois continuavam. A estrutura é, se calhar, uma estrutura mais dinâmica, menos organizada, mas mais rica... Ou uma organização diferente. Não quer dizer que seja desorganizada, mas é uma organização menos formal, talvez. (...) Passei a partilhar mais o meu lugar no quadro com eles no meio das discussões. (Rebeca, E4, pp. 48-9)

Ao orquestrarem discussões colectivas, Anita e Rebeca procuraram escutar muito atentamente as contribuições dos alunos de modo a delas tirarem o melhor partido. No entanto, não foi apenas a relevância matemática destas contribuições que influenciou as suas decisões quanto àquelas que importa destacar: “Eu finjo muitas vezes que não ouço o que a Tânia diz (...) porque se eu desse muita visibilidade ao que ela diz, os outros não dizem mais nada e está certo o que ela diz... (risos)”. (Rebeca, TST 22, p. 5); “Outra opção: Finjo que não ouço a Júlia e a Maria nalgumas ocasiões em que elas dizem logo o que eu quero ouvir, que é para tentar que os outros digam” (Anita, TST 23, p. 8). As alunas referidas pelas professoras nestes extractos, têm vozes poderosas nas turmas. O seu estatuto de boas alunas, reconhecido pelos colegas, introduz nas contribuições da sua autoria uma autoridade que não contestam facilmente: “Não ouviste na outra aula o Diogo? *se a Tânia diz, está bem...* Percebes? Eles dão muito crédito [e] não é só ao que eu digo. Dão muito crédito também ao que ela diz...” (Rebeca, TST 22, p. 5). Além disso, não raramente, as ideias que apresentam, se evidenciadas, extinguiriam, pelo seu conteúdo, a necessidade de prosseguir o debate. Assim, Anita e Rebeca, para controlar o andamento da discussão, simulam não escutar contribuições que, do ponto de vista matemático, são pertinentes e correctas. Nestas situações, sobre a eficácia matemática da discussão domina o incrementar o nível de participação dos alunos: “É um dilema. Isso é para fazer com que haja mais alunos a participar e a dar o seu contributo. Se não são sempre os mesmos que falam...” (Rebeca, TST 23, p. 8).

Estar “bem consciente” (Anita, E2, p. 13) de que nem sempre vale a pena rentabilizar contribuições que se querem ouvir para fazer progredir a actividade matemática da aula, é um dos aspectos sublinhados para Anita para “tentar que [os alunos] discutam entre eles” (idem) e favorecer o envolvimento em actividades de argumentação matemática de elementos da turma “que estão mais calados mas que até têm justificações importantes para dar” (idem). Se esta consciência não existir, nas suas palavras, “sem querer às vezes podemos ser levados na avalanche (...) alguém responder rapidamente e ires andando (...) pode levar-te, não àquela maneira de, no fundo, os pores à guerra, entre aspas, mas a ires um bocado empurrada pela onda” (idem).

Orquestrar uma discussão colectiva prende-se com encontrar patamares em que as conversações ocorram sem as vozes de alguns alunos se sobreporem de tal modo que silenciam as vozes de outros. Encontrar equilíbrios entre as diferentes vozes nem sempre é simples. As dificuldades acrescem se alguns destes alunos, como transparece na análise das aulas em que Rebeca trabalhou com a tarefa *À procura de dízimas finitas*, tenderem a monopolizar as discussões pelo alto nível de intervenção, pela grande veemência na defesa das suas ideias e por um certo individualismo. Encontrar estes equilíbrios passa por identificar meios de controlar as vozes poderosas na turma sem que eles sejam entendidos como “a gente quer que eles estejam calados só por estarem (...) dá-nos jeito e dizemos-lhe hoje não falam!”, (Anita E3, p. 50). O tom de voz baixo de Anita, os seus gestos, a escuta selectiva de ambas as professoras, o solicitar a participação de alunos particulares e as mensagens dirigidas por Rebeca em que, claramente, explicita que a palavra deve ser assumida por um aluno que não aquele que pretende apresentar uma contribuição, são alguns destes meios. O equilíbrio passa, também, por tentar que aqueles "que estão num *step* muito elevado, desçam, explicitem donde vêm as coisas, mandá-los ir para trás, para trás..." (idem, E4, p. 24). Passa, ainda, por "investir" (idem) em que os alunos "que estão nuns degraus mais abaixo, expressem em que patamar estão para vermos até aonde é que se tem que descer" (idem). Se não o fizerem, como diz Anita, "é a parte do grande desafio" (idem).

Não é simples orquestrar discussões colectivas. Há que, por exemplo, "tentarmos passar a bola para eles e tentarmos orientar de fora" (Anita, TST 20, p. 24), que saber identificar "quando é que nós metemos a colherzinha" (idem), que "estar a ver outros que possam, eventualmente, estar a querer desviar a atenção e a não ligar, tem que se estar a pôr um a falar e outro a contrapor" (Rebeca, E4, p. 44). Em qualquer das entrevistas posteriores à primeira, Rebeca sublinha as dificuldades experienciadas, em particular, quando estão em jogo interacções entre alunos: "É difícil gerir as interacções com o grupo turma e principalmente quando a interacção é entre alunos e não só entre alunos e professor" (E2, p. 4); "gerir a discussão colectiva, acho que é *sempre* [ênfase] o mais difícil (...) principalmente quando ela está a ocorrer entre os alunos. (...) continua a ser muito difícil (E3, p. 12); "aquilo em que eu tenho mais dificuldade, em termos de uma aula, é gerir a comunicação entre eles… E mesmo entre mim e eles (...) quando são muitos a querer participar" (E4, p. 44). Anita, por seu lado, indica que "uma das situações complicadas de gerir" (E3, p. 50) é uma discussão em que surgem argumentos sofisticados, do ponto de vista matemático, que, por vezes, são recursos importantes para o trabalho de ensino mas não imediatamente inteligíveis por muitos alunos, minimizando os riscos da visibilidade dada a estes argumentos ser interpretada como "o professor gostar mais de estar a ouvir aquilo ou aquele. Para eles é capaz de ser mais aquele" (idem, p. 51). E embora a cative moderar, em geral, discussões — "gosto mais mesmo assim é de ser eu moderadora" (idem, p. 90) — salienta que "o que é mais difícil se calhar é ser moderadora, principalmente não esquecendo os outros que estão à volta, de ir envolvendo mais alunos” (idem).

Lidar com a dificuldade das interacções, para Rebeca, “vai com treino e com algum cuidado de estar sempre atento... É um processo de construção interior” (E2, p. 6). Para este processo contribui o “termos consciência” (idem) da importância das interacções e, também, o “estarmos sempre atentos na situação e reflectirmos sobre isso: Será que fiz bem, que não fiz? Devo ter mais cuidado na próxima? É nesse sentido” (idem). A professora pronuncia estas palavras na segunda entrevista. Com a prossecução do trabalho conjunto, reforça-se a consciência das dificuldades da gestão das interacções entre alunos no âmbito de discussões colectivas e a necessidade da reflexão permanente e do investimento quotidiano nessas interacções: “Temos que estar todas as aulas a pensar nisso (...) basta descurar um bocadinho para as coisas regredirem um bocado. Não é uma coisa que se adquira e não seja preciso preocuparmo-nos mais... (...) Tem que ser uma coisa permanente” (E3, p. 12); “não é uma coisa apreendida, é uma coisa que a gente tem que estar a trabalhar todos os dias. (...) tem que se estar com mil olhos, tem que se estar a ver tudo ao mesmo tempo” (idem, E4, p. 44). Através das palavras de Rebeca, transparece, assim, que aprender a orquestrar discussões colectivas não é um conhecimento que uma vez aprendido fica aprendido de uma vez por todas e que pode ser usado sem uma atenção permanente, cuidada e abrangente a tudo o que se passa na aula.

Encerrando o capítulo. Foram constrangimentos resultantes do próprio processo de escrita que me conduziram a apresentar sequencialmente a primeira, segunda e terceira secções deste capítulo. Com efeito, os aspectos aí abordados interpenetraram-se, profundamente, à medida que Anita ou Rebeca foram procurando dar corpo à ideia de envolver os seus alunos em actividades de argumentação matemática. Rebeca, em particular, ao começar a perspectivar esta actividade como um processo mais holístico e dinâmico do que aquilo que pensava ser quando iniciámos o projecto — aspecto focado na primeira secção — começa, também, a introduzir nas suas práticas lectivas mudanças oriundas deste novo olhar e que, simultaneamente, foram contribuindo para a transformação de perspectivas que refere. O essencial destas mudanças foi objecto de análise nas duas secções subsequentes à primeira. Também com Anita a aprendizagem de novas estratégias de negociação de normas de acção e interacção favoráveis à partilha de ideias entre os alunos que sonhava para as suas aulas, é favorecida pelas experiências que vai fazendo. Entre *o desejar* e *o conseguir* — aspecto abordado na primeira secção — há todo um processo e um percurso com *nuances* que apenas vêm à tona quando se consideram particularidades destas experiências e das actividades de análise e reflexão individuais e colectivas que desencadearam, aspectos abordados na segunda e terceira secções. Este entrelaçamento entre a preparação do trabalho, a criação de condições para os alunos se envolverem na formulação, avaliação e prova de conjecturas, e o cuidar do discurso da aula, entre a reflexão e a acção, transparece claramente, quando se observam as mudanças que Rebeca foi introduzindo na preparação de aulas com tarefas abertas, fruto da experiência de trabalho na aula com essas mesmas tarefas e do investimento na interacção entre os alunos. Refiro-as em seguida.

Perto do início do projecto, Rebeca não considerava relevante dedicar tempo a identificar questões ou sugestões a apresentar aos alunos no decurso da actividade imaginada para a aula. Considerava que a sua acção poderia ser mais adequada se se deixasse guiar pela intuição e via uma forte preparação da aula como algo que a podia constranger: “Eu não gosto de pensar muito nessas coisas [questões a colocar], sabes? (...) Às vezes funciono melhor em termos de impulsividade... (...) Com a minha intuição... (risos)” (TST 12, p. 20, 26/02/02). À medida que vai trabalhando, em particular, com tarefas de investigação intencionalmente pensadas para os alunos se envolverem na formulação, avaliação e prova de conjecturas e para analisarem e discutirem colectivamente descobertas e raciocínios, esta perspectiva sobre a preparação das aulas vai-se alterando. Começa a investir nas interacções entre os alunos, o trabalho de ensino torna-se mais dependente das contribuições que surgem, algumas surpreendem-na, por vezes, trazem-lhe inseguranças e para fazer face a toda esta imprevisibilidade, ficar mais liberta para tirar partido do que escuta e orquestrar o discurso da aula, começa a reflectir sobre "várias alternativas, para depois gerir conforme a situação" (TST 27, p. 9): "Pensei, também, como é que podia discutir com eles as coisas que poderiam surgir, preparei questões, pistas... quando fazer sínteses..." (idem, p. 8).

Imaginar possibilidades de exploração das tarefas, identificar questões ou sugestões que poderão, se necessário, ajudar os alunos a avançar na actividade visada mas deixando a seu cargo o essencial do raciocínio matemático, são ideias que sobressaem, também, na sua reflexão sobre as aulas em que explorou a tarefa *À procura de dízimas finitas*. Passa, assim, a investir tempo na reflexão sobre aspectos da preparação das aulas que, anteriormente ao projecto, remetia para plano secundário, saindo reforçada a importância da reflexão para o trabalho de ensino: "A prática de reflexão individual e posteriormente em grupo, com a possibilidade de revisitar o trabalho desenvolvido na aula, fez-me tomar uma maior consciência da importância da reflexão para o desenvolvimento do trabalho do professor" (DER, 19/03/03, p. 1). A necessidade de recorrer à intuição não desaparece. Torna-se fundamental para, em acção, Rebeca equilibrar flexibilidade e controlo, para identificar, com sentido de oportunidade, o momento certo para fazer intervenções que permitam aos alunos progredir na aprendizagem minimizando os riscos de boicotar a sua autonomia pessoal e matemática. Assim, a intuição parece ter deixado de ser incompatível com pensamento cuidado sobre o que se pode vir a fazer, embora não se faça necessariamente.

Capítulo IX

-

Conclusão

Iniciei o presente estudo com a convicção de que ensinar é um trabalho complexo e multifacetado, e que qualquer tentativa de o apresentar através de descrições simples rapidamente se revela irreal. Iniciei-o, também, acreditando que a maioria dos professores o realizam numa posição de profissionalismo e honestidade procurando, na sala de aula, fazer pelos seus alunos aquilo que crêem ser melhor. Qualquer modo de agir que pareça estranho ou não inteligível a um observador é, a meu ver, sinal que deve ser analisado e compreendido a partir das perspectivas de quem agiu e não julgado como inadequado ou traduzindo que não cuidou da preparação do ensino ou da criação de condições na aula para os alunos poderem aprender. Sem estas assunções é, a meu ver, difícil iniciar uma colaboração efectiva com professores que possa permitir compreender o que fazem ao ensinar, porque o fazem e como se sentem no seu fazer. Iniciei-o, ainda, pressupondo que a materialização de actuais recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática — entre as quais estão a valorização da aprendizagem com compreensão, do raciocínio matemático e das actividades de argumentação — em práticas concretas desenvolvidas em contextos reais de trabalho, introduz complexidades acrescidas nestas práticas que colocam o professor de Matemática perante desafios que não existiriam se o seu ensino fosse orientado, simplesmente, para a memorização de conceitos ou regras e treino de procedimentos. Por último, iniciei o estudo supondo que a criação de um contexto de trabalho em colaboração, que proporcionasse a oportunidade aos professores de escolherem vias a explorar com os seus alunos, de se envolverem em processos de reflexão retrospectiva e prospectiva sobre as suas práticas que permitissem interrogá-las e problematizá-las num ambiente de diálogo aberto, autêntico e apoiante, poderia permitir-lhes usufruir de oportunidades de aprendizagem e enriquecimento, possibilitar-me compreender o seu trabalho e contribuir para a produção de conhecimento relevante sobre o ensino. Foi na conjunção de todos estes aspectos que se fundou a opção metodológica de fundo subjacente a este estudo: o desenvolvimento de um projecto de investigação colaborativa com professores centrado na argumentação na aula de Matemática em que a reflexão sobre as suas práticas tivesse um lugar de destaque.

É tendo por referência este projecto, que foi desenvolvido ao longo de dois anos lectivos, e como orientação a procura de respostas para as questões formuladas no âmbito da investigação, que neste capítulo dedicado às conclusões do estudo, procuro, em primeiro lugar, evidenciar aspectos que se afiguram como relevantes ou problemáticos no ensino orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Apoio-me no trabalho desenvolvido por Anita e Rebeca, professoras que integraram a equipa do projecto. Em segundo lugar, centro-me no desenvolvimento do projecto, procurando evidenciar potencialidades e problemas percepcionados pelos elementos do *grupo de pesquisa* (Reason, 1988c, 1994), expressão usada para designar a equipa do projecto.

Ensinar a argumentar em Matemática

Estruturo esta secção em quatro partes principais. A primeira, é dedicada à preparação de aulas orientadas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Na segunda e terceira, foco-me na argumentação matemática em acção, ou seja, começo por abordar vertentes do trabalho desenvolvido pelas professoras para facilitar nas aulas a formulação, avaliação e prova de conjecturas e, em seguida, centro-me em aspectos que mais directamente se prendem com a criação de condições para surgir e se desenvolver um discurso argumentativo cujos padrões de avaliação são os do campo da Matemática adaptados à maturidade matemática dos alunos. Por último, refiro os principais desafios com que as professoras se confrontaram, a sua origem e principal incidência, bem como os que se destacam pela sua persistência.

Preparar o ensino, pensando na improvisação

Preparar uma aula ou um conjunto de aulas envolve delinear uma hipótese plausível de trabalho para a actividade a desenvolver que, tal como todas as hipóteses, está sujeita a revisões fruto do diálogo permanente que o professor vai mantendo entre aquilo em que pensou e os acontecimentos que vão surgindo no decurso da acção. Muitos destes acontecimentos são, naturalmente, imprevisíveis, pois ensinar envolve relações entre pessoas e a imprevisibilidade faz parte da natureza humana. Preparar uma aula envolve, também, estar predisposto para tentar fazer face a esta imprevisibilidade, o melhor possível. No caso de uma aula de Matemática, prepará-la requer imaginar como conectar alunos particulares com ideias ou processos matemáticos particulares. Qualquer professor faz este trabalho. Pode é fazê-lo de modos diferentes, articulando-o mais, ou menos, com as especificidades dos alunos que ensina, valorizando umas ou outras facetas da Matemática e escolhendo esta ou aquela forma de trabalhar.

Ao iniciarmos o projecto de investigação colaborativa, as professoras tinham por elemento orientador do seu ensino a análise do texto curricular e não, por exemplo, um manual escolar. Dedicavam atenção a finalidades, objectivos, competências, orientações metodológicas e conteúdos matemáticos. Valorizaram sempre a necessidade dos alunos se envolverem em actividades de argumentação matemática e de lhes propor tarefas abertas potencialmente favoráveis à sua emergência. Estas actividades e tarefas eram, a seu ver, perfeitamente legítimas do ponto de vista curricular. Procuravam materiais de apoio às aulas, recorrendo a fontes diversas, seleccionavam-nos, adaptavam-nos ou criavam-nos, equacionavam modalidades de trabalho que permitissem interacções e favorecessem a participação activa dos alunos, cuidavam das relações, pensavam em aspectos relativos à gestão das aulas, não penalizavam o erro considerando-o inerente aos processos de aprendizagem, e esforçavam-se por criar um ambiente em que todos se sentissem à-vontade para exprimir o que pensavam.

O projecto de investigação colaborativa não fez, naturalmente, desaparecer nenhum destes cuidados. Objectivos, conteúdos matemáticos, tarefas e/ou outros materiais de apoio ao ensino, metodologias de trabalho e aspectos mais particulares relativos à organização e gestão da aula, foram vertentes do trabalho de preparação das aulas a que as professoras continuaram a dedicar atenção. No entanto, a orientação do ensino para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, trouxe uma *intensificação* e *complexificação* deste trabalho. Destaco, em primeiro lugar, as vias através das quais surgiu esta alteração, que não é independente do aprofundamento do conhecimento das professoras sobre como fazer surgir e apoiar a argumentação nas suas aulas, bem como da transformação de perspectivas em relação a estes aspectos. Em segundo lugar, refiro o conteúdo desta transformação relativamente a cada professora e sublinho a importância de uma preparação das aulas muito cuidada, mas flexível, apoiada na reflexão sobre vivências passadas e acções imaginadas para o futuro.

1. *Investir em processos matemáticos via ampliação de objectivos e abertura de tarefas.* O desenvolvimento do projecto permite evidenciar que a preparação do trabalho de ensino se intensificou e complexificou através de duas vias que se influenciaram reciprocamente: (a) o reforço ou ampliação dos objectivos orientadores da acção; e (b) a maior frequência com que as professoras passaram a explorar tarefas abertas e, sobretudo, tarefas de investigação. Foi através do investimento no que designei por *eixo dos processos* que surgiram alterações via objectivos. Este investimento prende-se com a atenção mais sistemática e persistente dedicada à preparação de condições favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de formulação, avaliação e prova de conjecturas. Prende-se,

simultaneamente, com um maior grau de consciência quanto à importância da compreensão, pelos alunos, dos significados de conjectura, contra-exemplo e prova, bem como do valor da própria actividade de formulação de conjecturas, independentemente destas virem, ou não, a ser refutadas. Este maior grau de consciência surge, além disso, associado ao reconhecimento de potencialidades que podem advir da exploração de situações de desacordo e, também, do incentivo de interacções entre os alunos. O acréscimo de consciência originou a assunção de papéis pouco desempenhados ou desempenhados de modo não intencional.

A intensificação e complexificação da preparação do ensino via tarefas, decorre da assunção do conjunto destes objectivos que, por seu turno, vão sofrendo influências e influenciando a prática de ensinar Matemática a partir de tarefas abertas, bem como a reflexão sobre a prática. Surge um maior investimento de tempo e cuidado (a) na análise, selecção ou criação de enunciados, (b) na procura de modos de compatibilizar as tarefas com conteúdos matemáticos a ensinar, (b) na exploração, em profundidade, das tarefas do ponto de vista matemático, (c) na inventariação de questões, sugestões ou materiais para apoiar a actividade dos alunos durante a exploração da tarefa ou para organizar e desencadear discussões na turma, (d) na reflexão sobre o melhor modo de equacionar a articulação entre as fases de trabalho de pares/grupos de alunos e as de trabalho colectivo e (e) na análise de formas de rentabilizar o tempo lectivo, um problema com que ambas as professoras se confrontam ao longo de todo o projecto. As professoras consideram que dedicar atenção a todos estes aspectos pode facilitar a emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática. Paralelamente, contribui para as ajudar a fazer face à imprevisibilidade das aulas em que são exploradas, em particular, tarefas de investigação, que exigem do professor “uma grande flexibilidade para lidar com as situações novas que, com grande probabilidade, irão surgir” (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003, p. 53).

Com o desenvolvimento do projecto, vai ganhando força a ideia de que problemas e tarefas de investigação facilitam a emergência de situações favoráveis à argumentação matemática, mas não a garantem. Tão importante como a tarefa, são os meios que o professor usa para fazer surgir contribuições dos alunos. É, também, o modo como lida com estas contribuições e a capacidade de improvisar intervenções que, enraizando-se no que ouve, incentivem a expressão de ideias e ajudem os alunos a avançar na compreensão da Matemática. É, ainda, importante a gestão do poder avaliativo e do controle do discurso da aula que, se não forem partilhados com os alunos, dificilmente estes se envolverão em actividades de argumentação. Em contrapartida, como diz uma das professoras, actividades de carácter argumentativo podem surgir mesmo no âmbito da resolução de exercícios, se o professor estiver atento aos acontecimentos da aula e os rentabilizar incentivando a apresentação de explicações e justificações e delegando nos alunos a responsabilidade de avaliarem ideias que surgem e de se posicionarem relativamente a elas.

2. *Reflectir sobre o passado para imaginar o futuro: A importância de uma preparação cuidada e flexível das aulas.* Com o desenvolvimento do projecto, as professoras foram pensando cada aula tendo em conta as memórias da acção passada e análises prospectivas da acção futura. Rebeca começa a atribuir um novo significado a argumentação matemática. Começa a pensá-la como um processo mais dinâmico, passível de surgir a partir de iniciativas de qualquer um dos elementos da turma e no âmbito de qualquer conteúdo ou tarefa matemática. Deixa de se ver como interlocutora privilegiada da comunicação da aula e começa a valorizar muito mais a interacção entre os alunos. Paralelamente, amplia-se o conjunto de situações que considera geradoras de um discurso argumentativo e começa a ver a argumentação como um processo, essencialmente, entre os alunos. Anita, por seu turno, vai-se dando conta de que não basta explicitar persistentemente o valor que atribui à partilha de ideias para que os alunos o façam e assumam um papel activo na análise e avaliação crítica das contribuições apresentadas. Toma consciência do poder das mensagens que implicitamente se veiculam através do modo de agir na aula e amplia-se o seu conhecimento sobre possíveis estratégias para fazer surgir e apoiar interacções entre alunos. Para esta transformação de perspectivas contribuiu, de forma significativa, a frequente reflexão colectiva sobre as práticas

proporcionada pelo trabalho no grupo de pesquisa. As professoras, sobretudo Anita, preocuparam-se, por exemplo, com a disposição dos alunos para comunicar e/ou colaborar, com a forma de comunicar e influências de determinados movimentos no modo de comunicar; procuraram antecipar onde é que os alunos poderiam ficar bloqueados, o que poderiam e/ou deveriam fazer autonomamente ou onde precisariam de apoio para progredir; reflectiram sobre como orquestrar as discussões de modo a equilibrar o trabalho matemático com a gestão social das relações e procuraram ter presente que ensinar a argumentar em Matemática não é independente de ensinar a estar na aula de modo a que o discurso matemático seja possível.

Neste processo, os seus esboços do trabalho da aula foram ficando mais detalhados sem, no entanto, perderem flexibilidade. Uso, intencionalmente, a palavra "esboço" para sublinhar que Anita e Rebeca deram uma forma primeira às suas aulas, imaginando movimentos particulares que poderiam vir a fazer, e quando os fariam, tendo em conta as tarefas e os objectivos. Tinham, contudo, consciência de que o futuro imaginado poderia não vir a concretizar-se, que os contornos incluídos nos esboços poderiam vir a ser parcial ou totalmente apagados, consoante a actividade desenvolvida, e que poderiam surgir surpresas, nalguns casos perturbadoras, para as quais tinham que estar interiormente preparadas.

Os acontecimentos de uma aula podem ser conjecturados, mas não antecipados, e as oportunidades para fazer surgir episódios de argumentação matemática geram-se no interior das interacções. Assim, é apenas em acção que o professor consegue imaginar a melhor forma de facilitar a emergência destes episódios e o que fazer para apoiar o seu desenvolvimento. O projecto de investigação colaborativa permite evidenciar, no entanto, que um bom conhecimento do currículo e de conexões entre os temas matemáticos nele incluídos, um investimento em objectivos associados ao que designei por *eixo dos processos,* uma cuidadosa selecção de tarefas sem esquecer que por si só não bastam, a consciência de que pode haver vantagens em não incluir no texto a entregar aos alunos todas as questões que se pretendem discutir a propósito de uma determinada tarefa e uma preparação cuidada e meticulosa das aulas, podem dotar o professor de recursos que, em situação, lhe permitam improvisar o melhor modo de agir para favorecer e apoiar o envolvimento dos alunos em argumentação matemática.

Contextos para a argumentação em Matemática: Trabalhando para e através da construção de teias de relações

Ao longo do projecto de investigação colaborativa, as professoras procuraram criar nas suas aulas situações em que os alunos se envolvessem (a) na formulação, avaliação e prova de conjecturas por si formuladas, (b) na resolução de desacordos e (c) numa discussão de ideias matemáticas que contribuísse para aprofundarem o seu conhecimento e para aprenderem que a validade do discurso matemático se funda, não em critérios de autoridade, mas em argumentos internos ao campo da Matemática. Neste processo procuraram incentivar os alunos a apresentarem e produzirem estes argumentos e a interagirem com os seus pares em situações que envolviam riscos intelectuais fruto, em particular, do carácter provisório das conjecturas e da exposição pública de pensamentos privados. Foram, assim, preocupações concomitantes para as professoras e, por esta via, campos de investimento simultâneo, favorecer a aprendizagem do raciocínio e do discurso matemáticos, trabalhar com os alunos no sentido da aula ser uma *comunidade que cuida* (Forman, 2003, citando Hatano e Inagaki) e com a turma para esta se constituir e manter como um auditório interveniente, informado e crítico.

Apresento, em seguida, os aspectos que ao longo do projecto se evidenciaram como influenciando ou podendo facilitar a emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática e sublinho os que se destacaram. Organizo esta apresentação em torno de três pontos: o trabalho realizado pelas professoras no âmbito da (a) formulação, avaliação e prova de conjecturas, (b) exploração de situações de desacordo e (c) orquestração de discussões colectivas.

Entrelaçar a formulação, avaliação e prova de conjecturas

Os alunos de qualquer uma das professoras tinham alguma experiência de trabalho com conjecturas anteriormente ao projecto. No entanto, nas primeiras aulas que foram objecto de reflexão colectiva, o seu envolvimento na avaliação da plausibilidade de conjecturas era fraco, a desvalorização das conjecturas refutadas era forte e a sua sensibilidade para a importância de registarem todas as conjecturas formuladas era pouca, sobretudo na turma de Rebeca. Paralelamente, a concepção dos alunos sobre a prova da validade de uma determinada conjectura residia na sua verificação por exemplos. Não sentiam necessidade de encontrar processos que lhes permitissem lidar com a generalidade dos objectos referidos no seu enunciado, não compreendendo a importância da prova. Esta situação é comum a muitos alunos de diversos níveis de ensino, como revelam vários trabalhos portugueses focados na problemática da introdução de tarefas de investigação na aula de Matemática (Brocardo, 2001; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998). A ideia *evidência é prova*, representativa da concepção de que as conclusões se podem obter a partir de acções realizadas sobre um número limitado de casos, é, aliás, referida por Chazan (1993) como representando um importante conjunto de crenças dos alunos sobre a argumentação em Matemática.

As professoras lidaram com esta situação adoptando diversas estratégias que contribuíram, a seu ver, para no final do projecto haver uma significativa evolução dos alunos. Neste âmbito, sobressai: (a) a importância da negociação dos significados de conjectura, contra-exemplo e prova, da valorização da actividade de formulação de conjecturas e da partilha e avaliação colectiva de conjecturas; (b) alguns meios de fazer face às complexidades associadas à compreensão da necessidade e importância da prova pelos alunos; e (c) a importância da produção de provas surgir enquadrada por problemas e por actividades de argumentação. Debruço-me, em seguida, sobre cada um destes aspectos.

1. *Negociar significados, valorizar conjecturas e investir na sua partilha e avaliação colectiva.* A instituição dos significados de conjectura, contra-exemplo e

prova, como objecto de reflexão colectiva, acompanhada pela valorização da actividade de formulação de conjecturas, foi uma das estratégias a que as professoras recorreram para incentivar e apoiar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Rentabilizaram acontecimentos de sala de aula para salientar o carácter provisório das conjecturas e dialogaram com os alunos sobre a natureza da actividade matemática, procurando evidenciar que as conjecturas são uma componente intrínseca do trabalho dos matemáticos que faz avançar o conhecimento. Insistiram, com persistência, na importância de registarem todas as conjecturas formuladas durante as fases de trabalho de pares/grupos e solicitaram a apresentação de conjecturas refutadas durante estas fases, bem como dos raciocínios que permitiram considerá-las falsas. Além disso, promoveram diversas discussões focadas na análise de exemplos oferecidos como contra-exemplos para um dada conjectura, visando decidir se, de facto, o eram, e criaram situações destinadas a ajudar os alunos a compreender que conjecturas provadas podem ser usadas como *dados* (Toulmin, 1993) de uma argumentação, mas que a ausência de prova impede que o sejam. Rebeca, decidiu, ainda, propor a elaboração de relatórios detalhados sobre a exploração das tarefas que, a seu ver, foram úteis tanto para os alunos valorizarem os registos, como para lhe permitirem avaliar as aprendizagens proporcionadas por esta exploração. Todos estes aspectos são considerados facilitadores do envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática.

Outra das estratégias a que as professoras recorreram foi a análise colectiva de enunciados de conjecturas formuladas pelos alunos durante as fases de trabalho de pares/grupos ou de regularidades descobertas nestas fases. Esta análise, que tinha por suporte registos escritos visíveis pela turma, foi orientada por vários propósitos: construir enunciados de conjecturas, relacionar conjecturas de modo a identificar semelhanças ou diferenças, tornar enunciados mais inteligíveis e/ou matematicamente precisos e correctos, avaliar a plausibilidade de conjecturas e identificar as que resistiam a tentativas de refutação. No seu conjunto, estas estratégias parecem ter sido favoráveis para ajudar os alunos a aprenderem a formular conjecturas, a construírem enunciados menos ambíguos, a aperceberem-se da importância de explicitarem informação relevante para apoiar a plausibilidade de uma conclusão e a entenderem o processo de prova da falsidade de uma conjectura.

A fase de trabalho colectivo destinada à partilha/compreensão de conjecturas formuladas pelos alunos e à identificação das que parecem ser verdadeiras, nem sempre foi estruturada do mesmo modo pelas professoras. Nuns casos, iniciou-se com partilha/compreensão de conjecturas a que se seguiu a avaliação da sua validade; noutros casos, estes dois tipos de actividades interpenetraram-se. A análise do trabalho de Anita e de Rebeca permite evidenciar que podem surgir episódios de argumentação matemática em qualquer um dos modos de articulação e que, frequentemente, a compreensão do enunciado de uma conjectura anda a par e passo com a avaliação da plausibilidade. Nalguns dos episódios associados à fase da partilha/compreensão de conjecturas, a argumentação é, sobretudo, *construtiva da conjectura* (Pedemonte, 2002). São exemplos, a conjectura "c. pot." ou "c. pot. f. i." que surgiram nas aulas leccionadas com a tarefa das dízimas, analisadas nos capítulos VI e VII. Noutros episódios, a argumentação é, principalmente, *estruturante* (idem) da conjectura. É exemplificativa a conjectura de Júlia na aula de Anita com esta tarefa. Noutros episódios, ainda, uma destas funções da argumentação não teve supremacia sobre a outra.

Nalgumas circunstâncias, pode haver problemas em separar a fase da partilha/compreensão das conjecturas da fase referente à sua avaliação colectiva. A análise da aula em que uma das professoras trabalhou com *À procura de dízimas finitas* (capítulo VII) ilustra alguns destes problemas. Em particular, revela a artificialidade, face à natureza da actividade matemática, que pode decorrer da restrição de não se permitir o aperfeiçoamento de conjecturas partilhadas na turma de modo a garantir que a avaliação incida sobre as conjecturas formuladas durante a fase em que os alunos trabalham entre si. Ilustra, também, dificuldades associadas ao encaminhar a aula para um rumo que vários alunos não desejam porque, antes de mais, o que os motiva é prosseguirem a avaliação das suas próprias conjecturas de modo a encontrarem e apresentarem melhores alternativas do ponto de vista matemático. Ilustra, ainda, que a assunção, pelo professor, do papel de representante da comunidade matemática na aula, é apenas um dos que orienta as suas opções.

No âmbito da avaliação de conjecturas orientada pelo propósito de filtrar as falsas, a análise do trabalho de Anita e de Rebeca evidencia que os episódios de argumentação mais ricos, pelo seu desenvolvimento e pelos argumentos apresentados, têm na sua base situações de desacordo entre alunos que divergem de opinião sobre se um determinado exemplo constitui um contra-exemplo para uma dada conjectura. Para estes episódios poderem surgir é necessário, antes de mais, instituir a conjectura como objecto de análise e discussão colectiva. Na perspectiva das professoras, esta análise é facilitada pela existência de um registo escrito do enunciado da conjectura, observável por toda a turma, que funciona como um referente comum à discussão. Além disso, depois dos alunos terem algum conhecimento sobre o significado de contra-exemplo, para emergirem episódios de argumentação, é importante que o primeiro movimento do professor não seja indicar se um determinado candidato a contra-exemplo permite refutar a conjectura e porque o permite. A análise da aula em que uma das professoras trabalhou com a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* (capítulo VII) revela, em particular, que o facto de se ter começado a esboçar uma conjectura falsa não originou argumentação alguma entre os alunos pois, de imediato, Anita indicou um exemplo que a refutava. O mesmo não aconteceu, entre várias outras, nas aulas em que ambas as professoras exploraram a tarefa das dízimas. No caso de haver divergência é, por último, fundamental que o professor ensine aos alunos que a turma, no seu conjunto, é responsável por a ultrapassar através de argumentos matematicamente válidos, e não assumir apenas ele próprio esta responsabilidade.

2. *Ensinar o valor e a necessidade da prova: Tarefa complexa, mas não impossível.* Ao longo do projecto, as turmas envolveram-se em frequentes experiências de prova de conjecturas formuladas pelos alunos. Aquelas que mais se destacaram, pela sua frequência, são a prova pelo contra-exemplo e a prova algébrica que, por vezes, envolveu, também, noções de Geometria. Não foi muito difícil ajudar os alunos a compreender a importância de testarem as conjecturas

formuladas de modo a avaliarem a sua plausibilidade. A situação foi bem diferente no caso das conjecturas que resistiram a tentativas de refutação. É um facto que, sem algum grau de crença na verdade de uma conjectura, a motivação para o desenvolvimento de uma argumentação dedutiva que permita mostrar, ou não, a sua validade, é difícil de conseguir, pois o esforço é frequentemente demasiado elevado (Pólya, 1990). O problema é quando este "grau de crença" se transforma numa convicção absoluta proveniente da verificação da conjectura por casos particulares, o que torna o desenvolvimento dessa argumentação numa actividade desnecessária. Ajudar os alunos a entender que a verificação de uma conjectura por alguns casos não é uma prova, a compreender a necessidade de provar as conjecturas que parecem ser verdadeiras e a encontrar sentido nesta actividade, foi um campo de forte investimento das professoras e, simultaneamente, uma fonte de dificuldades que se manteve ao longo de todo o projecto, embora o referido problema tenha, progressivamente, diminuído de intensidade.

O presente estudo permite evidenciar que não basta confrontar pontualmente os alunos com experiências reveladoras das limitações do raciocínio indutivo, para que daí decorra, necessariamente, a compreensão da importância de tentarem provar as conjecturas que não conseguem refutar. Também não parece ser suficiente dialogar com os alunos sobre a relevância da prova, promover discussões que tragam à tona as suas concepções de prova de modo a instituí-las como objecto de reflexão ou analisar colectivamente as consequências de se ter, ou não, provado uma conjectura para o seu enunciado poder ser usado em raciocínios cuja validade se pretende assegurar. Com efeito, depois de todas estas e outras experiências terem sido feitas em ambas as turmas e de vários dos seus elementos terem indicado não ter provado determinadas conjecturas porque apenas as tinham verificado em casos particulares, no final da primeira fase do projecto não foi invulgar surgirem contribuições reveladoras de que a justificação da validade de uma conjectura passava pela sua verificação por exemplos.

Na perspectiva das professoras, a compreensão do valor e necessidade da prova remete, antes de mais, para um frequente e sistemático envolvimento dos alunos em experiências de prova. Esta compreensão pode, além disso, ser facilitada se forem tomados alguns cuidados: (a) tornar, persistentemente, visível para os alunos que uma conjectura não provada tem um carácter provisório; (b) acompanhar a apresentação de ideias matemáticas que podem ser provadas, mas que por alguma razão não o são, por uma explicação que permita destacar que a prova não foi feita e porque não o foi; (c) aproveitar as situações que surgem no decurso das interacções da aula para salientar as limitações do raciocínio indutivo; e (d) pôr a ênfase no valor da prova enquanto meio de iluminar o porquê da validade ou não validade de uma conjectura, sem esquecer o seu papel como instrumento de validação que, nalguns casos, pode ser, aos olhos dos alunos, mais relevante.

3. *Enquadrar a produção de provas por problemas e actividades de argumentação.* No âmbito da produção de provas da validade de uma conjectura, a análise do trabalho de Anita e de Rebeca permite destacar cinco aspectos a que é importante o professor dedicar atenção. Um, prende-se com a relevância de ajudar os alunos a distinguirem, numa argumentação, *dados* de *conclusão* (Toulmin, 1993). Outro, deriva da possibilidade dos alunos interpretarem expressões algébricas como não representativas da generalidade dos objectos que representam, mas como casos particulares destes objectos. Um terceiro aspecto, que vai no mesmo sentido do segundo, relaciona-se com os alunos não terem em conta o aspecto genérico dos desenhos de figuras geométricas usados como apoio ao processo de prova. A literatura sobre concepções e dificuldades dos alunos na produção de provas documenta este terceiro aspecto. Com efeito, Chazan (1993) salienta que um dos conjuntos de crenças dos alunos sobre argumentação em Matemática é considerarem que *a prova dedutiva é simples evidência*. Esta crença prende-se com o facto de interpretarem a prova como referindo-se apenas a um único caso, aquele que está representado no desenho associado a essa prova. O quarto aspecto, prende-se com as potencialidades da análise de exemplos enquanto actividade passível de facilitar a produção de algumas provas. É importante, no entanto, que estes exemplos sejam criteriosamente escolhidos, que durante o processo de análise, ou após o seu final, o professor evidencie aspectos relevantes

para a prova e que tome providências para esta actividade não reforçar, nos alunos, a ideia de que os exemplos provam conjecturas. Por último, destaca-se a importância do professor proporcionar aos alunos situações em que reflictam sobre raciocínios no sentido de decidirem se constituem, ou não, provas da veracidade de uma conjectura. Na perspectiva das professoras, através desta via ampliam-se as oportunidades dos alunos compreenderem o que constitui uma prova em Matemática e de se envolverem em actividades significativas de argumentação matemática.

Termino esta secção salientando que no âmbito do trabalho desenvolvido ao longo do projecto, as professoras foram procurando envolver os alunos na formulação, avaliação e prova de conjecturas, a partir de problemas ou de tarefas de investigação, ou seja, de tarefas que apelam à descoberta de caminhos não conhecidos de antemão e, por isso mesmo, passíveis de enquadrar na categoria de problemas se se considerar este conceito no sentido abrangente que lhe atribui, por exemplo, Lampert (2001). Neste processo, surgiram e desenvolveram-se vários episódios de argumentação matemática, o que vai ao encontro das potencialidades que vários autores reconhecem nos problemas para a emergência de actividades de argumentação (Boero, 1999; Lampert, 2001; Pedemonte, 2002; Toulmin, 1993).

A estrutura argumentativa global das aulas de Anita e Rebeca assemelhou-se ao que Knipping (2004) designa por "estrutura-fonte". As actividades de formulação, avaliação e prova de conjecturas entrelaçaram-se significativamente, pois muitas das conjecturas formuladas pelos alunos foram partilhadas na turma, submetidas ao escrutínio crítico e refutadas ou validadas. Esta actividade é bem diferente de ser o professor a apresentar um resultado e a pedir aos alunos para o provarem ou para acompanharem a prova por si apresentada.

Nem sempre foi simples envolver os alunos em experiências de prova de conjecturas não refutadas ou manter o seu interesse durante a produção destas provas. No entanto, casos houve em que a situação foi diferente, sobretudo quando compreender o porquê de uma relação conjecturada lhes despertou curiosidade e foi possível manter viva esta curiosidade, seja pelo forte entrelaçamento do trabalho de pares/grupos com o trabalho colectivo, seja porque não existiu um distanciamento temporal considerável entre a altura em que os alunos constataram que as conjecturas resistiam às tentativas de refutação e o momento em que as professoras os desafiaram a produzir a prova.

Também nem sempre foi simples sensibilizar os alunos para a necessidade e importância da prova, mas, na perspectiva das professoras, parecem ter feito alguns progressos neste campo, tal como parecem tê-los feito na própria produção de provas. A presente investigação não é focada em aprendizagens dos alunos. No entanto, esta percepção parece indiciar que, contrariamente ao que defende Duval (1992-1993) e na rota do que defendem Boero (1999), Bussi (2000), Douek (1998, 2000) e Pedemonte (2002), o envolvimento dos alunos em actividades argumentativas associadas à formulação de conjecturas e à avaliação da sua plausibilidade, pode favorecer a aprendizagem da prova.

Explorar situações de desacordo com diplomacia

Dar visibilidade a situações de desacordo e explorá-las no sentido da turma chegar a consensos matematicamente fundamentados, são aspectos que professoras destacam, recorrentemente, como podendo facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, o que vai ao encontro das potencialidades que Chazan e Ball (1999) e Wood (1999) reconhecem nestas situações. Anita e Rebeca abordam a importância dos desacordos, não apenas em várias sessões de trabalho, como também nas entrevistas realizadas alguns meses após o início do projecto e consideram que é um dos aspectos que deve orientar, no futuro, o trabalho a realizar com novas turmas de modo a favorecer e incentivar o referido envolvimento. Quanto a esta vertente do trabalho das professoras organizo a apresentação em torno de dois pontos: (a) potencialidades das situações de desacordo e factores que podem facilitar a sua emergência; (b) riscos que podem surgir durante o processo de exploração de um desacordo e cuidados a ter.

1. *Situações de desacordo: Contexto significativamente favorável à argumentação matemática*. Uma das vertentes do trabalho de Anita e de Rebeca que mais se destacou como sendo significativamente favorável à emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática, foi a exploração de situações de desacordo. A análise do seu discurso permite evidenciar que a relevância atribuída a estas situações se enraíza no reconhecimento de potencialidades de tipo diverso: (a) tornar visível para os alunos que a validação do saber matemático assenta em argumentos internos ao campo da Matemática; (b) permitir a construção de significados matemáticos pela mobilização e relacionamento de diferentes conhecimentos; (c) favorecer a compreensão, pelos alunos, da importância de se colocarem na perspectiva do outro, ou seja, de se descentrarem de si próprios; e (d) contribuir para aprenderem a dar valor a ideias oriundas dos seus pares e não apenas do professor. Algumas destas potencialidades prendem-se com mais-valias que a exploração de situações de desacordo pode ter para a aprendizagem do que usualmente se designa por conteúdo de ensino. Outras estão associadas às possibilidades que potencialmente encerram para ajudar os alunos a aprenderem o que Lampert (2001) designa por "outro tipo de conteúdo" (p. 432) que torna possível um discurso na aula de Matemática com certas semelhanças ao existente na comunidade dos matemáticos.

Na perspectiva de Rebeca, tarefas que permitam fazer surgir diferentes processos de resolução, que suscitem a reflexão e a descoberta de vias de resolução, são, potencialmente, favoráveis a que surjam desacordos. Para ambas as professoras, legitimar a possibilidade de se exprimirem pontos de vista divergentes de outros apresentados, tornar visíveis as posições em confronto, instituir estas posições como objecto de reflexão e incentivar os alunos a posicionarem-se relativamente a elas, são aspectos facilitadores da emergência e desenvolvimento de discussões centralmente focadas na resolução de um desacordo.

2. A importância de precaver riscos, atentando na razão e sentimentos. Há riscos associados à exploração de desacordos evidenciados pelas professoras que são, também, referidos por outros estudos (Chazan & Ball, 1999; Lampert, 2001;

Lampert, Rittenhouse, & Crumbaugh, 1998; Wood, 1999). Alguns destes riscos, prendem-se com a atitude e/ou modo de estar dos alunos na aula de Matemática. Outros, relacionam-se com o professor. Entre os primeiros, as professoras referem o facto dos alunos não respeitarem opiniões diferentes das suas, de usarem um tom de voz ou palavras constrangedores para os colegas cujas ideias põem em causa, de persistirem em agir de uma forma matematicamente irresponsável (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2001) relutando em aceitar o poder avaliativo, de se auto-marginalizaram das discussões e de tentarem monopolizá-las pela forte intervenção e não respeito pelo direito do outro à palavra.

Quanto aos riscos associados ao trabalho do professor, sobressai, em primeiro lugar, a não consciência do fascínio experienciado face a discussões matematicamente significativas mas restritas, que impede a percepção da necessidade de cuidar, também, da aprendizagem dos outros alunos. Em segundo lugar, evidencia-se que tentativas de envolvimento nas discussões de outros alunos que não aqueles que debatem as ideias em confronto, pode originar um esmorecimento do debate. Em terceiro lugar, destaca-se que a ausência de aberturas para serem fundamentadas todas as posições divergentes, mesmo que os argumentos apresentados por alguns alunos a favor de uma posição possam convencer os colegas que apresentaram uma contrária, pode originar a perda de oportunidades significativas de aprendizagem. Por último, evidencia-se que o professor, não intencionalmente, pode interpretar uma objecção apresentada num sentido diferente do que lhe é atribuído pelo seu autor, porque a escuta filtrando-a pelo seu guião da aula. Poder-se-á colocar a hipótese de, nestes momentos, predominar uma escuta *para* algo em particular, um modo de ouvir as contribuições dos alunos que Davis (1997) considera distinto de escutar *quem* fala. Aceitar esta hipótese permite destacar que a restrição dos modos de ouvir do professor a um tipo de escuta *para* algo, é problemática, sobretudo se aquilo que motivar a escuta for, meramente, o julgar a correcção das contribuições apresentadas pelos alunos através de restritos padrões preconcebidos.

Aspectos que sobressaem como relevantes para que a exploração de situações de desacordo possa constituir uma oportunidade de aprendizagem são ter consciência destes riscos para se poder tomar cuidados que permitam precavê-los, ou pelo menos, diminuí-los, e orquestrar habilmente as discussões para, sem perder o envolvimento dos que nelas participam, as alargar a outros alunos. Além disso, e principalmente, importa, segundo as professoras, salientar sistematicamente o valor do confronto de ideias enquanto meio de aprofundamento do conhecimento, e dar visibilidade aos desacordos com "diplomacia", nas palavras de Rebeca, ou "apimentando-os docemente", nas de Anita. Estas expressões têm subjacente a ideia de que é importante ter em atenção que está em jogo não apenas a cognição, mas também os sentimentos. Caso contrário, a exploração de desacordos pode colocar os alunos em situações de vulnerabilidade penosa.

Caminhar com os alunos: A turma enquanto auditório interveniente, informado e crítico

Há aspectos centralmente focados no processo de discurso da aula de Matemática que se destacam pela sua relevância para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Organizo-os em torno de quatro pontos: (a) a importância da negociação de normas de acção e de interacção favoráveis à argumentação e atributos significativos do processo de negociação; (b) a relevância de investir na interacção entre os alunos; (c) o entrelaçamento entre modalidades de trabalho na aula enquanto via favorável à argumentação matemática e (d) as exigências da orquestração de discussões colectivas e potencialidades de redizer as contribuições dos alunos.

1. *Negociar normas de acção e de interacção: O pano de fundo para a argumentação matemática.* A negociação com os alunos de normas de acção e interacção que colocam a ênfase na partilha de ideias, na expressão pública de pontos de vista divergentes e na explicação e justificação das contribuições, ou seja, em normas sociais e sociomatemáticas no sentido de Cobb e Yackel (1998), Wood (1999), Yackel (1997), Yackel e Cobb (1996) e Yackel, Cobb e Wood (1999), foi

um dos aspectos que mais se destacou como sendo particularmente relevante para a emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática. Estes autores consideram, aliás, que este tipo de normas regula culturas de sala de aula em que a argumentação tem um lugar de destaque. Rebeca refere-se-lhes como sendo "o pano de fundo" sem o qual, por melhor e mais adequada que seja a tarefa, os alunos dificilmente se envolverão num discurso argumentativo. Negociar normas deste tipo foi um forte campo de investimento para ambas as professoras que se manteve até ao final do projecto e que exigiu esforços diários. Os resultados de outras investigações vão, também, neste sentido ao evidenciarem que não basta ensinar aos alunos, num determinado momento, como devem falar e para quem devem falar na aula de Matemática para que o aprendam (Lampert, 2001; Sherin, 2002). Evidenciam-se três atributos no processo de negociação de normas:

- *A importância da sistematicidade e persistência* que remete para a necessidade de um investimento continuado e não pontual no processo de negociação;
- *a pertinência de uma negociação contextualizada* que remete para a necessidade da negociação de normas se enraizar nos acontecimentos da aula;
- *a essencialidade da coerência* que remete para a necessidade de existir uma forte e sistemática consistência entre o que explicitamente se diz e as mensagens que implicitamente se veiculam através do modo como se age na aula.

A apropriação, pelos alunos, de normas de acção e interacção favoráveis ao seu envolvimento em actividades de argumentação matemática, parece ser significativamente facilitada pela conjunção destes três atributos no processo de negociação. Ou seja, não é eficaz dizer sistemática e persistentemente aos alunos que é importante escutarem atentamente todas as contribuições que surgem na aula se não se tirar partido das interacções que se incentivam e geram para evidenciar que esta norma é valorizada. A escuta atenta foi uma das normas que as professoras procuraram negociar com os alunos e que Wood (1999) e Lampert (2001) consideram ser muito importante para a criação de contextos favoráveis à argumentação. Também não é eficaz salientar o valor da expressão audível das ideias, se o professor transgride esta norma porque é seu hábito ir ao lugar dos alunos nas fases de discussão com a turma para escutar contribuições expressas num baixo tom de voz. Neste caso, não há coerência entre o dizer e o agir.

Há aspectos relacionados com a negociação de normas que, em certa medida, podem ser antecipados pelo professor, embora nem sempre seja fácil agir de modo a não dificultar, sem intenção, o processo de negociação. Decidir, na fase da preparação da aula, que se solicitarão explicações, justificações, comentários, ou que se irá remeter para os alunos a avaliação e a validação, ou invalidação, das ideias que surgem no espaço de discurso da aula, são exemplos destes aspectos. No entanto, a análise do trabalho de Anita e de Rebeca revela que o essencial do processo de negociação parece passar, sobretudo, por improvisações feitas no momento, com base na actividade desenvolvida pelos alunos. Estas improvisações requerem uma atenção permanente e abrangente ao que acontece e um lúcido e rápido discernimento para saber o que dizer e, em particular, para encontrar os modos mais adequados de lidar com transgressões às normas que se procuram negociar, que não se sabe se surgirão nem de que forma se irão revestir.

2. Investir na interacção entre alunos: A importância de alterar o padrão I-R-A/F. Um campo de forte investimento por ambas as professoras ao longo do projecto e que contribuiu, significativamente, para os alunos se irem envolvendo, progressivamente, em actividades de argumentação matemática, foi a alteração do padrão de interacção I-R-A/F (Forman, 2003), dominante nas suas aulas no início do projecto, de modo a ganhar uma maior expressão e relevância a comunicação entre os alunos durante as discussões colectivas. Neste processo, a par e através da negociação das normas de acção e interacção, as professoras foram procurando alterar a sua forma de questionamento de modo a que as suas perguntas se tornassem mais abrangentes. Foram, também, tentando criar condições para os alunos assumirem a palavra, para lhes ensinar como e para quem devem falar e para combaterem a sua "irresponsabilidade matemática" (Chevallard et al., 2001). Zelaram, ainda, pelo ambiente da aula, para a partilha de ideias não ser constrangedora e atentaram nos riscos que podem surgir no decurso de uma discussão.

3. *Entrelaçar as modalidades de trabalho da aula demarcando-as com clareza: Via favorável à argumentação matemática.* A generalidade das tarefas propostas aos alunos no âmbito das actividades do projecto, foram exploradas em trabalho de pares/grupos e também em trabalho colectivo. A passagem de uma modalidade de trabalho a outra nem sempre foi simples para as professoras. No entanto, consideram que ambas as modalidades são necessárias e importantes para os alunos aprenderem a argumentar em Matemática. Eliminar o trabalho de pares/grupos, nomeadamente em tarefas com as características das seleccionadas no âmbito do projecto, empobrece as discussões colectivas. Muitas das ideias apresentadas e discutidas na turma são fruto desta modalidade de trabalho. Além disso, os alunos enquanto trabalham entre si, também se envolvem em actividades de argumentação matemática. Uma das evoluções percepcionadas por Rebeca na sua turma deriva, precisamente, desta possibilidade. Em contrapartida, prescindir das discussões colectivas acarretaria a perda da riqueza que pode advir do confronto de ideias num grupo mais alargado e diminuiria, significativamente, a emergência de episódios de argumentação matemática.

Com o desenvolvimento do projecto, evidencia-se que há vantagens significativas para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática se se entrelaçar o trabalho de pares/grupos com o trabalho com toda a turma. Ou seja, em lugar da modalidade habitualmente usada para estruturar as aulas em que se propõem tarefas abertas, em que o professor propõe a tarefa, os alunos interagem entre si e, depois do tempo considerado adequado, a turma envolve-se na discussão dos frutos do trabalho de pares/grupos, a existência de *várias* fases da aula em que os alunos trabalham em pares/grupos, e outras de trabalho colectivo, parece acrescer a riqueza das discussões. O envolvimento dos alunos em actividades de argumentação, parece, além disso, ser facilitado se, em certas ocasiões, o professor suspender temporariamente a discussão durante alguns minutos para os alunos poderem reflectir sobre o que ouviram. As potencialidades que as professoras encontram nestas suspensões temporárias de curta duração, vão ao encontro das vantagens que Yackel (2001) lhes reconhece para surgir e se desenvolver a argumentação na aula.

Opte-se, ou não, por introduzir suspensões temporárias na discussão colectiva, por esta discussão surgir subsequentemente à fase destinada ao trabalho de pares/grupos, ou por entrelaçar as duas modalidades de trabalho ao longo de toda a aula, um dos aspectos que parece ser fundamental para não se desperdiçarem oportunidades dos alunos se poderem envolver em actividades de argumentação matemática, é existir uma demarcação clara e bem vincada entre as duas modalidades de trabalho.

4. Orquestrar discussões colectivas: Reflectir na acção com "mil olhos" a tudo o que acontece. Um dos recursos usados na orquestração de discussões colectivas por Anita e Rebeca foi recorrerem a vários tipos de estratégias discursivas para redizerem as contribuições dos alunos (Forman, Larreamendy-Joerns, Stein, & Brown, 1998; O' Connor & Michaels, 1993, 1996). Qualquer uma destas estratégias revelou ser útil, o que vai ao encontro das potencialidades que lhe reconhecem estes autores. Uma delas, a *reformulação*, parece ser particularmente vantajosa para se eliminarem ambiguidades ou trazer à tona informações pressupostas. É através de reformulações subtis, mas significativas, que as professoras, apoiando-se nas ideias apresentadas, introduzem conteúdo matemático substantivo na discussão. A *repetição*, outra estratégia discursiva, revelou-se útil, por um lado, para tornar audíveis para a turma contribuições que não o são. Na turma de Anita esta estratégia foi essencial, sobretudo em certas aulas e com certos alunos. Por outro lado, a repetição pelo professor, ao introduzir maior visibilidade na contribuição de um aluno, pode contribuir para que outros alunos se debrucem sobre ela. O *relato*, uma terceira estratégia discursiva, surge nas aulas de ambas as professoras com vários propósitos. Alguns são semelhantes aos subjacentes à repetição: dar visibilidade ou tornar audível uma ideia, submeter ao escrutínio dos colegas algo que foi dito por um elemento da turma. Outros que, por vezes, assumem o formato de pontos de situação, destinam-se, em especial, a sistematizar ideias apresentadas no decurso da discussão, clarificar o objecto do debate ou destacar posições em confronto e argumentos apresentados a favor ou contra uma ou outra posição. A existência de pontos de situação no decurso das discussões colectivas vai ganhando uma relevância crescente à medida que o projecto se desenvolve e o controle do discurso da aula é mais partilhado com os alunos. É apenas perto do final do trabalho que Anita toma consciência da sua importância. Destaca a necessidade de estar muito atenta ao desenrolar da discussão para identificar o momento em que é importante fazê-los e, em particular, para o professor não ser arrastado pelo prazer de ver "algumas coisas a irem bem" esquecendo-se de outras pelas quais também é responsável.

A análise dos movimentos de ensino de Anita e de Rebeca, associados à orquestração de discussões colectivas, permite evidenciar, como salienta Sfard (2003), que esta tarefa é extremamente exigente. Há que preparar questões desafiadoras do pensamento ou improvisá-las com base no discurso que se desenrola na aula; intuir o melhor momento para colocar uma ou outra questão e decidir qual a sua forma; incentivar os alunos a formularem também questões; redizer as suas contribuições usando formatos adequados aos objectivos do momento; avaliar a necessidade de fazer pontos de situação e fazê-los, de facto, se importante; criar um ambiente favorável para os alunos interagirem entre si; partilhar a liderança da aula durante as discussões de modo que os alunos possam deslocar-se ao quadro para explicarem e justificarem os seus raciocínios; direccionar as questões relativas a uma contribuição para o autor dessa contribuição; evidenciar posições divergentes, procurando que os alunos se responsabilizem por chegar a consensos matematicamente válidos; articular a relevância matemática das contribuições com o incentivo à participação de vários alunos e não apenas de alguns; e controlar o andamento da discussão de modo a que haja espaço para a expressão de outras vozes além das valorizadas na turma.

Harmonizar todos estes aspectos é um processo muito complexo. Rebeca salienta que há que "estar com mil olhos" a tudo o que acontece. Não é possível um momento de desatenção. No entanto, orquestrar discussões colectivas não é uma missão impossível, como as aulas das duas professoras permitem ilustrar: "Apesar de agora já não sentir tanta dificuldade. Tem a ver, se calhar, com a tal preocupação e com o tal treino (...) temos que estar sempre muito atentos" (Rebeca, E4, p. 44). Como estas palavras revelam, é pela prática da orquestração de discussões colectivas e pela reflexão sobre o trabalho que se realiza que as dificuldades se vão esbatendo.

Convivendo com desafios cruzados e entrecruzados

Ao longo do projecto, qualquer uma das professoras se foi confrontando com dúvidas, dificuldades, problemas ou dilemas. No seu conjunto são questões de carácter problemático que as inquietaram e/ou surpreenderam e às quais sentiram necessidade de fazer face. Na análise microscópica das oito aulas incluídas nos capítulos VI e VII designei o conjunto destas situações por problemas, entendendo este conceito no sentido que lhe é atribuído por Santos (2000) ao conceber a prática lectiva como uma actividade de resolução de problemas. Sendo situações a que procuraram fazer face, constituíram desafios com que lidaram ao longo das tentativas que foram fazendo para favorecer a emergência e desenvolvimento de argumentação matemática.

Cabe agora olhar transversalmente para estes problemas de modo a evidenciar os principais desafios, a sua incidência e origem. Para tal, começo por apresentar uma listagem global, ilustrativa daqueles com que Anita e Rebeca lidaram:

- Encontrar um equilíbrio entre apoiar a participação de elementos particulares e, ao mesmo tempo, envolver a turma como um todo;
- Promover o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de argumentos que, para os alunos, justificam as suas ideias e,

simultaneamente, conseguir que as trocas discursivas tenham valor matemático;

- Agir de modo a mostrar aos alunos que é importante expressarem-se em voz audível por todos, por escutarem atentamente e por tentarem compreender os colegas;
- Contrariar concepções fundadas na ideia de que é apenas o professor quem detém na aula o poder de avaliar contribuições que surgem e o único responsável por exercê-lo;
- Tornar inteligível que uma generalização feita a partir da observação de regularidades em vários exemplos não constitui uma prova matemática e ajudar os alunos a produzirem provas com sentido para si;
- Favorecer o entendimento do valor da actividade de formulação de conjecturas, encontrar meios de facilitar a construção de enunciados não ambíguos e lidar com o dilema da escolha das conjecturas a provar na aula;
- Compreender, no momento, contribuições inesperadas, encontrar a melhor forma de com elas lidar e fazer face às inseguranças que, nalguns casos, originam;
- Orquestrar discussões de modo a não serem dominadas por vozes poderosas, identificar questões ou intervenções para alimentar a conversão sem fazer o trabalho dos alunos e tentar impedir que o fascínio experienciado perante a troca de ideias significativas mas restritas a alunos com estas vozes, enfraqueça a consciência da importância de alargar as discussões a outros;
- Procurar equilíbrios entre apoiar a actividade dos elementos da turma, ajudando-os a progredir mas favorecendo a sua autonomia;
- Articular responsabilidades do professor enquanto representante da comunidade matemática na aula com outro tipo de responsabilidades didácticas;

- Monitorizar a gestão do tempo enfrentando conflitos resultantes do confronto entre os modos como, enquanto professoras de Matemática, desejam agir e constrangimentos associados à necessidade de trabalhar com os alunos todos os temas curriculares.

Como este conjunto de itens permite evidenciar, a origem dos desafios foi múltipla. Alguns prenderam-se, mais de perto, com o processo de discurso matemático e outros com o conteúdo matemático do discurso. Enfrentá-los requereu não só ensinar Matemática, mas também, como refere Lampert (2001), ensinar outros conteúdos de ensino de que fazem parte, por exemplo, a expressão audível das ideias ou o respeito pelo outro. Foi também variada a sua incidência, como transparece, em particular, no resistir a "tentações" para validar ou invalidar, de imediato, argumentos e resoluções que os alunos vão apresentando.

Vários dos problemas com que as professoras se confrontaram nas primeiras aulas que presenciei, mantiveram-se em aulas posteriores, independentemente destas serem ou não objecto de observação por todos os elementos do grupo de pesquisa. Foi muito frequente Anita ou Rebeca relatarem, nas sessões de trabalho, episódios ocorridos em aulas não gravadas ou com turmas diferentes das do projecto, em que transparece, paralelamente à preocupação de envolverem os alunos em actividades de argumentação matemática, a inquietação que algumas situações lhes provocam.

O principal problema com que Anita se parece debater e que persiste desde o início do projecto prende-se com o que Lampert (2001) qualifica como sendo um dos "problemas intratáveis do ensino" (p. 121): lidar com o conflito entre deixar os alunos entregues a si próprios para ver o que conseguem fazer, ou guiar a sua actividade de modo a torná-la produtiva. A professora sabe que as dificuldades dos alunos diminuem se fizer intervenções com alguma substância matemática, ou seja, não meramente orientadas por propósitos relativos ao processo ou organização do discurso. Sabe, também, qual o conteúdo das sugestões ou questões que deve apresentar aos alunos para os ajudar a progredir e pensa nestes aspectos ao preparar as suas aulas. No entanto, valorizando que os alunos aprendam a colocar questões a si próprios, acreditando no isomofismo entre as interacções que modela e a sua apropriação pelos elementos da turma, tendo como propósito orientador do seu ensino o desenvolvimento da autonomia dos alunos e tendo expectativas elevadas quanto ao que imagina serem capazes de fazer com pouco apoio da sua parte, encontrar equilíbrios entre guiar a actividade dos alunos e saber o que deve dizer e calar e quando o fazer, foi e continua a ser um desafio: "Porque se eu não me preocupasse com serem eles a fazer o caminho, chegava ali, dava as dicas e pronto" (Anita, E4, p. 11). Quanto a Rebeca, o maior desafio que parecia enfrentar ao terminar o projecto era a orquestração de discussões colectivas em que há forte participação dos alunos.

Ambas as professoras, nessa altura, se debatiam com a questão de encontrar estratégias que favorecessem o nível de participação dos alunos para que, por esta via, acrescessem as possibilidades de todos, e não apenas de alguns, se envolverem em actividades de argumentação matemática. Ao longo do projecto, os desafios que se destacam pela sua continuidade, quanto a ambas as professoras, são ajudar os alunos a compreenderem o significado e importância da prova e a constituição e manutenção de uma cultura de sala de aula reguladas por normas do tipo das que procuraram negociar.

A análise global do conjunto dos problemas que se colocaram às duas professoras fez emergir seis temas, que representam espaços-problema. Estes espaços-problema contemplam, de forma integrada, os desafios com que lidaram ao longo do projecto ao tentarem envolver os alunos em argumentação matemática preocupando-se, simultaneamente, em alargar o número dos que activamente participam nestas actividades. Estes espaços-problema não se excluem mutuamente. Os problemas associados a cada um cruzam-se com os relativos a outros e no âmbito de cada um dos espaços-problema há entrecruzamentos. Os desafios foram, assim, cruzados e entrecruzados.

Apresento, em seguida, os seis espaços-problema identificados:

1. *Ensinar o valor das conjecturas e provas em Matemática e promover e sustentar a produção de provas.*

2. *Compreender as ideias apresentadas, instituí-las como recursos de apoio ao ensino e lidar com sentimentos que originam.*

3. *Descentrar o discurso de si, transformar a aula em comunidade que cuida e combater a irresponsabilidade matemática.*

4. *Apoiar a actividade dos alunos e favorecer a sua autonomia.*

5. *Harmonizar e equilibrar diferentes vozes na orquestração de discussões.*

6. *Articular propósitos e agendas pessoais com vontades dos alunos.*

Dar corpo ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática requer um esforço quotidiano de "aproveitar o que acontece" (Anita, TST 17, p. 7, 9/4/02), o que passa por um investimento simultâneo numa rede complexa de relações tecidas entre as tarefas matemáticas que se apresentam, as normas reguladoras da actividade matemática da aula que se negoceiam e os papéis e funções que o professor assume. O investimento apenas num destes pólos parece condenado ao fracasso.

Ao longo do trabalho conjunto, os problemas enfrentados em cada momento por Anita e Rebeca deram origem à procura de estratégias de acção, usadas posteriormente para lidar com outras situações. Estas fizeram surgir mais problemas, que foram desafios catalisadores da imaginação de novas formas de actuar numa espiral que se manteve durante todo o projecto. As professoras foram convivendo com desafios e enfrentá-los requereu que se situassem num plano em que as opções se fundam, em cada momento, numa teia de relações entre factores vários situados nos domínios cognitivo, afectivo e social.

O projecto de investigação colaborativa

No âmbito do projecto de investigação colaborativa centrado na argumentação em Matemática, a colaboração entre os elementos do grupo de pesquisa incidiu em quatro campos fortemente interligados, dos quais o núcleo central foi a reflexão individual e colectiva sobre aulas leccionadas pelas professoras e sua preparação. Para além das actividades associadas a estes campos, o projecto envolveu, também, a análise e discussão de documentos de diversos tipos e a preparação de formas de divulgação do trabalho.

Ambas as professoras consideram que o projecto ultrapassou significativamente as suas expectativas. Referem aprendizagens do domínio intelectual que, a seu ver, superaram as que imaginaram no início do trabalho e também outras aprendizagens que vão para além deste domínio. Referem, ainda, a possibilidade de viverem experiências que contribuíram para melhorar a sua auto-estima, a existência de à-vontade para partilharem com liberdade as suas ideias no grupo de pesquisa e a relação de amizade desenvolvida comigo, a quem não conheciam, o que não acontecia entre si pois eram amigas de longa data. No percurso de colaboração nem tudo foi simples. No entanto, foi possível ultrapassar todas as dificuldades de uma forma que foi ao encontro das necessidades e desejos de todas nós. Por tudo isto as professoras consideram que o projecto de colaboração foi bem sucedido, perspectiva que partilho, salientando que também me proporcionou possibilidades de aprendizagem não completamente antecipadas.

Nesta secção abordo potencialidades e problemas do trabalho desenvolvido. Estruturo-a em duas subsecções. Na primeira procurarei fundamentar, apoiando-me na experiência vivida, que um trabalho em colaboração pode, se equacionado de certo modo, constituir um contexto significativamente favorável ao desenvolvimento do professor. Na segunda centro-me neste projecto enquanto opção metodológica, procurando evidenciar aspectos considerados favoráveis à sua concretização, bem como outros que podem ser críticos num trabalho com as características do realizado.

Contexto de desenvolvimento do professor

Partilho da ideia de que o eu pessoal e o eu profissional são indissociáveis (Canavarro, 2003; Guimarães, 2004), pelo que abordo a questão do desenvolvimento sem tratar separadamente a vertente pessoal da profissional. Considero, assim, a pessoa/professor no seu todo. Partilho, também, da ideia de que não existem processos ideais que permitam o desenvolvimento de todas as pessoas, pois este desenvolvimento prende-se com o "que se quer, mais do que se precisa (...), [com] desejo, mais do que [com] necessidade" (Guimarães, 2004, p. 508). O que existe são processos individuais de desenvolvimento influenciados pela história de cada um, por intenções e vontades pessoais mobilizadoras e existem, também, situações marcadas por uma dinâmica própria que se instala entre quem as vive, que podem, ou não, ser favoráveis ao seu desenvolvimento (Guimarães, 2004). A concretização do projecto de investigação colaborativa e a dinâmica criada entre os elementos da equipa foi uma destas situações para as professoras que a integraram. Com efeito, a análise do seu discurso permite destacar vários aspectos indiciadores de desenvolvimento. Indico-os, em seguida, organizando-os em torno de sete pontos.

1. *Desenvolvimento da capacidade de reflexão crítica e organizada sobre a própria prática.* Ambas as professoras sublinham recorrentemente que a oportunidade de poderem reflectir sobre as suas práticas, a par do modo como foi organizado o processo de reflexão, contribuiu muito significativamente para o desenvolvimento da sua capacidade de reflexão, incluindo aqui a problematização da acção já realizada e a identificação de modos de agir futuros. A par deste aspecto, Rebeca refere, também, que um dos contributos mais relevantes oriundos da sua experiência de participação no projecto foi a maior importância que passou a atribuir à reflexão para o desenvolvimento do trabalho do professor e a maior consciência do seu valor. Anita põe a ênfase na apropriação de uma forma mais organizada de reflectir sobre a sua prática possibilitadora de ir mais a fundo no seu questionamento e compreensão o que, a seu ver, representa uma mais-valia para o

futuro. A participação no projecto contribuiu para que desenvolvessem uma atitude de interrogação permanente e continuada sobre as suas práticas, que é fundamental para o professor poder "integrar a mudança como algo inerente ao seu conhecimento, revendo e renovando os seus próprios conhecimentos, competências e perspectivas sobre o ensino da Matemática" (Canavarro, 2003, p. 609).

2. *Ampliação de conhecimentos teóricos*. Ambas as professoras referem ter conhecido modelos de análise de tarefas matemáticas ou da microestrutura de um argumento, normas sociais e sociomatemáticas reguladoras da actividade da aula que podem facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, aspectos importantes relativos a processos de negociação destas normas, estratégias discursivas incluídas, globalmente, no que Forman et al. (1998) designam por *redizer* e várias formas de perspectivar a argumentação. Além disso, as interacções no grupo de pesquisa revelam terem ampliado o seu conhecimento sobre processos de prova e clarificado a distinção entre explicação e justificação, bem como entre actividade e tarefa que a pode proporcionar.

3. *Transformação de perspectivas*. A transformação de perspectivas transparece no discurso de Rebeca através do que diz serem novos modos de ver a argumentação e as interacções na aula de Matemática. Com o desenvolvimento do projecto a argumentação perde, para si, o carácter pontual que tinha quando o iniciámos e começa a perspectivá-la de um modo mais holístico, tal como começa a ver o discurso da aula como não tendo que ser necessariamente mediado por si. Em Anita a transformação de perspectivas surge associada a como conseguir concretizar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. A experiência vivida no âmbito do projecto traz-lhe, nas suas palavras, "uma mudança, uma maneira diferente de encarar as coisas" que, a par dos conhecimentos que foi adquirindo, contribuiu para ter sido capaz de começar a concretizar nas suas aulas o seu ideal de argumentação na aula de Matemática, algo que, ao iniciarmos o projecto, afirmava desejar mas não conseguir. Houve, assim, uma evolução do que era capaz de fazer para o que queria fazer. Ambas as professoras sublinham que

estas transformações representam contributos da experiência de participação no projecto para o seu desenvolvimento profissional.

4. *Aprofundamento do conhecimento didáctico*[82]. Neste âmbito, a análise do discurso das professoras permite evidenciar alterações que se organizam em torno de quatro aspectos. O primeiro aspecto prende-se com uma procura mais criteriosa de tarefas matemáticas a explorar com os alunos. Esta procura aparece associada à maior consciência, em Anita, sobre a existência de vários tipos de tarefas e sobre cuidados a ter na sua formulação; aparece também associada, no caso de ambas as professoras, à maior capacidade para identificarem o que aproxima e distingue os vários tipos, para analisarem criticamente as incluídas em manuais e para desenharem, seleccionarem ou adaptarem tarefas de acordo com os objectivos visados.

O segundo aspecto revela uma mudança de perspectiva em Rebeca sobre a preparação de aulas com tarefas abertas. Esta mudança traduz-se na reflexão sobre questões ou sugestões a apresentar, se adequado, durante a exploração das tarefas pelos alunos. Perto do início do projecto, pensar nestes aspectos poderia, a seu ver, diminuir a abertura e disponibilidade para desenvolver a aula tendo em conta as contribuições que surgiam. Desta forma, preferia não o fazer e apoiar-se na sua intuição para identificar, em acção, o melhor modo de agir. Com a experiência de ensinar Matemática a partir deste tipo de tarefas dá-se conta de que pode haver vantagens em identificar ideias a apresentar aos alunos, se necessário, para apoiar ou fazer progredir a sua actividade. Esta preparação pormenorizada e cuidada parece ter deixado de ser incompatível com flexibilidade. Começa a vê-la como um recurso que a ajuda a lidar com a imprevisibilidade da aula e a encontrar a melhor forma de adequar os movimentos de ensino aos acontecimentos que vão surgindo.

O terceiro aspecto traduz o desenvolvimento, em ambas as professoras, da capacidade de fazer surgir episódios de argumentação matemática, de envolver os

[82] O conhecimento didáctico é entendido como o conhecimento profissional usado para desenvolver o trabalho necessário para leccionar aulas de Matemática (Canavarro, 2003).

alunos numa discussão e de promover e apoiar a interacção entre os alunos. Para o desenvolvimento desta capacidade concorreram vários factores, de que destaco: (a) a percepção da relevância da exploração de situações de desacordo para a aprendizagem da Matemática em geral, e da argumentação, em particular, associada à prática de orquestrarem discussões visando a obtenção de consensos fundamentados e matematicamente válidos; (b) a aprendizagem de processos de negociação de normas de acção e interacção que põem a ênfase na explicação, justificação, expressão audível e escuta atenta de todas as intervenções que surgem na aula e não apenas as que têm origem na professora; (c) o auto-controle do seu discurso de modo a não validarem ou invalidarem, de imediato, ideias apresentadas pelos alunos e o discernimento para decidirem o que deve ser submetido ao escrutínio da turma; (d) a maior abertura na formulação de questões e a utilização consciente de repetições, reformulações ou relatos de contribuições dos alunos enquanto meios de gerar interacções; (e) a crescente experiência, no início do projecto significativamente limitada, de ensinar Matemática a partir de tarefas de investigação; (f) a maior partilha, por Rebeca, da liderança da aula com os alunos e o reconhecimento das suas potencialidades; (g) a tomada de consciência, por Anita, da importância da coerência entre o que explicitamente se diz e as mensagens que implicitamente se veiculam; e (h) a demanda consciente desta coerência por ambas as professoras.

O quarto aspecto prende-se com a forma de organização e gestão da aula. Saliento, neste âmbito, dois itens. O primeiro concerne ao conhecimento sobre potencialidades que podem advir de organizar a distribuição dos alunos pelo espaço físico da sala tendo em conta o tom de voz em que costumam exprimir-se, mas cuidando de não os colocar em situações de desconforto emocional. A análise do discurso de Anita deixa transparecer o reconhecimento destas potencialidades. Usou esta estratégia para incentivar a expressão audível de contribuições dos alunos que usualmente participavam no discurso da aula de um modo que impossibilitava serem escutados pela grande maioria dos colegas.

O segundo item prende-se com o conhecimento de novas formas de articular o trabalho de pares/grupos com o trabalho colectivo. Com o desenvolvimento do projecto, as professoras vão-se dando conta de que, em lugar desta segunda modalidade de trabalho se seguir necessariamente à primeira, pode haver vantagens de elas se interpenetrarem e, por vezes, de haver suspensões curtas numa discussão colectiva para os alunos poderem reflectir entre si sobre o que ouviram. Com o projecto, Anita toma consciência da importância das duas modalidades de trabalho estarem claramente demarcadas e começa a tomar cuidados que não tinha anteriormente. Rebeca, por seu turno, começa a introduzir suspensões temporárias nas discussões colectivas quando considera adequado, o que não fazia ao iniciarmos o projecto. Para esta alteração da sua prática, que tal como a colega considera poder facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, contribuiu a maior consciência da importância das referidas suspensões oriunda não apenas da troca de ideias no grupo de pesquisa, mas sobretudo da observação e análise das aulas de Anita e da constatação de que elas tinham vantagens.

5. *Aprofundamento do conhecimento de si.* Este conteúdo do conhecimento profissional, que se relaciona muito de perto com o conhecimento didáctico, contempla, nomeadamente o que o professor sabe acerca de si próprio, a consciência que tem das suas capacidades e recursos, a autoconfiança e a forma como vê o seu papel na aula e na escola (Ponte, Guimarães, Leal, Canavarro, & Abrantes, 1997; Saraiva, 2001). Com o projecto, ambas as professoras tomaram consciência de ter desenvolvido certas competências profissionais, entre as quais a de serem mais capazes de procurarem criticamente tarefas, de gerarem e apoiarem interacções entre os alunos, de criarem contextos mais favoráveis à emergência e desenvolvimento de episódios de argumentação matemática e de ensinarem Matemática a partir de tarefas de investigação. Alterou-se, também, a forma de perspectivarem o seu papel e o papel dos alunos no discurso da aula. Além disso, o facto de se confrontarem com a observação da sua própria acção a partir do visionamento dos registos em vídeo das suas aulas, facilitou a formulação consciente de juízos sobre o próprio trabalho. Estes juízos, se por um lado, fizeram

surgir dúvidas sobre aspectos da prática anteriormente ao projecto não questionados, por outro contribuíram para se consciencializarem de modos de agir próprios que constituíam recursos valiosos para o ensino. Por último, parecem ter desenvolvido a sua autoconfiança o que transparece, por exemplo, nos seus comentários à dinamização do grupo de discussão no ProfMat, no ter deixado de ser penoso, para Rebeca, confrontar-se com aquilo que entende como imperfeições do seu agir e na maior persistência de Anita para insistir em vias a seu ver favoráveis à aprendizagem da Matemática mesmo quando os alunos reagem a essas vias de uma forma que, anteriormente ao projecto, inibiam a sua acção.

6. *Desenvolvimento de competências na área da comunicação.* Tendo por referências as formas de divulgação do trabalho que realizámos, Anita inclui nos contributos deste trabalho para o seu desenvolvimento profissional "noções sobre como organizar uma apresentação de um projecto" (DEA, 13/4/03, p. 2). Rebeca, por seu turno, coloca a hipótese do maior "à-vontade para falar em público (...) por exemplo, nos [conselhos] pedagógicos" (E2, p. 18) se dever, também, ao facto de no grupo de pesquisa ter de explicar os seus pontos de vista para eu e a colega podermos compreendê-los: "Se calhar (...) também fez com que eu tenha desenvolvido uma capacidade maior de, num grupo de pessoas, numa reunião, conseguir expor as minhas ideias com mais facilidade" (idem). Na sua perspectiva, um dos contributos do projecto para o seu desenvolvimento profissional foi ter desenvolvido a sua "capacidade de argumentação" (DER, 19/3/03). Rebeca considera, ainda, que a experiência vivida contribuiu para mudar a sua relação com a escrita e favoreceu o reconhecimento da sua importância: "O reflectir por escrito não gosto muito, mas é importante. Por exemplo, o ter escrito estas ideias facilita um bocado o estar a pensar agora nisto tudo" (E2, p. 11). Com o projecto começa a ser "mais cuidadosa em termos do registo de coisas" (idem, p. 10), a estar "mais predisposta a escrever" (idem) e a custar-lhe "menos já escrever e registar as coisas" (idem, p.11). Na final da primeira fase do projecto, altura em que pronuncia estas palavras, sente que começa a existir uma evolução em si: "Acho que tenho estado a evoluir devagarinho e que acho que isso vem deste trabalho" (idem). Com a

continuidade do trabalho esta evolução não retrocede e antes se acentua. Começa a ser frequente registar por escrito as suas reflexões sobre as próprias aulas ou as da colega no documento com a respectiva transcrição ou num pequeno caderno onde anota comentários sobre episódios que ocorreram em aulas não gravadas.

7. Realização de aprendizagens favoráveis ao desenvolvimento de uma investigação. Ao iniciarmos o trabalho, as professoras não tinham experiência de participação em projectos de investigação. Uma das suas expectativas era poderem compreender como se desenvolvem estes projectos, considerando que esta compreensão era útil à realização futura de uma tese de mestrado. No âmbito do projecto de investigação colaborativa, aprenderam noções sobre análise de conteúdo de dados qualitativos, incluindo aqui a definição de categorias de análise, o recorte do texto de acordo com essas categorias e a análise do conjunto de extractos referente a cada uma de modo a identificar ideias chave e a relacionar estas ideias. Além disso, formularam questões sobre a própria prática e, orientando-se por estas questões, analisaram material empírico recolhido nas suas aulas procurando responder-lhes, o que fez nascer novas questões, recomeçando o ciclo. Quanto ao desenvolvimento de investigações de carácter académico, entre os aspectos incluídos por Anita no documento que elabora sobre os contributos da sua experiência de participação no projecto para o seu desenvolvimento profissional, encontra-se a referência a "noções" (DEA, 13/4/03, p. 2) sobre como realizar uma entrevista e sobre como organizar e desenvolver um projecto de colaboração envolvendo a prática lectiva. Por último, ambas as professoras salientam que a sua experiência de participação no projecto lhes foi útil para perspectivarem as suas próprias investigações quando chegou a altura de decidirem o foco das suas teses de mestrado.

Os sete pontos anteriormente apresentados permitem destacar que um trabalho desenvolvido em colaboração por pessoas com formações, experiências, perspectivas e contextos de trabalhos diversificados e em que a reflexão sobre a prática do professor assume um lugar privilegiado, parece ser um contexto significativamente favorável ao desenvolvimento desse mesmo professor. Esta conclusão vai, assim, ao encontro de ideias apresentadas por vários outros autores sobre benefícios que podem advir do trabalho colaborativo (Bednarz, Desgagné, Couture, Lebuis, & Poirier, 1999; Christiansen, Goulet, Krentz, & Maeers, 1997a; Day, 1991, 2001; Hargreaves, 1998a; Jaworski, 2001; Ponte, Segurado, & Oliveira, 2003; Saraiva, 2001; Serrazina, 1998).

No caso das professoras com quem trabalhei, a experiência vivida no âmbito do projecto de investigação colaborativa trouxe mais-valias a vários níveis. Evidencia-se o desenvolvimento da sua capacidade de reflexão crítica e organizada sobre a própria prática e de competências na área da comunicação, a transformação de perspectivas sobre aspectos relevantes da prática lectiva, a ampliação do conhecimento teórico, o aprofundamento do seu conhecimento didáctico e do seu conhecimento de si mesmas e a realização de aprendizagens relativas ao desenvolvimento de uma investigação. Saliento, no entanto, que no seu percurso e processo de desenvolvimento associado aos cerca de dois anos em que trabalhámos em conjunto, se encontram singularidades: há a valorização de aspectos por uma que a outra já valorizava; diferencia-se, nalguns casos, a tomada de consciência sobre a importância de dedicar atenção a umas ou outras especificidades do agir; há aprendizagens consideradas muito relevantes por uma delas que não foram vistas com a mesma relevância pela sua colega; há grandes desafios que uma enfrentou mas que para a outra não existiram; numa das professoras acresce a tolerância face a si própria enquanto que a outra vê como positiva a maior persistência para lidar com reacções adversas dos alunos a ambientes de trabalho que acredita poderem favorecer a aprendizagem. Ambas as professoras consideram que a participação no projecto contribuiu significativamente para o seu desenvolvimento profissional, mas cada uma seguiu um caminho que foi o seu, o que parece ir ao encontro da ideia de que o "desenvolvimento não segue um modelo universal, mas, ao invés, singular" (Guimarães, 2004, p. 509) e que o desenvolvimento do professor se funda "na pessoa [que ele é] que, na sua totalidade e unicidade, [nele] se implica" (idem, p. 185).

Saliento, por último, que as professoras que se envolveram no projecto de investigação colaborativa são pessoas que gostam de discutir ideias, fortemente empenhadas no seu aperfeiçoamento profissional, que consideram ser um privilégio poder conversar sobre as suas aulas, analisar episódios que aí ocorrem, debater dúvidas e problemas com que se deparam, partilhar ansiedades e satisfações e que ousam experimentar e enfrentar desafios em que encontram sentido. Move-as o desejo de aprender mais e de melhorar o seu trabalho para poderem fazer o que consideram ser melhor pelos seus alunos. O projecto que concretizámos constituiu um enquadramento favorável ao seu desenvolvimento mas, certamente, esta forma de *motivação autêntica*, um dos tipos de motivação em que assenta o desenvolvimento do professor (Guimarães, 2004), foi, também, um factor muito relevante para que ele acontecesse. Assim, um dos grandes desafios que se coloca, em particular, às instituições de formação de professores, é a criação de meios e formas de organizar a formação que proporcionam para que ela possa facilitar, fazer surgir ou alimentar nos futuros professores uma motivação pessoal autêntica e um desejo pela aprendizagem ao longo da vida.

Opção metodológica

Como anteriormente referi, centro esta secção na apresentação de factores favoráveis ao desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa, bem como dos principais aspectos que foram sentidos como problemáticos pelos elementos do grupo de pesquisa. Procuro, através desta via, evidenciar pontos críticos a que importa dedicar atenção numa colaboração que envolve, em particular, professores e o que usualmente se designa por investigadores, e cujo núcleo é a reflexão sobre a prática lectiva dos professores. Organizo-os em torno de sete ideias que apresento em seguida.

1. *A importância da organização do trabalho e de uma clara definição de papéis e responsabilidades.* Um aspecto essencial à realização de qualquer empreendimento complexo, como considero ser o caso da concretização de um projecto de colaboração, é a liderança. Era esperado pelas professoras que eu

coordenasse as actividades do grupo de pesquisa e este foi um dos papéis que desempenhei. A liderança foi, no entanto, compartilhada (Fiorentini, 2004), no sentido em que não existiram hierarquias no interior da equipa, todos os seus elementos foram ouvidos e tiveram voz, foram negociados desde o início e com transparência os papéis e responsabilidades de cada um e todos se comprometeram por cumprir e fazer cumprir os acordos estabelecidos. Ambas as professoras destacam que a boa organização do trabalho facilitou significativamente o desenvolvimento do projecto e contribuiu para nele se empenharem. No início de cada uma das suas duas fases, os acordos estabelecidos foram incluídos em documentos escritos que indicavam os principais traços do trabalho a realizar e a calendarização das actividades (anexos 8 e 10). A existência destes documentos facilitou a organização, ao mesmo tempo que foi importante para identificarmos as alterações a introduzir na planificação sem comprometer o projecto e para agilizar a tomada de decisões. Um outro elemento organizador do trabalho considerado importante por qualquer um dos elementos do grupo de pesquisa, foi a existência de sínteses escritas com os compromissos assumidos em cada encontro colectivo, relativamente à actividade a desenvolver no encontro subsequente. Estas sínteses, por cuja elaboração fui responsável, eram enviadas às professoras e funcionaram, de algum modo, como uma ordem de trabalhos flexível. Sublinho que, apesar de qualquer um dos documentos escritos ter sido percepcionado como significativo, foi também muito importante não ter determinado o trabalho a realizar em cada momento.

2. *A importância do diálogo e de uma negociação transparente, igualitária e continuada*. Uma das características do projecto foi o carácter permanente da negociação das actividades, o que se revelou fundamental para estas irem ao encontro das expectativas, desejos e necessidades de todos os elementos do grupo de pesquisa. Para esta negociação poder ocorrer num plano de igualdade é fundamental, antes de mais, que as pessoas envolvidas na colaboração possam conversar com autenticidade e abertura. Um dos factores que ambas as professoras consideram ter facilitado a concretização do projecto foi o à-vontade para

exprimirem no grupo de pesquisa o que pensavam e sentiam e, simultaneamente, as decisões respeitantes ao trabalho a realizar serem tomadas em conjunto. O facto de se conhecerem entre si facilitou a existência deste à-vontade tal como o facilitou, a seu ver, as tentativas que fui fazendo para assumir o que designo por uma atitude de *escuta hermenêutica* (Breen, 2003; Davis, 1997). Uso esta expressão para destacar que procurei respeitar as suas perspectivas considerando-as merecedoras de valor e de atenção, entendê-las a partir dos seus pontos de vista e aproveitar as oportunidades para explorar o que escutava tendo em vista uma maior compreensão mútua sobre o objecto da troca de ideias. Um dos aspectos que Rebeca aponta, em diversas ocasiões, como tendo sido muito importante para o desenvolvimento do projecto, foi não me ter posicionado num patamar superior relativamente a si e à colega, apesar de estar numa situação diferente. Tendo por referência a experiência vivida, a recomendação que faz para um projecto de colaboração ser bem sucedido é as pessoas manterem-se ao mesmo nível pensando que todas têm a aprender com o trabalho conjunto, independentemente de terem, ou não, papéis e objectivos diferenciados.

O diálogo aberto e transparente que procurámos criar e manter no grupo de pesquisa foi perspectivado como instrumento de obtenção de consensos e de compreensão. A obtenção de consensos predominou nos momentos em que delineávamos, em cada sessão de trabalho, o que iríamos fazer na seguinte e foi sempre possível chegar a acordos confortáveis para todas nós. Nas restantes ocasiões, a função primeira do diálogo foi a de compreensão, o que não impediu, naturalmente, de existirem, ou se chegar, a pontos de vista comuns em várias ocasiões. A existência de um diálogo deste tipo foi fundamental à concertação de acções, à sua negociação em plano de igualdade e a uma partilha de perspectivas, experiências e problemas possibilitadora de novos modos de compreender a própria experiência e de imaginar possibilidades de agir no futuro. Este diálogo, constituiu, assim, uma abertura à pesquisa (Olson, 1997). Como defende Paulo Freire (1975), foi essencial para a aprendizagem e além disso permitiu não apenas a construção de conhecimento, mas também de relações interpessoais facilitadoras de apoio emocional e cognitivo. Foi nele que assentou o desenvolvimento do projecto, ideia que vai ao encontro do pensamento deste educador para quem a colaboração como característica da acção dialógica — que não pode dar-se a não ser entre sujeitos ainda que tenham diferentes níveis de funções e, portanto, de responsabilidades — somente pode realizar-se na comunicação e, assim, funda-se no diálogo. Tal como Freire e também muitos outros autores (Bednarz et al., 1999; Castle, 1997; Hookey, Neal, & Donoahue, 1997; Ponte, Segurado & Oliveira., 2003), todos os elementos do grupo de pesquisa consideraram fundamental a existência do diálogo, mas nenhum entendeu que termo-nos orientado por objectivos diferentes — se bem que enquadrados por um propósito comum — e assumido funções e papéis diferenciados inibisse ou dificultasse o sucesso da colaboração.

3. A importância da diversidade e complementaridade. Recorrentemente sublinhado pelas professoras como uma mais-valia para o trabalho conjunto foi a existência, no grupo de pesquisa, de pessoas que conseguiam compreender-se mas que eram diferentes entre si quanto a experiências, saberes, sensibilidades e modos de ser. No âmbito destas diferenças consideraram particularmente relevante terem tido a possibilidade de, através de mim, contactarem com ideias que não conheciam e confrontarem-se com questões, nem sempre consideradas de simples resposta, mas que as ajudaram a reflectir e a problematizar a prática. Um dos meus contributos para o desenvolvimento do projecto valorizado por Anita e Rebeca e que, a seu ver, seria mais difícil de existir se a equipa apenas incluísse professores não familiarizados com a investigação, foi a análise e discussão de textos de carácter teórico ou teórico/prático. Sublinham o seu contributo para o enriquecimento dos seus conhecimentos, para uma maior tomada de consciência sobre aspectos que consideram ser favoráveis ao envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e para facilitar a compreensão recíproca de pontos de vista, nomeadamente durante a reflexão sobre as aulas. Estes aspectos sintetizam a relevância que também encontro nesta actividade, a que acrescento o seu contributo para tomarmos decisões sobre o significado que iríamos atribuir a argumentação matemática no âmbito do projecto. Este tipo de actividade, que atravessou a primeira fase do projecto embora com intensidades variáveis, foi perspectivada de modo à teoria informar e facilitar a prática e a prática ser uma fonte de pesquisa e questionamento de teoria. É, assim, de sublinhar a sua forte articulação com a prática e também o facto de não ter tido um peso excessivo face às restantes actividades, aspectos considerados importantes quer pelas professoras, quer por mim.

4. *A importância de um período de conhecimento recíproco prévio à observação de aulas.* Uma das opções tomadas ao delinear os principais traços do trabalho a desenvolver durante a primeira fase do projecto, foi a inclusão de um período de tempo dedicado a actividades que não exigissem a minha presença nas aulas das professoras (ver anexo 8). A existência deste período foi fundamental para o desenvolvimento de todo o trabalho posterior. A maior parte dos documentos de carácter teórico ou teórico/prático foram analisados e discutidos durante este período, actividade que, como anteriormente indiquei, originou mais-valias para as professoras. Não menos importante foi a possibilidade que proporcionou para todos os elementos do grupo de pesquisa se começaram a encontrar, de algum modo, numa "terra de ninguém" e, pouco a pouco, à medida que ia aumentando o conhecimento recíproco e a empatia, começarem a caminhar, confortavelmente, para o encontro vir a dar-se na "terra de Anita" e na "terra de Rebeca". Uso estas expressões para designar as aulas de cada professora observadas presencialmente e/ou através do registo magnético, pelos restantes elementos do grupo.

Em particular, Rebeca indica, claramente, que a inexistência deste período poderia ter dificultado a boa relação que construímos. Para mim, foi a confiança já alcançada quando se iniciaram as sessões de reflexão sobre as aulas, que me permitiu encontrar meios de fazer face aos dilemas que designei por *questionamento crítico versus questionamento mais neutro* e *apostar na proximidade versus "deixar para trás" a investigação* (capítulo V), o primeiro dos quais tem ressonâncias com um dos que Erickson (1989) refere ter sido experienciado por investigadores do ensino superior que trabalharam num projecto de colaboração com professores. No seu conjunto, estes dois dilemas remetem para a questão de decidir entre colocar questões sobre aspectos das práticas das professoras que me pareciam não favorecer o envolvimento dos alunos em argumentação matemática ou calá-las porque receava que fossem sentidas como uma avaliação negativa da sua acção, embora intuísse que poderiam permitir o aprofundamento da reflexão e, por esta via, também da compreensão do seu trabalho.

5. *A importância da reflexão sobre a prática e sua organização*. Qualquer um dos elementos do grupo de pesquisa considerou especialmente significativo o núcleo central do projecto ter sido a actividade reflexiva sobre as práticas de Anita e Rebeca. Esta característica foi entendida, pelas professoras, como particularmente relevante enquanto meio de aprendizagem e evolução profissional e por mim como frutuosa para o desenvolvimento da investigação. Nas sessões de trabalho colectivo a reflexão foi perspectivada num sentido retrospectivo e prospectivo, o que proporcionou um contexto favorável à emergência de novos olhares sobre práticas passadas que informaram modos de agir futuros que, por sua vez, eram objecto de novas reflexões. Este ciclo, a par da qualidade da relação de colaboração possibilitadora de vários tipos de apoio, proporcionou um contexto favorável à experimentação, à interrogação do agir e à mudança do que as professoras consideraram que devia ser mudado.

Neste âmbito, há dois factores que todos os elementos do grupo de pesquisa consideraram ter facilitado e enriquecido a reflexão. O primeiro, é a existência de materiais de apoio à reflexão: gravação em vídeo de aulas e respectivas transcrições. O segundo, é a coexistência de um período de reflexão individual e outro de reflexão colectiva tendo estes materiais como suporte. As sessões de trabalho do grupo de pesquisa proporcionaram o contexto para a reflexão colectiva, previamente à qual todos os membros da equipa do projecto analisavam individualmente a aula que seria objecto de troca de ideias, de acordo com um compromisso assumido. Ambas as professoras, tal como eu, consideraram ter sido importante a simultaneidade dos dois tipos de materiais e em diversas ocasiões afirmaram que a ausência de transcrições dificultaria a actividade reflexiva. A minha perspectiva também é esta.

6. A importância do tempo. A análise das dificuldades, problemas ou dilemas experienciados pelos elementos do grupo de pesquisa traz, para primeiro plano, a importância do tempo, que tanto pode ser fonte de constrangimentos, como de recursos. Constrangimentos porque colaborar envolve disponibilizar tempo: para os encontros de partilha de ideias e para a preparação prévia das tarefas para eles agendadas. As únicas dificuldades referidas pelas professoras prendem-se, precisamente, com nem sempre ter sido simples compatibilizar o tempo necessário aos compromissos assumidos no âmbito do projecto com outros aspectos da sua vida profissional e pessoal.

No entanto, a análise global de todas as situações de carácter problemático, vividas ao longo do projecto, permite evidenciar que o tempo como um recurso é a dimensão que mais se destaca. Como indica uma das professoras, uma colaboração bem sucedida requer tempo e continuidade. Com efeito, o que considero ter contribuído para fazer face aos dilemas que referi no ponto 4, bem como ao que designei por *assumpção do papel de formadora versus desenvolvimento de uma relação de paridade* (capítulo V), foi, sobretudo, o à-vontade, a espontaneidade e a confiança com que fomos aprendendo a conversar no grupo de pesquisa. Em relação a tudo isto, o tempo é fundamental, pois "queimar etapas" pode ter pesados custos.

Foi também o tempo que permitiu aumentar a familiaridade entre os elementos deste grupo, o que foi importante para a voz de uma das professoras ter uma maior expressão nas sessões de trabalho colectivo. Além disso, contribuiu para diminuir a timidez e inibição dos alunos de uma das turmas provocada, na perspectiva da sua professora, pela intrusão na aula de elementos estranhos, em que incluo a minha presença e a da câmara de filmar. Estas reacções dos alunos que originaram, a seu ver, um decréscimo muito significativo da sua participação no discurso da aula, estão na base da única vulnerabilidade que diz ter experienciado ao longo do projecto. O tempo foi um recurso para lidar com esta vulnerabilidade, pois permitiu-lhe encontrar energias interiores para lhe fazer face e contribuiu para ser possível construir uma relação de colaboração suficientemente aprofundada para a partilhar, aspecto que vê como representando uma evolução em si em termos de manifestar o que sente, o que considera ser positivo.

Por fim, o tempo foi também importante para a outra professora ter tido oportunidades diversas de se confrontar consigo própria através da observação dos registos magnéticos da sua acção, experiência que de início lhe era penosa mas que deixou de o ser e favoreceu o que considera ser uma transformação pessoal.

As professoras que se envolveram no projecto de investigação colaborativa fizeram-no por sua vontade, porque o tema do projecto ia ao encontro dos seus interesses. Este aspecto, a par das ideias anteriormente apresentadas, permitem destacar que a liberdade para escolher envolver-se, ou não, num trabalho colaborativo, a organização deste trabalho e uma clara definição de papéis e responsabilidades, a possibilidade de dialogar autenticamente sobre o que se pensa e o que se faz, a existência de uma negociação transparente, igualitária e continuada das actividades a realizar — que é incompatível com relações interpessoais dominadas por hierarquias ou em que haja vozes dominantes impeditivas ou inibidoras da expressão de outras vozes —e a partilha de perspectivas, experiências e saberes diferenciados, são factores que parecem favorecer a colaboração. Esta conclusão vai ao encontro das ideias de Drake e Basaraba (1997), John-Steiner, Weber e Minnis (1998), Ponte, Segurado e Oliveira (2003) e Stewart (1997) que consideram que a diversidade é enriquecedora da colaboração e que esta é uma oportunidade para tirar partido da complementaridade entre quem nela se envolve. Vai, também, ao encontro da importância de um diálogo autêntico, negociação, confiança e compromisso, salientada por vários autores entre os quais Blond e Webb (1997), Christiansen, Goulet, Krentz e Maeers (1997b), Friesen (1997), Goulet e Aubichon (1997) e Stewart (1997).

Além disso, a presente investigação permite evidenciar que, tal como sublinham alguns autores (Drake & Basaraba, 1997; Stewart, 1997), os processos colaborativos podem desencadear vulnerabilidade em qualquer uma das pessoas envolvidas na colaboração. Em particular, num projecto com professores em que está em jogo a observação e análise das suas práticas, um ponto crítico é o início de sessões de reflexão do tipo das existentes no projecto de investigação colaborativa. A existência de um período de conhecimento recíproco prévio à observação de aulas, que permita atingir um certo patamar de confiança, o tempo e a qualidade da relação construída, podem ser factores decisivos para individual e/ou colectivamente se descobrirem meios de lidar com a vulnerabilidade, para imaginar formas de ultrapassar esse ponto crítico e para dar um salto qualitativo na relação de colaboração facilitador do trabalho futuro.

7. Por último, saliento dois pontos, ambos relacionados, em especial, com o desenvolvimento de investigações cujo foco requer a análise de práticas discursivas da aula e envolve a colaboração entre professores e investigadores. O primeiro ponto visa destacar a importância de dedicar atenção ao que designei por aulas de familiarização, ou seja, uma aproximação gradual e progressiva do investigador aos alunos das turmas envolvidas na investigação. Por constrangimentos diversos, dos quais o principal foi o projecto de investigação colaborativa estar, inicialmente, planeado apenas para um ano lectivo, estive presente apenas num conjunto de quatro aulas deste tipo e em qualquer das vezes já com a câmara de filmar. Numa das turmas, esta situação não levantou problemas e rapidamente os alunos se esqueceram do material de gravação e começaram a ver-me, também, como professora. Na outra a situação foi bem diferente. Só passado bastante tempo se notou, na perspectiva da professora, uma diminuição dos fortes constrangimentos que lhes causava a minha presença e/ou a da câmara de filmar, elemento este reconhecidamente destacado pela investigação como tendo um carácter obstrutor. O segundo ponto que destaco prende-se com a organização das sessões de reflexão sobre aulas e materiais de apoio a estas reflexões. O desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa permite evidenciar que a análise de aspectos do discurso do professor e dos alunos pode ser facilitada pela existência de transcrições das aulas, partilhadas entre os elementos da equipa do projecto anteriormente à sessão de trabalho colectiva em que as aulas serão objecto de análise. Sublinho, no entanto, que as transcrições enquanto instrumento de apoio à reflexão não

dispensam a necessidade de uma boa e cuidada observação de um registo que melhor traduza a dinâmica da aula — o caso, por exemplo, da sua gravação em vídeo — e que permita ter a percepção dos acontecimentos sem ser, exclusivamente, através do ponto de vista do responsável pela transcrição. No projecto desenvolvido os dois tipos de registo, magnético e escrito, foram entendidos como complementares e foi esta complementaridade que favoreceu a análise do discurso e a reflexão.

Encerrando o estudo

Ao desenvolvermos o projecto de investigação colaborativa centrado na argumentação na aula de Matemática, o que Anita, Rebeca e eu vivemos ao longo dos cerca de dois anos em que trabalhámos em conjunto, é uma história e uma dinâmica que são nossas, que foram tecidas com os nossos saberes, perspectivas, experiências, sensibilidades, forças e fragilidades. Certamente que haverá muitas outras vias de orientar o ensino da Matemática para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e, seguramente, haverá, também, muitos outros e variados caminhos conducentes a projectos de colaboração que são sentidos como bem sucedidos por quem neles participou.

Colaborar significa trabalhar em conjunto de modo a que haja ajuda mútua *genuína* e não apenas aquilo que parece ser ajuda (Erickson, 1989), ou seja, o trabalho de cada um dos parceiros colaborativos torna-se mais significativo e/ou mais satisfatório do que fosse feito isoladamente e o fruto desse trabalho é algo que tem uma qualidade superior àquela que teria se a colaboração não existisse. Olhando holística e retrospectivamente para a minha acção ao longo deste percurso, dou-me conta da diversidade de papéis que desempenhei e de como se entrelaçaram fortemente. Enquanto investigadora, procurei encorajar as professoras a conversar e a problematizar as suas práticas no que mais directamente se prendia com ensinar a argumentar em Matemática. Neste âmbito, fui tentando ser um membro pleno do grupo de pesquisa, participando completamente na troca de ideias e, ao mesmo tempo, fui tentando olhar para a actividade que ia sendo desenvolvida como alguém que está de fora, procurando, por esta via, distanciar-me para melhor a poder compreender e perspectivar. Fui, também, formadora no sentido em que recorri à minha experiência no âmbito da formação de professores para preparar encontros cujo conteúdo foi favorável ao alargamento ou aprofundamento dos saberes de Anita e Rebeca e isso contribuiu para que surgissem novos olhares sobre facetas do seu trabalho. Fui, além disso, apoio e recurso, na medida em que apresentei sugestões que foram úteis, por exemplo, para delinearem as actividades de ensino ou reflectirem sobre estas actividades. Fui, ainda, colega "do mesmo ofício" pois, ocasionalmente, fui professora das suas turmas. Por último, fui alguém com quem partilharam dúvidas e inquietações, nem sempre sobre o trabalho profissional, e, neste sentido, fui confidente e amiga.

Os dados que recolhi para a minha investigação não teriam existido sem os diálogos que tivemos nem a natureza destes diálogos. As reflexões que fui fazendo, quer no que, mais directamente, se prende com o trabalho do professor orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, quer sobre o próprio modo de desenvolver uma investigação colaborativa, foram enriquecidas pelo que fui ouvindo. Por tudo isto, considero que as professoras foram uma ajuda para mim. Como bem diz Anita, "se tu fosses ver [as nossas aulas] e transcrever e não reflectíssemos em conjunto, não podias ver o ponto de vista do professor" (E3, p. 83). Analisando, em particular, as transcrições das sessões de trabalho em que nos debruçámos sobre aulas, constato que houve reflexões significativas de uma professora que emergiram a partir de iniciativas da outra. Constato, também, que várias ideias que uma apresentou ou pôs em prática, contribuíram para ajudar a colega a delinear as suas próprias aulas. Assim, entreajudaram-se de uma forma relevante. Olhando a colaboração a partir de outro ângulo, dou-me conta de que as considerações que Anita e Rebeca tecem sobre aprendizagens que fizeram, as mais-valias que o desenvolvimento do projecto lhes trouxe e os contributos que dei, revelam que também eu as ajudei. Houve, pois, nas palavras de Erickson (1989), ajuda mútua genuína entre os três elementos do grupo de pesquisa e, nessa medida, uma genuína colaboração. Nem tudo foi fácil ao longo do percurso como revelam, nomeadamente as inquietações vividas. No entanto, a satisfação que sinto quando escuto o que dizem as professoras, as potencialidades que reconheço no desenvolvimento do projecto para o meu próprio trabalho e a serenidade que esta opção metodológica me proporcionou para lidar com problemas éticos que se me colocaram, levam-me a sentir que valeu a pena a caminhada que conjuntamente fizemos.

Para finalizar quero ressaltar que a análise do trabalho de ensino orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, revelou que este envolvimento, ao passar, necessariamente, pela abertura do discurso da aula de modo a considerar, com seriedade, as suas ideias, "requer um tipo de conhecimento que não pode simplesmente ser adquirido e depois aplicado. Requer, simultaneamente, preparação e a capacidade de inventar a prática no momento" (Lampert, 2000, p. xi). E como o que está em causa não é, apenas, uma "dança" de ideias, mas também um jogo de relações e afectos, de riscos, cuidados e vontades, requer, ainda, um pensar holístico sobre o trabalho do professor, sobre a emoção e a razão.

Referências bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Academia das Ciências de Lisboa (2001). *Dicionário da língua portuguesa contemporânea* (J. Malaca Casteleiro, coordenador). Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa e Editorial Verbo.

Adler, P., & Adler, P. (1994). Observational techniques. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 377-392). London: Sage.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in Mathematics Education: Intention, reflection, critique*. London: Kluwer Academic Publishers.

APM (Associação de Professores de Matemática) (Ed.). (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM (Associação de Professores de Matemática) (Ed.). (2000). *Investigações matemáticas na sala de aula: Propostas de trabalho (números, funções e geometria)*. Lisboa: APM.

Bakthin, M. (1999). The problem of speech genres. Em C. Emerson & M. Holquist (Eds.), *Speech genres & other later essays* (pp. 60-102). Austin: University of Texas Press.

Balacheff, N. (1991a). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. Em E. vonGlasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1991b). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. Em A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. vanDormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1999). *L' argumentation est-elle un obstacle? Invitation à un débat...* Retirado a 23 de Fevereiro de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Bardin, L. (1997). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bednarz, N. (1998). Evolution of classroom culture in mathematics, teacher education, and reflection on action. Em F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 50-75). Cambridge: Cambridge University Press.

Bednarz, N., Desgagné, S., Couture, C., Lebuis, P., & Poirier, L. (1999, Maio*).* *Collaborative case studies: A framework for collaboraborative research involving teachers and researchers*. Comunicação apresentada no encontro A Thematic Network of Teacher Education in Europe - Network F, Lisboa, Portugal.

Blond, J., & Webb, K. (1997). Practitioner and researcher perspectives in teacher research and the construction of knowledge. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 83-103). New York: State University of New York Press.

Boavida, A. M. (1993). *Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores* (Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, *63*, 11-15.

Boero, P. (1999). *Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matemattica e nella didattica della matemattica*. Retirado a 23 de Fevereiro de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational studies in Mathematics*, *17* (2), 125-141.

Breen, C. (2003). Mathematics teachers as researchers: Living on the edge? Em A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 523-544). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Bruner, J. (1997). *Actos de significado. Para uma psicologia cultural*. Lisboa: Edições 70.

Bussi, M. G. (1998). Joint activity in mathematics classroom: A vygotskian analysis. Em F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 13-49). Cambridge: Cambridge University Press.

Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1998a). *Significado e aprendizagem da Matemática: Dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Carreira, S. (1998b). Do triângulo ao trapézio semiótico: Uma análise do pensamento metafórico em problemas de aplicação da Matemática. *Quadrante*, *7*(1), 33-54.

Carrilho, M. M. (1992). Argumentação e contexto. *Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades*, *5*, 21-37.

Castle, J. (1997). Rethinking mutual goals in school-university collaboration. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 59-67). New York: State University of New York Press.

Chapin, C. (1998). Mathematical investigations: Powerful learning situations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 332-338.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Chazan, D., & Ball, D. (1999). Beyond being told not to tell. *For the Learning of Mathematics*, *19*(2), 2-10.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Christiansen, H., & Devitt, J. (1997). Collaborative conversations at the university: Creating a pedagogical space. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 167-179). New York: State University of New York Press.

Christiansen, H., Goulet, L., Krentz, C., & Maeers, M. (1997b). Making the connections. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 283-292). New York: State University of New York Press.

Christiansen, H., Goulet, L., Krentz, C., & Maeers, M. (Eds.). (1997a). *Recreating relationships: Collaboration and educational reform*. New York: State University of New York Press.

Christiansen, I. (1999). Are theories in mathematics education of any use to practice? *For the Learning of Mathematics, 19*(1), 20-23.

Clandinin, D. J., & Connely, F. (1994). Personal experience methods. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 413-427). London: Sage.

Clark, C., Moss, P., Goering, S., Herter, R., Lamar, B., Leonard, D., Robbins, S., Russell, M., Templin, M., & Wascha, K. (1996). Collaboration as dialogue: Teachers and researchers engaged in conversation and professional development. *American Educational Research Journal, 33*(1), 193-231.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspectives of the mathematics classroom. Em F. Seeger, J. Voigt, & U. Wascheschio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge: Cambridge University Press.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood , T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 99-122.

Coelho, F. (1999). Prefácio à edição brasileira da obra de C. Perelman, & L. Olbrechts-Tyteca *Tratado da argumentação: A nova retórica* (pp. xi-xxi). São Paulo: Martins Fontes.

Creswell, J. (2002). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Upper Saddle River, NJ: Merrill, Prentice Hall.

Cunha, M. H. (1998). *Saberes profissionais de professores de Matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 355-376.

Day, C. (1991). Roles and relationships in qualitative research on teachers' thinking: A reconsideration. *Teaching & Teacher Education, 7*(5/6), 537-546.

Day, C. (1999). *Developing teachers: The challenges of lifelong learning*. London: Falmer Press.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora, Lda.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). London: Sage.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2000). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-28). London: Sage.

Douek, N. (1998). *Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications*. Comunicação apresentada na CERME-I Conference, Osnabrueck, Alemanha.

Douek, N. (1999). *Argumentative aspects of proving of some undergraduate mathematics students' performances*. Retirado a 8 de Março de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Douek, N. (2000). *Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective*. Retirado a 23 de Fevereiro de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Drake, S., & Basaraba, J. (1997). School-university research partnership: Em search of the essence. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 209-218). New York: State University of New York Press.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x, 31*, 37-61.

Duval, R. (1999). *L' argumentation en question*. Retirado a 23 de Fevereiro de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Erickson, F. (1989). Research currents: Learning and collaboration in teaching. *Language Arts*, *66*(4), 430-441.

Erlandson, D., Harris, E., Skipper, B., & Allen, S. (1993). *Doing naturalistic inquiry: A guide to methods*. London: Sage.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hampshire: The Falmer Press.

Esteves, A. (1986). A investigação-acção. Em A. Santos Silva & J. Madureira Pinto (Eds.), *Metodologia das ciências sociais* (pp. 251-278). Porto: Edições Afrontamento.

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? Em M. Borba & J. Araújo (Eds.), *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática* (pp. 47-76). Belo Horizonte: Autêntica.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: The art of science. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 361-376). London: Sage.

Forman, E. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Forman, E., & Ansell, E. (2001). The multiple voices of a mathematics classroom community. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 115-142.

Forman, E., Dawn, M., & Donato, R. (1998). Learning what counts as a mathematical explanation. *Linguistics and Education*, *9*(4), 313-339.

Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8*, 527-548.

Freire, P. (1975). *Pedagogia do oprimido*. Porto: Afrontamento.

Friesen, D. (1997). The meaning of collaboration: Redefining pedagogical relationships in students teaching. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 219-231). New York: State University of New York Press.

Gimeno, J. S. (2000). O currículo: Os conteúdos do ensino ou uma análise prática? Em J. G. Sacristán & A. P. Gómez (Eds.), *Compreender e transformar o ensino* (pp. 119-148). Porto Alegre: Artmed.

Goodson, I. (1993). The devil's bargain: Educational research and the teacher. *Education Policy Analysis Archives*, *1*(3), 1-21.

Goulet, L., & Aubichon, B. (1997). Learning collaboration: Research in a First Nations Teacher Education Program. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 115-127). New York: State University of New York Press.

Grácio, R. (1992). Nova retórica e tradição filosófica. *Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades*, *5*, 55-69.

Grácio, R. (1993a). Introdução à tradução portuguesa da obra de C. Perelman, *O império retórico: Retórica e argumentação* (pp. 5-11). Porto: Edições ASA.

Grácio, R. (1993b). *Racionalidade argumentativa*. Porto: Edições ASA.

Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 105-117). London: Sage.

Guimarães, F. (1996). *O conhecimento profissional do professor de Matemática: Dois estudos de caso* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Guimarães, F. (2004). *O desenvolvimento de uma professora de Matemática do ensino básico: Uma história de vida*. Tese de doutoramento não publicada. Lisboa: Universidade de Lisboa, Portugal.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática: Um estudo com matemáticos e professores do Ensino Básico e Secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Hanna, G. (1996). *The ongoing value of proof*. Em Puig, L. & Guitiérrez (Ed.). *Actas da 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 21-34). Valência.

Hanna, G. (2002). Proof and its classroom role: A survey. Em Saraiva, M. J., Coelho, M. I., & Matos, J. M. (Org.), *Ensino e aprendizagem em Geometria* (pp. 877-908). Porto: Secção de educação e matemática/Sociedade Portuguesa de Ciências de educação.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. Em A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). London: Kluwer Academic Press.

Hargreaves, A. (1998a). *Os professores em tempos de mudança*. Lisboa: Mc Graw-Hill.

Hargreaves, A. (1998b). The emotions of teaching and educational change. Em A. Hargreaves, A. Lieberman, & M. Fullan, & D. Hopkins (Eds.), *International handbook of educational change* (pp. 555-575). London: Kluwer Academic Publishers.

Heaton, R. (2000). *Teaching mathematics to the New Standards: Relearning the dance*. New York: Teachers College Press.

Herbst, P. (1998). *What works as proof in the mathematics class?*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade de Georgia, Athens, EUA.

Herbst, P. (1999). *The role of the teacher: What do the practices associated with two-column proofs say about the possibilities for argumentation?* Retirado a 15 de Janeiro de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Herbst, P. (2000). *Prouver et enseigner la démonstration dans la classe de mathématiques aux Etats-Unis*. Retirado a 12 de Março de 2001 de http://www-didactique.imag.fr

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double blind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 176-203.

Herbst, P. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal*, *40*(1), 197-238.

Heron, J., & Reason, P. (1997). A participatory inquiry paradigm. *Qualitative inquiry*, *3*(3), 274-294.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics really?* Oxford: Oxford University Press.

Hookey, M., Neal, S., & Donoahue, Z. (1997). Negotiating collaboration for professional growth: A case of consultation. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 69-81). New York: State University of New York Press.

Huberman, M., & Miles, M. (1994). Data management e analysis methods. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). London: Sage.

Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. *British Journal of In-service Education*, *19*, 37-41.

Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: Teachers, teacher-educators, and researchers as co-learners. Em F. L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 295-320). London: Kluwer Academic Publishers.

Johnson, D. (1982). *Every minute counts: Making your math class work*. Palo Alto: Dale Seymour Publications.

John-Steiner, V., Weber, R., & Minnis, M. (1998). The challenge of studying collaboration. *American Educational Research Journal*, *35*(4), 773-783.

Johnstone, J. H. W. (1992). Algumas reflexões sobre argumentação. *Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades*, *5*, 39-53.

Kapuscinski, P. (1997). The collaborative lens: A new look at an old research study. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 3-12). New York: State University of New York Press.

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving discourses in mathematics classrooms. Em G. Tőrner, R. Bruder, A. Peter-Koop, N. Neill, H. Weigand, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries.* (pp. 73-84). Ludwigsburg: Verlag Franzbecker, Hildesheim.

Kozolanka, K., & Horwood, B. (1997). Mentoring as collaboration: Shaping an academic life. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 191-204). New York: State University of New York Press.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Em P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. Em H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 223-234). Reston, VA: NCTM.

Kuhn, T. (1970). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing.* London: Sage.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

Lampert, M. (1988). *Teachers' thinking about students' thinking about geometry: The effects of new teaching tools* (Relatório técnico). Cambridge: Harvard Graduate School of Education.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Lampert, M. (2000). Foreward à obra de R. Heaton, *Teaching mathematics to the New Standards: Relearning the dance* (pp. ix-xi). New York: Teachers College Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 237- 249). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lampert, M., Rittenhouse, P., & Crumbaugh, C. (1998). Agreeing to disagree: Developing sociable mathematical discourse. Em R. D. Olson & N. Torrance (Eds.), *Handbook of education and human development* (pp. 731-764). Oxford: Blackwell.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripherical participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lessard-Hérbert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lincoln, Y., & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. London: Sage.

Lincoln, Y., & Guba, E. (2000). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 163-188). London: Sage.

Lytle, S., & Cochran-Smith, M. (1990). Learning from teacher research: A working typology. *Teachers College Record*, *92*(1), 83-105.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1984). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

McCracken, G. (1988). *The long interview*. London: Sage.

Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative data analysis*. London: Sage.

Ministério da Educação. (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação Básica.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (Ed.). (1991). *Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE. (trabalho original em inglês publicado em 1989).

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (Ed.). (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (trabalho original em inglês publicado em 1991).

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (Ed.). (2000). *Standards 2000 - Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

O' Connor, M. C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, *46*, 143-185.

O' Connor, M. C., & Michaels, S. (1993). Aligning academic task and participating status through revoicing: Analysis of a classroom discourse strategy. *Anthropology and Education Quarterly*, *24*(4), 318-335.

O' Connor, M. C., & Michaels, S. (1996). Shifting participant frameworks: Orchestrating thinking practices in group discussion. Em D. Hicks (Ed.), *Discourse, learning and schooling* (pp. 63-103). New York: Cambridge University Press.

Oléron, P. (1996). *L' argumentation*. Paris: Presses Universitaires de France.

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Olson, M. (1997). Collaboration: An epistemological shift. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 13-25). New York: State University of New York Press.

Orr, J. (1997). The same but different: Classroom-based collaborative research and the work of the classrooms. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 247-262). New York: State University of New York Press.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. London: Sage.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Tese de doutoramento não publicada. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/Université de Genova, Itália.

Pedemonte, B. (2003, Fevereiro/Março). *What kind of proof can be constructed following an abdutive argumentation?*. Comunicação apresentada na Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Itália.

Perelman, C. (1987). *Argumentação*. Em Enciclopédia Einaudi (Vol. 11, pp. 234-265). Lisboa: Imprensa Nacional.

Perelman, C. (1992). Lógica formal e lógica informal. *Caderno de Filosofias: Argumentação, Retórica, Racionalidades*, *5,* 11-20.

Perelman, C. (1993). *O império retórico: Retórica e argumentação*. Porto: Edições ASA.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1999). *Tratado da argumentação: A nova retórica*. São Paulo: Martins Fontes.

Pérez, G. A. (1992). O pensamento prático do professor: A formação do professor como profissional reflexivo. Em A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 93-114). Lisboa: Publicações Dom Quixote & Instituto de Inovação Educacional.

Perrenoud, P. (2001). *Ensinar: Agir na urgência, decidir na incerteza*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. London: Routledge & Kegan Paul.

Plantin, C. (1990). *Essais sur l' argumentation. Introduction linguistique a l'étude de la parole argumentative*. Paris: Éditions Kimé.

Pólya, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Paris: Dunod.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning*. New Jersey: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, *2*, 93-169.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Departamento de Ensino Básico.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L. C., Canavarro, P., & Abrantes, P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de Matemática: Relatório final do projecto "O saber dos professores — concepções e práticas"*. Lisboa: DEFCUL.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, M. H., & Segurado, M. I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Segurado, I., & Oliveira, H. (2003). What happens when pupils work on mathematical investigations? Em A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Working towards a common goal: Collaborative paths in mathematics teacher education* (pp. 85-97). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Putnam, R., Lampert, M., & Peterson, P. (1990). Alternative perspectives on knowing mathematics in elementary schools. Em C. Cazden (Ed*.), Review of Research in Education 16* (pp. 57-150). Washington, DC: American Education Research Association.

Ramalho, G., (coordenador). (2002). PISA 2000 — *Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses*. Lisboa: Ministério da Educação/Gave.

Reason, P. (1988b). Introduction. Em P. Reason (Ed.), *Human inquiry in action. Developments in new paradigm research* (pp. 1-17). London: Sage.

Reason, P. (1988c). The co-operative inquiry group. Em P. Reason (Ed.), *Human inquiry in action. Developments in new paradigm research* (pp. 18-38). London: Sage.

Reason, P. (1994). Three approaches to participative inquiry. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 324-339). London: Sage.

Reason, P. (Ed.). (1988a). *Human inquiry in action. Developments in new paradigm research.* London: Sage.

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: APM.

Saraiva, M. (2001). *O conhecimento e o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática: Um projecto colaborativo* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: APM.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions*. São Francisco: Jossey Bass.

Schön, D. (1991). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.

Schroeder, D., & Webb, K. (1997). Between two worlds: University expectations and collaborative research realities. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships: Collaboration and educational reform* (pp. 233-246). New York: State University of New York Press.

Segurado, I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Seidman, I. (1998). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in education and social sciences*. London: Teacher College Press.

Sekiguchi, Y. (2000). *Mathematical proof, argumentation, and classroom communication: A Japanese perspective*. Retirado a 23 de Fevereiro de 2000 de http://www-cabri.imag.fr/preuve

Serrazina, M. L. (1998). *Teachers' professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal* (Tese de doutoramento, Kings's College London School of Education) Lisboa: APM.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(3), 205-233.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interaccionism. Em H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska. (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skovsmose, O. (2000). Cenários de investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Stake, R. (1994). Case studies. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.

Stein, M. K. (2001). Mathematical argumentation: Putting umph into classroom discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*(2), 110-112.

Stewart, H. (1997). Metaphors of interrelatedness: Principles of collaboration. Em H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, & M. Maeers (Eds.), *Recreating relationships:*

Collaboration and educational reform (pp. 27-53). New York: State University of New York Press.

Strom, D., Kemeny, V., Lehrer, R., & Forman, E. (2001). Visualizing the emergent structure of children's mathematical argument. *Cognitive Science*, *25*, 733-773.

Tardif, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Thom, R. (1973). Modern Mathematics: Does it exist? Em A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematics Education* (pp. 194-209). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Thurston, W. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-37.

Toulmin, S. (1993). *Les usages de l'argumentation*. Paris: PUF.

Tymoczko, T. (Ed.). (1986). *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Vala, V. (1986). A análise de conteúdo. Em A. Santos Silva & J. M. Pinto (Eds.), *Metodologia das ciências sociais* (pp. 101-128). Porto: Edições Afrontamento.

Vasconcelos, T. (1997). *Ao redor da mesa grande: A prática educativa de Ana*. Porto: Porto Editora.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Wagner, J. (1997). The unavoidable intervention of Educational Research: A framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation. *Educational Researcher*, *26*(7), 13-22.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action.* London: Harvester Wheatsheaf.

Wheatley, M. (1992). *Leadership and the new science*. San Francisco: Berret-Koehler.

Whitenack, J., & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and students' nathematical learning: a case for coordinating interpretative lenses. *Journal of Mathematical Behaviour*, *21*, 441-457.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in a mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Yackel, E. (1997, Março). *Explanation as an interactive accomplishement: A case study of one second-grade mathematics classroom*. Comunicação apresentada na AERA 1997 annual meeting, Chicago, EUA.

Yackel, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Em M. Heuvel-Panhuizen (Ed.). *Actas da 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-24). Utrecht: Utrecht University.

Yackel, E. (2002a). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behaviour*, *21*, 423-440.

Yackel, E. (2002b). A framework for analyzing teaching: A review of Teaching problems and the problems of teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 64- 68.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of young children's understanding mathematical argumentation*. Comunicação apresentada no AERA 1994 annual meeting, New Orleans, EUA.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458 - 477.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. Em J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.*), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227- 236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yackel, E., Cobb, P., & Wood, T. (1999). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: An illustrative example. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(4), 469-488.

Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behaviour*, *19*, 275-287.

Yin, R. (2003). *Case study research: Design and methods*. London: Sage.

Anexos

Anexo 1 — Calendário de recolha de dados

Encontros

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Fases</th><th rowspan="2">Etapas</th><th rowspan="2">Sessões de trabalho (ST)</th><th colspan="2">Aulas</th><th colspan="2">Entrevistas (E)</th></tr>
<tr><th>Anita</th><th>Rebeca</th><th>Anita</th><th>Rebeca</th></tr>
<tr><td>Fundação do grupo de pesquisa</td><td>Fase 0</td><td>Conversa inicial com as professoras
9/11/01</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">Desenvolvimento do projecto de investigação colaborativa</td><td rowspan="4">Primeira fase
2001/2002</td><td>1ª etapa
16/11/01 a 26/11/01</td><td>ST 1</td><td></td><td></td><td>E1
23/11/01</td><td>E1
23/11/01</td></tr>
<tr><td>2ª etapa
27/11/01 a 22/2/02</td><td>ST 2
a
ST 11</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3ª etapa
23/2/02 a 4/7/02</td><td>ST 12
a
ST 28</td><td>• 14/3/02
• 9/4/02
• 11/4/02
• 16/5/02
• 21/5/02
• 11/6/02
• 13/6/02</td><td>• 04/3/02 (D)
• 10/4/02 (T)
• 11/4/02 (T)
• 15/4/02
• 17/4/02 (T)
• 18/4/02 (T)
• 22/4/02
• 13/5/02
• 20/5/02 (D)
• 27/5/02 (D)
• 28/5/02</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4ª etapa
5/7/02 e 1/8/02</td><td>ST 29
e
ST 30</td><td></td><td></td><td>E2
22/7/02</td><td>E2
19/7/02</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Segunda fase
2002/2003</td><td>1ª etapa
30/8/02 a 28/9/02</td><td>ST 31
a
ST 35</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2ª etapa
10/10/02 a 31/3/03</td><td>ST 36
a
ST 42</td><td>• 17/10/02
• 31/10/02
• 13/1/03
• 16/1/03
• 20/1/03</td><td>• 17/10/02
• 21/10/02
• 24/10/02
• 7/11/02
• 23/1/03</td><td>E3
18/3/03</td><td>E3
12/3/03</td></tr>
<tr><td>3ª etapa
1/4/03 a 4/8/03</td><td></td><td>• 29/5/03</td><td>• 22/5/03</td><td>E4
31/7/03</td><td>E4
4/8/03</td></tr>
<tr><td colspan="3">Totais</td><td>42</td><td>13</td><td>17</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

Legenda: D - Aula dupla; T - Aula de turnos; ST: Sessões de trabalho do grupo de pesquisa

Documentos DEA e DER

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Anita: DEA</th><th>Rebeca: DER</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Durante o desenvolvimento do projecto</td><td>Primeira fase</td><td>1/8/02</td><td>19/7/02</td></tr>
<tr><td>Segunda fase</td><td>25/2/03
18/3/03
13/4/03
23/4/04</td><td>25/2/03
18/3/03
19/3/03</td></tr>
<tr><td>Após a conclusão do projecto</td><td></td><td>28/9/03
10/11/03</td><td>28/10/03</td></tr>
</table>

Anexo 2 — Codificação de documentos do *corpus* e critérios adoptados para referenciar os extractos incluídos no texto analítico

<table>
<tr><th></th><th>Documentos</th><th>Código</th><th colspan="2">Critérios para referência</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sessões de trabalho</td><td>Memorando</td><td>MST</td><td>A sigla MST é seguida do número da sessão de trabalho a que corresponde o memorando e da(s) página(s) correspondente(s) ao extracto incluído no texto.</td><td rowspan="3">Na primeira referência ao documento num capítulo, a indicação da(s) página(s) é seguida da data do encontro que o originou.</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td><td>TST</td><td>A sigla TST é seguida do número da sessão de trabalho que originou o documento constituído pela transcrição/resumo da gravação do encontro. Justapõe-se a(s) página(s) correspondente(s) ao extracto incluído no texto.</td></tr>
<tr><td>Entrevistas</td><td>Transcrição</td><td>E#</td><td>O símbolo # representa um número entre 1 e 4. O conjunto formado por E e numeral designa o documento oriundo da transcrição integral da gravação de cada uma das quatro entrevistas feitas a cada professora que foram ordenadas por data de realização. À sigla E# justapõe-se a(s) página(s) correspondente(s) ao extracto incluído no texto; se necessário para evitar ambiguidades incluir o nome da professora.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aulas</td><td>Tarefas</td><td>—</td><td colspan="2">Cada tarefa é identificada através do título adoptado ou criado pelo grupo de pesquisa.</td></tr>
<tr><td>Relatório de observação</td><td>ROA</td><td colspan="2">A sigla ROA é seguida da data de leccionação da aula que originou o relatório e da(s) página(s) correspondente(s) ao extracto incluído no texto.</td></tr>
<tr><td>Transcrição</td><td>TA</td><td colspan="2">À sigla TA justapõe-se a data de leccionação da aula e a(s) página(s) do documento constituído a partir da transcrição/resumo das suas gravações em áudio e vídeo em que está o extracto incluído no texto.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Outros documentos</td><td>Elaborado por Anita</td><td>DEA</td><td colspan="2">Documento escrito elaborado por Anita a meu pedido ou por sua iniciativa que constitui uma descrição/reflexão relativa a aspectos da sua actividade ou da da colega. À sigla justapõe-se a data de elaboração do documento e a(s) página(s) correspondente(s) ao extracto incluído no texto.</td></tr>
<tr><td>Elaborado por Rebeca</td><td>DER</td><td colspan="2">Idem, para os documentos escritos elaborados por Rebeca.</td></tr>
</table>

Anexo 3 — Quadro orientador da análise

A argumentação na aula de Matemática: Trabalho do professor

<table>
<tr><td>Preparação</td><td colspan="2">Percepção do enquadramento da argumentação matemática no currículo
Preparação orientada para o envolvimento dos alunos em argumentação matemática: vertentes da preparação e aspectos relevantes para a emergência de argumentação matemática</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Argumentação matemática em acção</td><td>Negociação de significados</td><td>Conjectura, contra-exemplo e prova
Processos de negociação</td></tr>
<tr><td>Apoio à formulação e avaliação de conjecturas</td><td>Incentivo e apoio à formulação
Organização da partilha de conjecturas
Processos de avaliação de conjecturas
Conjecturas formuladas versus refutadas ou propostas para prova da veracidade</td></tr>
<tr><td>Ensino do discurso de prova: Prova de conjecturas não refutadas</td><td>Emergência da prova
Papel atribuído à prova
Processo de produção da prova</td></tr>
<tr><td>Emergência e exploração de situações de desacordo</td><td>Existência e legitimação da situação
Emergência do desacordo: origem e conteúdo
Resolução: grau e processo
Potencialidades, riscos e cuidados</td></tr>
<tr><td>Constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático</td><td>Ambiente de trabalho: Características gerais
Padrões de interacção: Tipo e destaque
Elicitação de contribuições dos alunos: Meios e trabalho subsequente
Poder avaliativo, controle do discurso e liderança das situações didácticas: detenção e partilha
Normas reguladoras da actividade: processos de negociação e importância atribuída
Discussões colectivas: Contornos e aspectos relevantes</td></tr>
<tr><td>Desafios</td><td colspan="2">Problemas experienciados: identificação, origem e principal incidência
Modos de lidar com os problemas
Articulação entre problemas
Persistência</td></tr>
</table>

O trabalho no grupo de pesquisa: Concepção e desenvolvimento do projecto

Concepção e negociação do projecto	Planos de trabalho Fundamentação Processo de negociação: principais características
Desenvolvimento do projecto	Campos de colaboração Actividades: tipos, articulação e concretização Relação de colaboração: natureza e factores de influência Mais-valias para as professoras Aspectos facilitadores do desenvolvimento do projecto Aspectos problemáticos Perspectivas sobre a experiência de participação no projecto

Anexo 4 — Primeira entrevista: Tópicos de conversa

Percurso profissional e relação com a profissão

- Ingresso na profissão, tempo de experiência profissional, conteúdo da experiência, envolvimento em actividades extra-lectivas.
- O que entusiasma/dá gosto em termos profissionais?
- O dá menos prazer/ menos gosto /é mais difícil fazer, em termos profissionais?
- Ser bom professor de Matemática, ser bom aluno de Matemática, é...
- Relação com a Matemática.

Envolvimento no projecto de investigação colaborativa

- Não houve hesitações quanto ao envolvimento no projecto... O que levou a esse envolvimento? Expectativas?

Perspectivas sobre argumentação/ argumentação matemática

- Quando apresentei o tema do projecto, a que associaste *argumentação* /*argumentação matemática*? O que te ocorreu ao ouvires-me falar no tema?
- Pensar em *argumentação matemática*, *argumentação na aula de Matemática*. Evocar a experiência enquanto aluna. Recordações/ episódio/ história, relacionados com estas ideias?

Perspectivas sobre o ensino da argumentação matemática

- Na primeira conversa sobre o projecto foi visível o teu interesse pelo tema da argumentação matemática e a preocupação dos alunos aprenderem a argumentar matematicamente. De que modo esta preocupação tem tido expressão na sala de aula? Questões que têm surgido...
- O que pode facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática? O que o pode dificultar?

Anexo 5 — Segunda entrevista: Tópicos de conversa

Trabalho orientado para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática

- Aspectos/factores considerados importantes para o sucesso de uma aula perspectivada para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Cuidados a ter quando se pretendem envolver os alunos em actividades deste tipo.
- Dúvidas/dificuldades/problemas sentidos durante o desenvolvimento do projecto, relacionados com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática. Modos/estratégias adoptadas para lidar estas questões. Questões consideradas ultrapassadas. O que contribuiu para que o fossem? Questões que permanecem.
- Evocar o início do projecto. Reflectir sobre a existência, ou não, de diferenças/mudanças quanto ao significado atribuído a argumentação matemática e quanto a aspectos que importa ter em conta quando se pretendem envolver os alunos em actividades deste tipo.

O projecto e seu desenvolvimento

- Reflectir sobre a experiência de participação no projecto. O que representou a experiência? Trouxe, ou não, mais-valias? Se sim, quais? O que facilitou que surgissem? Reflexos no modo futuro de estar na profissão? Se sim, em que sentido?
- Aspectos relacionados com o desenvolvimento do projecto que se destacam pela positiva ou pela negativa. Dificuldades/problemas experienciados ao longo da participação no projecto. O que facilitou/dificultou o desenvolvimento do projecto?

Continuação do projecto

- Expectativas para o trabalho futuro.
- Constrangimentos existentes ou que poderão vir a existir

Anexo 6 — Terceira entrevista: Tópicos de conversa[83]

Objectivo: Reflectir sobre o trabalho realizado no âmbito do desenvolvimento do projecto considerando quatro campos interligados:

1. O trabalho realizado em 2002/2003 relacionado com a preparação, leccionação e reflexão sobre aulas em que se considerou poderem ocorrer episódios significativos de argumentação matemática
2. A divulgação do trabalho realizado
3. A globalidade do trabalho realizado no âmbito do projecto
4. O trabalho colaborativo: Natureza, potencialidades e dificuldades

1. Trabalho realizado em 2002/2003
    - No que se prende com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, reflectir sobre alterações e mudanças significativas que surgiram na sala de aula da turma envolvida no projecto, em 2002/2003.
    - Relativamente ao trabalho do professor mais directamente relacionado com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, houve ideias que ganharam força com o trabalho desenvolvido em 2002/2003? Surgiram novas ideias que podem iluminar a compreensão de alguma das vertentes deste trabalho?
2. Divulgação do trabalho realizado: Grupo de discussão no ProfMat e escrita do artigo
    - Reflectir sobre o que representou, em termos pessoais e profissionais, o processo de preparação e a concretização de cada um destes trabalhos.
3. A globalidade do trabalho realizado no âmbito do projecto
    - Recorda as expectativas iniciais que tinhas quando decidiste aderir ao projecto de colaboração. O trabalho desenvolvido até ao momento no âmbito do projecto correspondeu a essas expectativas, superou-as ou ficou aquém delas?

[83] Exceptuando a primeira linha deste documento relativa à identificação do anexo, o restante conteúdo corresponde ao texto que enviei a Anita e Rebeca previamente à data de realização da entrevista.

- Recorda as perspectivas que tinhas no início do projecto sobre o significado de argumentação matemática, sobre os factores que poderiam, do teu ponto de vista, contribuir para o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e sobre o trabalho do professor relacionado com este envolvimento. Compara estas perspectivas com as que tens actualmente sobre os mesmos aspectos. Há transformações nestas perspectivas? Se sim, que relações estabeleces entre essas transformações e o percurso feito no âmbito do desenvolvimento do projecto?
- Que processos tens usado para negociar, na sala de aula, normas sociais e sócio-matemáticas que consideras poderem facilitar o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática?
- O trabalho realizado no âmbito do projecto de colaboração introduziu mudanças nos teus modos de ver e de estar na profissão?

4. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento do projecto

- Que factores consideras terem influenciado o desenvolvimento do trabalho em colaboração que desenvolvemos? O que o facilitou? O que o enriqueceu? Quais as maiores fontes de satisfação? Quais as maiores dificuldades e vulnerabilidades que experienciaste?

Trabalho a desenvolver futuramente

- Perspectivas sobre o trabalho a desenvolver até ao final do ano lectivo 2002/2003 no âmbito do projecto.

Anexo 7 — Quarta entrevista: Tópicos de conversa[84]

Aula gravada em Maio de 2003

Na origem da sugestão de gravar esta aula esteve a convicção de que nela poderiam surgir momentos em que os alunos se envolveriam em actividades significativas de argumentação matemática. Reflectir sobre:

- potencialidades da aula no que se prende com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação
- o tipo de trabalho realizado, antes *(preparação)* e durante a aula, para que pudessem surgir estas actividades e para promover, facilitar e apoiar o envolvimento dos alunos
- problemas surgidos, estratégias adoptadas para lidar com os problemas e satisfações/insatisfações decorrentes do trabalho realizado.

Trabalho de preparação das aulas

- Trabalho habitualmente feito e trabalho realizado quando, deliberadamente, se escolhem tarefas que potencialmente se consideram poder originar boas actividades de argumentação matemática: Diferenças ou não? Quais? Porquê?

Trabalho relacionado com a emergência e resolução de desacordos na aula

- Potencialidades e riscos?
- O que facilita a emergência de desacordos?
- Aspectos importantes do trabalho a realizar na sequência da constatação de um desacordo e cuidados a ter.

Envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática e trabalho do professor

a) Ver o passado com os olhos do presente

- Anteriormente à entrevista: Recordar a aula em que foi explorada ou a tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?* (no caso de Anita) ou a tarefa *Números em Círculos* (no caso de Rebeca); analisar as normas que parecem regular o seu funcionamento e o trabalho

[84] Exceptuando a primeira linha deste documento relativa à identificação do anexo, o restante conteúdo corresponde ao texto que enviei a Anita e Rebeca previamente à data de realização da entrevista.

realizado para tentar envolver os alunos em actividades de argumentação matemática.

- Se se pudesse voltar atrás no tempo e se pretendesse ir criando condições necessárias e facilitadoras do envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática, o que seria de manter nessa aula? O que seria de alterar? Dos problemas sentidos na aula, quais se mantêm no presente? Como se pensa, em termos de futuro, lidar com esses problemas?

b) Ver o futuro à luz do presente

- Tendo em conta a experiência vivida no âmbito do projecto, identificar aspectos relevantes do trabalho a realizar, no futuro, com uma nova turma de modo a conseguir que todos os alunos se envolvam em actividades significativas de argumentação matemática.

Perspectivas sobre a escola e a turma envolvida no projecto

- Escola: Dimensão, recursos, ambiente de trabalho (geral e no grupo de matemática), ...
- Turma: Tipo de turma, número de alunos, características particulares dos alunos, ...

Anexo 8 — Plano de trabalho negociado com Anita e Rebeca para a primeira fase do projecto de investigação colaborativa: 2001/2002[85]

1. Etapas

Primeira etapa: O ponto de partida (de 12 a 25 de Novembro 01)

- Negociação do projecto.
- Entrevistas individuais focadas nos significados e papéis atribuídos à actividade de argumentação na aula de Matemática, tendo por contexto a experiência enquanto aluna e enquanto professora.

Segunda etapa: Período de construção de uma linguagem e referencial comuns e de conhecimento recíproco (de 26 Novembro 01 a 27 de Janeiro 02)

- Reflexão sobre transcrições de diálogos de sala de aula de Matemática, seleccionados por Ana, de modo a identificar e analisar episódios de argumentação matemática.
- Análise de episódios de argumentação matemática, a partir do registo em vídeo de uma aula de uma das professoras. A aula será escolhida pela docente que a lecciona e a gravação, se o desejar, poderá ficar a seu cargo ou a cargo de qualquer outra pessoa com quem se sinta à-vontade, nomeadamente da colega. A reflexão sobre os episódios será feita no grupo.
- Selecção, por Anita e Rebeca, de um/dois episódios de argumentação matemática, ocorridos nas suas aulas, que considerem particularmente significativos. Narrativa oral dos episódios numa das sessões de trabalho; transcrição da narrativa feita por Ana, envio do documento resultante a Anita e Rebeca e posterior análise no grupo.
- Organização e constituição progressiva de um dossier de textos teóricos e outros materiais (nomeadamente tarefas) potencialmente úteis à análise e discussão do tema *argumentação na aula de Matemática* ou temas próximos deste (ex: dinâmica da aula de Matemática, o discurso na aula de Matemática, etc). Este dossier, iniciado no começo do projecto, constituirá um recurso que poderá ajudar a reflectir sobre questões oriundas da análise de diálogos, de episódios e das prática, pelo que se prevê a possibilidade de discutir, em grupo, alguns dos materiais nele incluídos.
- Estabelecimento de acordos para nova etapa de trabalho

Nota1: A discussão de materiais incluídos no dossier pode percorrer as etapas 2 e 3, de acordo com interesses manifestados e necessidades sentidas.

[85] O anexo 8 é uma adaptação pontual do documento referente ao plano de trabalho acordado com as professoras para a primeira fase do projecto de investigação colaborativa e que lhes foi entregue no segundo encontro do grupo de pesquisa. Os seus nomes foram substituídos pelos pseudónimos que escolheram, sintetizei a calendarização do trabalho, mas não alterei a previsão que na altura fizemos, e mantive o conteúdo dos restantes itens. Sublinho que esta calendarização não traduz inteiramente os momentos em que se localizaram as diversas actividades que desenvolvemos devido às constantes negociações que atravessaram o projecto tendo em vista uma melhor adequação do trabalho ao que íamos experienciando.

Terceira etapa: Período de observação de aulas e de análise conjunta de episódios de argumentação matemática aí existentes (de 28 Janeiro a 26 de Maio 02)

- Identificação /selecção/construção conjunta de tarefas potencialmente desencadeadoras de actividades de argumentação matemática, tendo em conta as especificidades das turmas leccionadas por Anita e Rebeca e a sua história.
- Escolha, pelas professoras, de tarefas a explorar nas aulas e discussão de aspectos relativos à preparação das aulas.
- Identificação, pelas professoras, de aulas, em que, potencialmente, ocorrerão episódios de argumentação matemática, tendo em conta a sua planificação do currículo; análise do porquê da "conjectura".
- Observação das aulas em que serão propostas as tarefas seleccionadas e/ou das aulas identificadas pelas professoras, e reflexão conjunta sobre episódios de argumentação matemática aí existentes.

Nota 2: Prever a observação de 2/3 aulas de cada professora anteriormente à observação daquelas em que as primeiras tarefas serão propostas (familiarização dos alunos com a minha presença e com os materiais de gravação).
Nota 3: Prever, para cada professora, 3/4 ciclos de preparação-implementação-reflexão.
Nota 4: Escolher tarefas cuja exploração e discussão seja feita numa aula/aula e meia.

Quarta etapa: Análise da divulgação do trabalho conjunto e reflexão sobre a experiência vivida (última semana de Maio/primeira de Junho 02)

- Análise de processos de divulgação do trabalho conjuntamente desenvolvido no âmbito do projecto (hipóteses: sessão no ProfMat ou outros encontros profissionais; artigo para revista; ...).
- Entrevistas individuais: reflexão sobre o ensino da argumentação matemática e sobre o desenvolvimento do projecto (potencialidades formativas, aspectos positivos e negativos, dificuldades experienciadas, etc.).

2. Organização geral do trabalho

- Sessões de trabalho conjunto, em média semanais, com uma duração aproximada de 2h e a realizar nas terças feiras à tarde a partir das 15h 30m. A data destas sessões poderá ser ajustada de acordo com necessidades surgidas.
- A observação e gravação de aulas relacionadas com a terceira etapa será feita em datas a acordar, tendo em conta propostas de Anita e de Rebeca, bem como o desenvolvimento do trabalho.

3. Calendarização do trabalho e processos de recolha de dados

<table>
<tr><th></th><th>Semanas</th><th>Sessões de trabalho/Actividades</th><th>Recolha de dados</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Novemb.</td><td rowspan="2">2ª e 3ª</td><td>• Negociação do projecto.</td><td>• Notas de campo.</td></tr>
<tr><td>• Entrevistas individuais.</td><td>• Gravação áudio.</td></tr>
<tr><td>4ª</td><td rowspan="3">• Sessões de trabalho relacionadas com a segunda etapa.
• Identificação, narrativa e análise de episódios de argumentação matemática ocorridos em aulas das professoras (Janeiro):
– A partir da 1ª semana: Identificação.
– 2ª semana: Narrativa oral.
– 3ª semana: Entrega da transcrição da narrativa.
– 4ª semana: Partilha de análises individuais; discussão conjunta e re-análise.
• Estabelecimento de acordos para a terceira etapa.</td><td rowspan="11">• Notas de campo.
• Gravação áudio (sessões de trabalho, aulas e entrevistas).
• Gravação vídeo (aulas).</td></tr>
<tr><td>Dezemb.</td><td>1ª a 3ª</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Janeiro</td><td>1ª a 4ª</td></tr>
<tr><td>5ª</td><td rowspan="2">• Sessões de trabalho relacionadas com a terceira etapa.
• Gravação de aulas de familiarização.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fevereiro</td><td>1ª e 3ª</td></tr>
<tr><td>4ª</td><td rowspan="4">• Sessões de trabalho relacionadas com a terceira etapa.
• Gravação, observação e reflexão sobre aulas.</td></tr>
<tr><td>Março</td><td>1ª a 3ª</td></tr>
<tr><td>Abril</td><td>2ª a 5ª</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Maio</td><td>1ª a 3ª</td></tr>
<tr><td>4ª</td><td rowspan="2">• Análise de processos de divulgação do trabalho desenvolvido.
• Entrevistas individuais.</td></tr>
<tr><td>Junho</td><td></td></tr>
</table>

Anexo 9: Levantamento de episódios[86] significativos relacionados com argumentação matemática —uma aula de Rebeca

Aula/	Episódios tipo /pp. transcrições das aulas onde se localizam				
Tarefa	Comunid. discurso (CD)	Desacordos	F. / Ava. Conjecturas	Prova	Outros
28/5/02 Tarefa *Quadrados em Quadrados*	Há vários exemplos de redizer bem como de negociação de normas sociais. São recorrentes os pedidos de explicação e justificação por parte da Rebeca.	• Qual a área de quadrado inscrito na posição 3 num quadrado de lado n? (TA, pp. 3-5). • Os vértices do quadrado inscrito não podem ficar em qualquer ponto do quadrado grande (TA, pp. 11,12). • Desacordo em relação ao número de quadrados ser infinito (TA pp. 12-13). • Desacordo em relação à justificação apresentada (TA, pp. 13, 14).	1) O quadrado inscrito na posição 2 num quadrado de lado n tem área $2^2+(n-2)^2$ (TA, pp. 1,2). 2) A área de um quadrado inscrito na posição 3 num quadrado de lado n é n^2+3^2 (TA, p. 3). 3) O quadrado inscrito na posição p num quadrado de lado n tem área $p^2+(n-p)^2$ (TA, p. 5). 4) Os que quiséssemos (TA, p. 10). 5) Independentemente do tamanho do quadrado exterior podemos inscrever nele infinitos quadrados (TA, p. 12).	Prova de que um quadrado inscrito na posição p num quadrado de lado n tem área $p^2+(n-p)^2$ (TA pp. 7-10).	• A afirmação 1 está provada? (TA, pp. 2,3). • Se se provar que o quadrado inscrito na posição p num quadrado de lado n tem área $p^2+(n-p)^2$.é necessário provar cada uma das conjecturas formuladas para as áreas dos quadrados inscritos num quadrado de lado n nas posições 1, 2, 3, etc? (TA pp. 6,7). • Se não obrigássemos os vértices dos quadrados inscritos a ficarem nos vértices das quadrículas, quantos quadrados poderíamos inscrever num quadrado? (TA, pp. 10-15). a) Justificação (TA, pp. 11,12). b) Justificação de porque são infinitos (TA, pp. 13, 14). c) Nova justificação (TA, p. 14).

86 Considero 5 tipos de episódios de argumentação: (a) os que revelam a preocupação com a constituição de uma comunidade de discurso (CD); (b) os que têm na sua base um desacordo (Desac); (c) os relacionados com a formulação de conjecturas e explicação/justificação da sua plausibilidade e com avaliação/teste de conjecturas (F. / Ava. Conj) (d) os relacionados com prova das conjecturas não refutadas (Prova) e (e) outros episódios significativos que não se enquadram nos anteriores (Outros) (por exemplo, em que há intervenções relacionadas com o clarificar os conceitos de conjectura, contra-exemplo, prova, o valor das conjecturas, ou em que há justificações de conjecturas embora não sejam provas).

Anexo 10 — Projecto de investigação colaborativa — Proposta de continuação no ano lectivo de 2002/2003: Algumas ideias[87]

Pressupostos

1) Disponibilidade de todo o grupo para prosseguir o projecto, pelo menos durante uma parte de 2002/2003, embora Anita e Rebeca sintam que neste ano lectivo há importantes constrangimentos temporais, devido à frequência do Mestrado, que lhes podem dificultar significativamente um envolvimento mais intensivo.
2) Nas entrevistas de Julho foi evidente a valorização, por Anita e Rebeca, do trabalho de reflexão feito no âmbito do projecto sobre algumas das aulas que leccionaram. Ambas esperam que a continuação do projecto inclua esta componente.
3) Fruto de uma decisão tomada na equipa, Anita e Rebeca mantêm as turmas envolvidas no projecto; as aulas a gravar futuramente ocorrerão nestas turmas.
4) Houve tarefas cuja exploração, pelos alunos, foi calendarizada para o final ano lectivo 2001/2002 mas que Anita ou Rebeca não propuseram às turmas devido à existência de aulas previstas mas não leccionadas por motivos que lhes foram alheios — o que introduziu atrasos na planificação feita — ou devido à pouca disponibilidade que pressentiram existir nos alunos que se encontravam sobrecarregados com testes e outros trabalhos de avaliação. Acordámos que estas tarefas seriam propostas, se possível, no início do ano lectivo de 2002/2003 (por exemplo, de *Quadrados de números terminados em 5* no caso de Rebeca e *Quadrados em quadrados* no caso de Anita).
5) Durante as sessões de trabalho localizadas na primeira fase do projecto, Anita e Rebeca foram referindo problemas experienciados ao procurarem envolver os alunos em actividades de argumentação matemática e que consideram ser campos de investimento futuro. Nomeadamente:
   (a) Dedicar uma maior atenção às normas sociais e sociomatemáticas que parecem regular a actividade das suas aulas e ir negociando com os alunos aquelas que parecem facilitar o seu envolvimento em actividades de argumentação matemática.
   (b) Na exploração de tarefas, em particular de carácter investigativo, incluir na fase de discussão com toda a turma, se necessário e adequado, momentos curtos de reflexão/troca de ideias em pares/pequenos grupos após os quais se prosseguirá a discussão. Poderão assim surgir na fase de discussão vários ciclos de discussão — curta reflexão. Esta ideia surge a partir da constatação de que, na fase de discussão de uma tarefa, frequentemente os pares/pequenos grupos que trabalharam em conjunto na sua exploração sentem necessidade, face a ideias e argumentos apresentados por colegas, de trocarem entre si impressões sobre o que ouvem o que os impede de manterem a atenção focada no que está a ser apresentado ou em intervenções da professora. Anita e Rebeca consideram ser importante promover nos alunos a capacidade de escuta relativamente ao discurso dos colegas, o que origina, frequentemente, intervenções da sua parte destinadas a destacar a

[87] O anexo 10 é uma adaptação pontual do documento que elaborei previamente ao início da segunda fase do projecto de investigação colaborativa para negociar com Anita e Rebeca um plano de trabalho para o ano lectivo de 2002/2003. Mantive o conteúdo e introduzi ligeiras alterações de forma. O símbolo *(???)* incluído no texto significa que pretendia analisar com as professoras a viabilidade, vantagens e problemas de prolongarmos o projecto para além da primeira etapa da segunda fase abrandando o ritmo dos encontros. Significa também que, caso optássemos por esta via, tencionava negociar tanto a possibilidade de realizar entrevistas individuais no final desta etapa, como a abertura para que a decisão definitiva sobre a sua realização fosse tomada apenas proximamente a esta altura.

importância de se ouvirem entre si. Por outro lado parece-lhes que estes pequenos momentos de troca de ideias podem facilitar a progressão da discussão.

(c) Investir mais na prova enquanto instrumento de compreensão e não tanto ou apenas de verificação ou convencimento; simultaneamente, encontrar formas de ajudar os alunos a compreenderem as limitações do raciocínio indutivo. Investir neste campo decorre da constatação, por Anita e Rebeca, de que, apesar dos seus esforços em sentido contrário, continua a haver nas turmas envolvidas no projecto alunos cuja convicção sobre a validade de conjectura se funda na sua verificação para um número limitado de casos particulares e, assim, não sentem necessidade de provar conjecturas que formulam.

6) Existe um certo desequilíbrio entre o número de aulas que observei de Anita e de Rebeca; nas aulas gravadas de Anita há, relativamente às de Rebeca, uma menor presença de episódios de argumentação matemática e, consequentemente, foi menor o número de episódios que analisámos nas sessões de trabalho. É importante ultrapassar este desequilíbrio.

Proposta de organização do plano de trabalho para 2002/03

Primeira fase: Setembro a Dezembro 2002

- Negociação do trabalho a realizar no âmbito do projecto durante o ano lectivo de 2002/2003.
- Continuação da preparação do grupo de discussão a realizar no ProfMat.
- Proposta aos alunos das tarefas programadas para o ano lectivo anterior (ponto 4, pressupostos) e gravação destas aulas.
- Gravação de aulas em que Anita ou Rebeca pretendam dedicar uma maior atenção a um dos/aos campos de investimento referidos no pressuposto 5. Está em aberto a possibilidade de surgirem outros campos de investimento. As aulas a gravar poderão incidir também sobre estes campos. Em qualquer dos casos, estas aulas serão indicadas por Anita e Rebeca e a sua preparação poderá ser objecto de reflexão na equipa do projecto.
- Observação/reflexão individual e colectiva sobre cada uma das aulas gravadas tendo como apoio o seu registo em vídeo e o documento relativo à transcrição elaborado pela Ana. Estes materiais serão entregues a Anita e Rebeca previamente à sessão de trabalho dedicada à reflexão sobre a aula.
- Proposta de número de aulas a gravar:

  Anita: 4 Rebeca: 2
- Sessões de trabalho dedicadas à preparação/reflexão sobre as aulas: em média de três em três semanas
- Realização de entrevistas individuais a Anita e Rebeca *(???)*

Segunda fase: De Janeiro 2003 a Maio 2003 (???)

- Identificação, por Anita e Rebeca, de 2 aulas (por cada professora), em que, do seu ponto de vista, poderão ocorrer episódios significativos de argumentação matemática.
- Gravação em vídeo das aulas identificadas e reflexão individual e colectiva tendo como apoio os registos magnéticos e os documentos relativos às transcrições.
- Disponibilizar-me para reflectir com Anita e Rebeca sobre aspectos relativos ao trabalho do professor relacionado com o envolvimento dos alunos em actividades de argumentação matemática quando o considerarem importante.
- Previsão de sessões de trabalho conjuntas: 4
- Entrevistas individuais de reflexão final sobre todo o trabalho desenvolvido no âmbito do projecto.

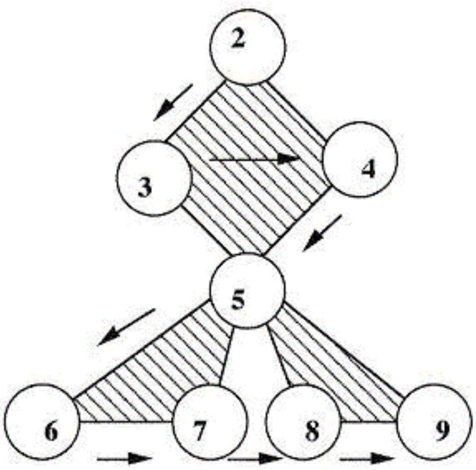
Anexo 11 — Tarefa *Números em Círculos*

(fac-símile da ficha de trabalho proposta por Rebeca, redução a 60%)

☺ **ESCOLA SECUNDÁRIA DE** [redacted]
Matemática - 8º Ano
Ficha de trabalho de grupo

Números em círculos

Considera o padrão de círculos a seguir apresentado constituído, na sua parte superior, por um quadrilátero em cujos vértices foram desenhados quatro círculos e, na parte inferior, por dois triângulos igualmente com círculos em todos os vértices. O círculo central está desenhado sobre o vértice comum aos três polígonos. Em cada círculo escreveram-se números naturais consecutivos começando no círculo superior e seguindo o sentido das setas da figura.



1- Adiciona os quatro números colocados nos vértices do quadrilátero, depois os três números colocados nos círculos do triângulo da esquerda e depois os do triângulo da direita. Por fim, adiciona as três somas obtidas. A esta soma final vamos chamar o *Grande Total*. Repetindo este processo com vários números naturais, procura encontrar uma relação entre os números que escreveste no círculo central do padrão e os *Grandes Totais* obtidos.

2 - A relação encontrada manter-se-á quando se inicia o processo com qualquer número inteiro negativo? No caso de não se manter, tenta encontrar uma nova relação que 'funcione' com estes números. Tenta encontrar inteiros negativos que não satisfaçam a nova relação que encontraste. Que concluis?

Anexo 12 — Tarefa *À procura de dízimas finitas*

(fac-símile da ficha de trabalho[88] proposta por Rebeca, redução a 60%)

☺ ESCOLA SECUNDÁRIA [redacted]
Matemática - 9º Ano
Ficha de trabalho de grupo nº 2 – Os números reais. Inequações
Nome: .... nº .... Turma:...........

À procura de dízimas finitas

1. A fracção $\frac{1}{25}$ dá origem a uma dízima finita e a fracção $\frac{1}{3}$ a uma dízima infinita.

- Indica outras fracções da forma $\frac{1}{n}$ que correspondam a dízimas finitas
- Quais as fracções que dão origem a dízimas finitas? Apresenta as tuas conjecturas.

2. Investiga se as tuas conjecturas se verificam igualmente para fracções com outros numeradores.

88 O enunciado da tarefa *À procura de dízimas finitas* apresentada por Anita aos seus alunos coincide com o incluído nesta ficha.

Anexo 13 — Tarefa *Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum: Que relações?*

Subtarefa (a): Apresentada por escrito como a sétima tarefa de uma ficha de trabalho sobre os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum

7– Completa a tabela:

a	***b***	***m.m.c. (a, b)***	***m.d.c. (a, b)***	***a*x*b***	***m.m.c. (a, b)* x *m.d.c. (a, b)***
10	15				
12	20				
4	18				

Compara os valores na tabela e formula uma conjectura que relacione o produto do máximo divisor comum entre dois números pelo mínimo múltiplo comum dos mesmos números e o produto daqueles dois números

Subtarefas (b) e (c): Apresentadas oralmente durante a aula

(b) "E o que eu vos queria pedir era que analisassem o que têm no vosso caderno e vejam lá se encontram alguma justificação para que isto [conjectura formulada no âmbito da subtarefa (a)] seja, ou não, sempre verdade" (TA 14/3/02, p. 4).

(c) "Será que uma conjectura deste tipo [a formulada para pares de números no âmbito da subtarefa (a)] será válida para três números quaisquer? Testem" (TA 14/3/02, p. 7).